O Telecurso 2000

O Telecurso 2000 é uma proposta de educação a distância para dar atendimento, **prioritariamente**, a **jovens** e **adultos** que desejam fazer o curso ou complementar sua escolaridade até o nível de 2º Grau, bem como adquirir competências básicas para o exercício de uma profissão.

No Telecurso 2000, o participante tem a oportunidade de adquirir conhecimentos gerais correspondentes ao ensino de 3ª à 8ª séries do 1º Grau, às três séries do 2º Grau e, ainda, conhecimentos específicos relativos aos Cursos Profissionalizantes.

Constitui-se, também, numa possibilidade de reciclagem para os professores e num reforço à aprendizagem dos participantes de modo geral, dentro da perspectiva de um processo permanente de educação.

Quais são as disciplinas

No Telecurso 2000, as disciplinas curriculares apresentam esta estrutura:

		1º GRAU
1ª FASE	-	LÍNGUA PORTUGUESA, MATEMÁTICA E HISTÓRIA
2ª FASE	-	LÍNGUA PORTUGUESA, MATEMÁTICA E CIÊNCIAS
3ª FASE	-	INGLÊS, MATEMÁTICA, CIÊNCIAS E GEOGRAFIA
		2º GRAU
1ª FASE	-	LÍNGUA PORTUGUESA, MATEMÁTICA, FÍSICA E BIOLOGIA
2ª FASE	-	LÍNGUA PORTUGUESA, MATEMÁTICA, FÍSICA E QUÍMICA
3ª FASE	-	QUÍMICA, HISTÓRIA, INGLÊS E GEOGRAFIA
		CURSOS PROFISSIONALIZANTES
1ª FASE	-	UNIVERSO MECÂNICO, ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO, NORMALIZAÇÃO, MATERIAIS, LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE DESENHO MECÂNICO, ELEMENTOS DE MÁQUINAS, CÁLCULO TÉCNICO
2ª FASE	-	LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE DESENHO MECÂNICO, METROLOGIA, HIGIENE E SEGURANÇA DO TRABALHO, QUALIDADE, PROCESSOS DE FABRICAÇÃO, ENSAIOS DE MATERIAIS
3ª FASE	-	QUALIDADE AMBIENTAL, TRATAMENTO TÉRMICO, MANUTENÇÃO, PROCESSOS DE FABRICAÇÃO, TRATAMENTO DE SUPERFÍCIES, AUTOMATIZAÇÃO/AUTOMAÇÃO

Cada fase tem a duração média de seis meses. O participante pode iniciar seus estudos na fase que for melhor para sua realidade, para seus interesses e para suas necessidades.

Recursos de aprendizagem

O Telecurso 2000 combina o uso de programas de TV (teleaulas) com materiais impressos próprios, referentes a cada disciplina, permitindo - além da aprendizagem dos conteúdos - a construção de novos conhecimentos e sua aplicação.

- Cada aula na TV tem duração de 15 minutos.
- Nos livros do Telecurso, o participante estuda, pesquisa e realiza exercícios.
- É importante o uso de dicionários e de diferentes materiais de leitura: jornais, revistas, livros, entre outros, que enriqueçam a aprendizagem.

Como participar

O Telecurso 2000 é aberto a todos os interessados, e o participante pode trabalhar de várias formas, escolhendo a alternativa que lhe seja mais adequada e que se ajuste à sua possibilidade de participação.

Alternativa 1

Freqüentando a telessala instalada numa instituição privada ou pública.

Neste caso, o participante:

- faz sua inscrição;
- freqüenta o curso no local e nos horários estipulados pela instituição.

Trata-se da **recepção organizada**, na qual os alunos se reúnem com a presença do Orientador de Aprendizagem e realizam atividades individuais ou em grupo.

Alternativa 2

Assistindo às teleaulas, sozinho ou em pequenos grupos, em qualquer lugar em que haja um aparelho de TV disponível: em casa, na casa de um amigo, no sindicato, na igreja, no clube e até no trabalho, sem necessitar da presença do Orientador de Aprendizagem durante a veiculação dos programas.

Essa alternativa atende aos que têm dificuldade de freqüentar diariamente uma sala de aula.

Neste caso, o participante:

- faz sua inscrição num centro controlador;
- freqüenta o curso pelo menos uma vez por semana.

Trata-se da **recepção controlada**, com a presença do Orientador de Aprendizagem para tirar dúvidas, orientar, analisar exercícios, trocar idéias, fornecer leituras suplementares e avaliar o desempenho do aluno.

Alternativa 3

Assistindo às teleaulas em qualquer lugar, sem nenhuma orientação anterior ou posterior e, portanto, sem freqüentar a telessala ou o centro controlador.

Trata-se da **recepção livre ou isolada**, destinada aos participantes que tenham total impossibilidade de freqüentar uma telessala ou centro controlador.

Como obter certificado de conclusão

O participante poderá prestar os exames supletivos oficiais, oferecidos pelas **Secretarias de Educação de cada Estado**.

Os procedimentos são os seguintes:

- informar-se sobre datas de inscrição, local e documentos necessários;
- inscrever-se;
- prestar os exames das matérias que desejar, não necessitando aguardar a conclusão de todo o telecurso;
- pedir, no local em que realizou as provas, o **atestado da matéria** em que foi aprovado - quem é aprovado em determinada matéria não precisa mais prestar exame dessa disciplina;
- solicitar à Secretaria de Educação o **certificado de conclusão**, quando tiver sido aprovado em todas as matérias do currículo do Telecurso 2000.

AULA

1

Recordando operações

Introdução

Vamos iniciar nosso curso de matemática do 2º grau recordando as quatro operações:

- adição
- subtração
- multiplicação
- divisão

Vamos lembrar como essas operações são feitas e, principalmente, quando devemos utilizá-las na solução de um problema.

Muita gente pensa que quem faz contas com rapidez é bom em matemática. É engano! Fazer contas rapidamente é uma habilidade que se adquire com a prática. Muito mais importante que fazer contas com rapidez é descobrir quais são as operações que devemos usar para resolver um problema. Portanto, em matemática, ***o mais importante é o raciocínio***.

Para começar, leia os quatro problemas abaixo e tente descobrir quais são as contas que devem ser feitas.

- Um motorista de táxi andou 180 km em certo dia e 162 km no dia seguinte. No total, quanto ele andou nesses dois dias?

- Uma mercadoria que custa R$37,00 foi paga com uma nota de R$50,00. De quanto foi o troco?

- Uma caixa de leite tipo “longa vida” possui 16 litros de leite. Quantos litros existem em 12 caixas?

- Devo repartir 24 balas igualmente entre meus três filhos. Quantas balas deve receber cada um?

Em todos os exemplos desta aula, usaremos apenas números inteiros. Eles são os nossos conhecidos 0, 1, 2, 3, ... e também os negativos - 1, - 2, - 3, ...

Nossa aula

A adição

Podemos pensar na operação de adição quando queremos ***juntar*** as coisas que estão separadas.

EXEMPLO 1

Em uma pequena escola, existem 3 turmas: uma com 27 alunos, outra com 31 alunos e outra com 18 alunos. Quantos alunos existem ao todo nessa escola?

Para reunir os alunos das 3 turmas, devemos somar a quantidade de alunos de cada turma. A operação que devemos fazer é:

$$27 + 31 + 18 = 76$$

Existem, portanto, **76 alunos** nessa escola.

Cada um dos números de uma soma chama-se ***parcela***. Na operação de adição, podemos somar as parcelas em qualquer ordem. Por isso, temos certeza de que 18 + 27 + 31 também dá **76**.

Devemos ainda lembrar que números negativos também podem ser somados. Por exemplo, a soma de - 12 com - 5 dá **- 17**. Para escrever essa operação fazemos assim:

$$-12 + (-5) = -17$$

Observe que colocamos - 5 entre parênteses para evitar que os sinais de + e de - fiquem juntos. Mas existe outra maneira, mais simples, de escrever a mesma operação. Veja:

$$-12 - 5 = -17$$

A subtração

Podemos pensar na operação de subtração quando queremos tirar uma quantidade de uma outra para ver quanto sobra. Veja o exemplo.

EXEMPLO 2

Uma secretária recebeu a tarefa de preparar 90 envelopes de correspondência. Até a hora do almoço, ela já tinha feito 52. Quantos ela ainda tem de fazer?

Temos aqui um exemplo claro de operação de subtração. A operação que devemos fazer é:

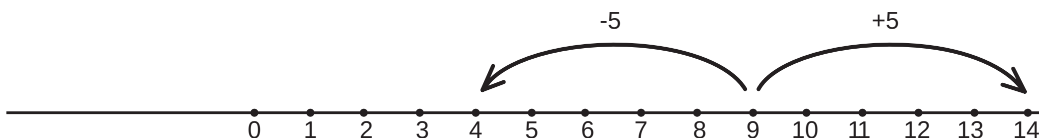
$$90 - 52 = 38$$

Assim, depois do almoço, a secretária deverá preparar ainda **38 envelopes**.

Observe agora que, em uma subtração, quando o segundo número é maior que o primeiro, o resultado é negativo. Veja:

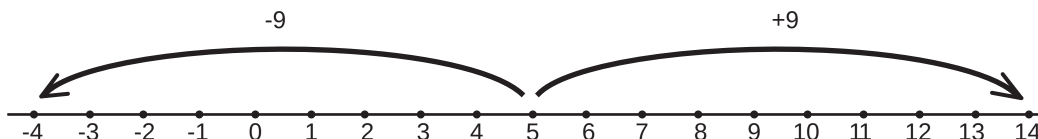
9 - 5 = 4
5 - 9 = - 4

Para visualizar as operações de adição e subtração, representamos os números inteiros como pontos de uma reta.



Na operação **9 + 5 = 14**, partimos do número 9, andamos 5 unidades para a ***direita*** e chegamos ao número 14.

Na operação **9 - 5 = 4**, partimos do número 9, andamos 5 unidades para a ***esquerda*** e chegamos ao número 4.



Na operação **5 + 9 = 14**, partimos do número 5, andamos 9 unidades para a ***direita*** e chegamos ao número 14.

Na operação **5 - 9 = - 4**, partimos do número 5, andamos 9 unidades para a ***esquerda*** e chegamos ao número - 4.

Para resumir, as regras são as seguintes:

- Escrever **5** ou **+ 5** é a mesma coisa.
- Quando sinais de números e sinais de operações aparecerem juntos, então:

(+) (+) = (+)
(+) (-) = (-)
(-) (+) = (-)
(-) (-) = (+)

Por exemplo:

5 + (+ 3) = 5 + 3 = 8
5 + (- 3) = 5 - 3 = 2
5 + (+ 3) = 5 - 3 = 2
5 - (- 3) = 5 + 3 = 8

Veja, a seguir, como devemos proceder numa situação em que há soma e subtração de diversos números.

EXEMPLO 3

João abriu uma conta bancária. Depois de algum tempo, essa conta apresentou o seguinte movimento:

DIA	SALDO INICIAL	DEPÓSITO	RETIRADA
10	00,00		
10		53,00	
12			25,00
15		65,00	
18			30,00
21			18,00

Qual será o saldo de João após essas operações?

Vamos representar os depósitos por números positivos e as retiradas por números negativos. Devemos então fazer a seguinte conta:

$$53 - 25 + 65 - 30 - 18$$

O resultado dessa operação será a quantia que João ainda tem no banco. A melhor forma de fazer esse cálculo é ***somar*** os números positivos (os depósitos), ***somar*** os números negativos (as retiradas) e depois ***subtrair*** o segundo resultado do primeiro. Assim:

$$\begin{aligned} & 53 - 25 + 65 - 30 - 18 = \\ & = (53 + 65) - (25 + 30 + 18) = \\ & = 118 - 73 = \\ & = 45 \end{aligned}$$

Portanto, João ainda tem **R$ 45,00** em sua conta bancária.

A multiplicação

A multiplicação nada mais é que uma soma com parcelas iguais. Por exemplo:

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 \times 7 = 35$$

O número 7 apareceu 5 vezes. Então, 7 vezes 5 dá 35. Da mesma forma:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 \times 5 = 35$$

Agora, o número 5 apareceu 7 vezes. Então 5 vezes 7 dá 35.

Você já sabe que, em uma multiplicação cada número chama-se ***fator***. Vamos, agora, recordar algumas propriedades da multiplicação.

1. Na multiplicação, a ordem dos fatores não altera o resultado. Por isso:

$$5 \times 7 = 7 \times 5$$

2. Quando temos várias multiplicações seguidas, qualquer uma delas pode ser feita primeiro. Por exemplo:

$$2 \times 3 \times 5 = (2 \times 3) \times 5 = 6 \times 5 = 30$$
$$2 \times 3 \times 5 = 2 \times (3 \times 5) = 2 \times 15 = 30$$
$$2 \times 3 \times 5 = (2 \times 5) \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

3. Quando um número multiplica uma soma, ele multiplica cada parcela dessa soma. Por exemplo:

$$2 \times (3 + 4 + 5) = 2 \times 12 = 24$$

Ou, ainda:

$$2 \times (3 + 4 + 5) = 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 = 6 + 8 + 10 = 24$$

Falta apenas recordar o que ocorre quando temos multiplicações com números negativos. As regras são as seguintes:

$$(+) \times (-) = (-)$$
$$(-) \times (+) = (-)$$
$$(-) \times (-) = (+)$$

Vamos ver alguns exemplos para entender bem essas regras.

- Para calcular $4 \times (-3)$ podemos fazer uma soma com 4 parcelas iguais a -3. Daí:

$$4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$$
$$4 \times (-3) = -3 - 3 - 3 - 3$$
$$4 \times (-3) = -12$$

- Para entender que o produto de dois números negativos é positivo vamos lembrar que o produto de qualquer número por zero dá zero. Portanto:

$$(-3) \times 0 = 0$$

Vamos então escrever essa igualdade assim:

$$(-3) \times (-2 + 2) = 0$$

É a mesma coisa. A igualdade continua certa. Mas, utilizando uma das propriedades da multiplicação, podemos escrever a mesma coisa de forma ainda diferente. Veja:

$$\underbrace{(-3) \times (-2)}_{?} + \underbrace{(-3) \times 2}_{-6} = 0$$

Ora, sabemos que $(-3) \times 2$ dá -6. Logo, devemos ter $(-3) \times (-2) = 6$ para que a soma seja zero.

A divisão

Podemos pensar na divisão quando queremos dividir um total de partes iguais ou quando queremos saber quantas vezes um número cabe no outro.

EXEMPLO 4

Desejamos colocar 80 lápis em 5 caixas, de maneira que todas as caixas tenham o mesmo número de lápis. Quantos lápis devemos pôr em cada caixa?

A resposta é fácil. Basta ***dividir*** 80 por 5.

80 # 5 = 16

Logo, cada caixa deve conter 16 lápis.

No exemplo que acabamos de ver, a divisão foi ***exata*** ou seja, conseguimos colocar a mesma quantidade de lápis em cada caixa sem que sobrasse nenhum. O que aconteceria, entretanto, se tivéssemos 82 lápis para pôr nas 5 caixas? A resposta é fácil. Cada caixa continuaria com 16 lápis, mas sobrariam 2.

Veja a operação:

```
              dividendo
 82 |5       ——— divisor
 -5  16      ——— quociente
 32
-30
  2 ——— resto
```

Na operação acima, 82 é o ***dividendo***, 5 é o ***divisor***, 16 é o ***quociente*** e 2 é o ***resto***. Esses quatro números se relacionam da seguinte forma:

$$82 = 5 \times 16 + 2$$

(dividendo) = (divisor) × (quociente) + (resto)

> **Atenção!**
> O resto é sempre ***positivo*** e ***menor*** que o divisor.

Ao fazer uma divisão, estaremos sempre encontrando dois novos números: o quociente e o resto. Vamos ver mais um exemplo do uso dessa operação em um problema.

EXEMPLO 5

Certo elevador pode transportar no máximo 6 pessoas. Se existem 46 pessoas na fila, quantas viagens o elevador deverá fazer para transportar todas essas pessoas?

Devemos dividir 46 por 6. Observe a operação:

$$\begin{array}{r|l} 46 & 6 \\ \cline{2-2} -42 & 7 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

O quociente igual a 7 indica que o elevador fará 7 viagens com lotação completa. Mas o resto igual a 4 indica que sobrarão ainda 4 pessoas para serem transportadas. Logo, o elevador deverá fazer uma viagem a mais para transportar as 4 pessoas restantes. Portanto, o elevador fará 8 viagens para transportar todas as pessoas.

Exercícios

Exercício 1

Efetue as operações indicadas:

a) 37 + 43 =
b) 55 - 18 =
c) 18 - 55 =
d) 12 + (- 7) =
e) 12 - (- 7) =
f) - 9 - 6 =
g) - 9 + (- 6) =
h) - 9 - (- 6) =
i) 13 × 7 =
j) (- 8) × 9 =
l) (7 - 3) × 4 =
m) (3 - 8) × (- 4) =

Exercício 2

Efetue as operações indicadas. Lembre que, se várias operações aparecem em uma mesma expressão, as multiplicações e divisões são feitas primeiro e depois as somas e subtrações.

a) 4 + 2 × 3 =
b) 20 - 3 + 12 - 30 ¸ 6 =
c) 13 × 112 - 11 × 10 =

Exercício 3

Um revendedor entrou numa confecção e fez a seguinte compra.

MERCADORIA	QUANTIDADE	PREÇO UNITÁRIO (R$)
camisetas	30	6
camisas	15	12
bermudas	25	9
calças	20	18

Quanto ele pagou por essa compra?

Exercício 4

Um trabalhador recebe R$12 por dia de trabalho, mais uma gratificação de R$8 por semana. Sabendo que cada semana tem 6 dias de trabalho, quanto esse trabalhador deverá ter recebido após 4 semanas?

Exercício 5

Descubra que números estão faltando nas operações abaixo:

a) $12 \times$ .... $=180$

b) .... | 8
5   26

c) $148 = 6 \times$ .... $+ 4$

Exercício 6

Certo automóvel faz, na estrada, 12 km por litro de gasolina. Para fazer uma viagem de 340 km, o proprietário colocou no tanque 30 litros de gasolina. Esse combustível será suficiente?

Exercício 7

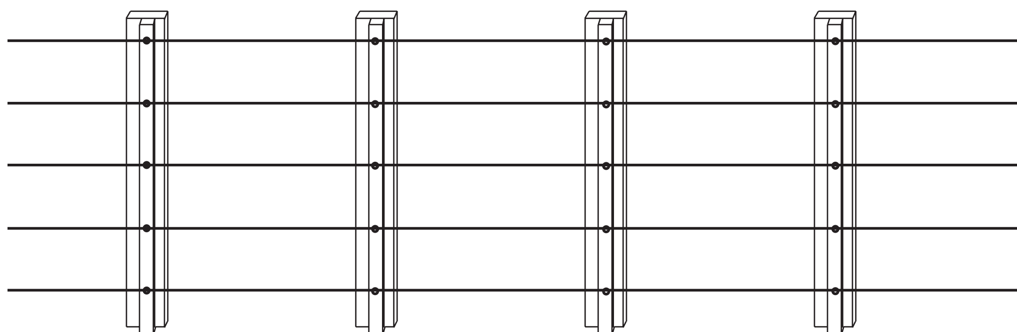
Em uma festa, as mesas do salão são quadradas e acomodam, no máximo, 4 pessoas. Para que 150 pessoas possam se sentar, quantas mesas serão necessárias?

Exercício 8

Uma escola tem 4 salas e cada sala tem 30 carteiras. Na primeira sala existem 26 alunos, na segunda 24, na terceira, 23 e na quarta, 19. Quantos alunos ainda podem ser matriculados?

Exercício 9

João tem um terreno retangular de 20m de frente por 30m de fundo, e deseja cercá-lo com uma cerca de arame com 5 fios.



Quantos metros de arame ele deverá comprar?

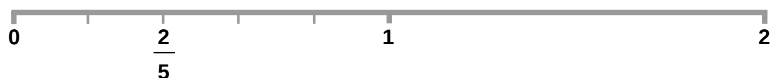
AULA

2

Frações e números decimais

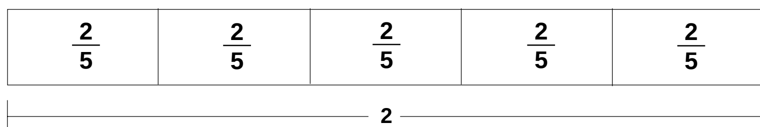
Introdução

Inicialmente, as frações são apresentadas como partes de um todo. Por exemplo, teremos $\frac{2}{5}$ de um bolo se dividirmos esse bolo em cinco partes iguais e tomarmos duas dessas partes. Entretanto, se substituirmos o "bolo" por uma unidade qualquer, a fração $\frac{2}{5}$ é um número e, como tal, possui seu lugar na reta numérica. Para fazer a marcação na reta numérica, dividimos a unidade em 5 partes e tomamos duas



Por outro lado, a fração é também o resultado da divisão de dois números; por exemplo, a fração $\frac{2}{5}$, que é o resultado da divisão de 2 por 5.

Observe o desenho a seguir:



Duas unidades foram divididas em 5 partes iguais.

Nossa aula

Nesta aula vamos estudar as frações, suas propriedades e a forma de representá-las por números decimais.

A divisão prolongada

Imagine que R$25,00 devam ser divididos igualmente entre 4 pessoas. Quanto cada uma deverá receber?

Sabemos que 25 não é múltiplo de 4, e portanto, a quantia que cada um deve receber não será um número inteiro. Para isso existem os centavos. Vamos então lembrar como fazemos a divisão de 25 por 4.

$$\begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline -24 & 6 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Até agora, nossa conta indica que cada pessoa receberá **6** reais; mas existe ainda um resto de 1 real. Para continuar, acrescente um zero ao resto e uma vírgula ao quociente.

$$
\begin{array}{r|l}
25 & 4 \\ \cline{2-2}
-\,24 & 6{,}25 \\ \cline{1-1}
10 & \\
-8 & \\ \cline{1-1}
20 & \\
-\,20 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

O resultado da divisão de 25 por 4 é **6,25** ou seja, cada pessoa receberá **6** reais e **25** centavos.

Utilizando uma fração para indicar a divisão, podemos representar a operação que fizemos da seguinte forma:

$$\frac{25}{4} = 6{,}25$$

Todas as frações podem ser representadas por números decimais. Basta dividir o numerador pelo dominador prolongando a operação.

A máquina de calcular faz muito bem esse trabalho. Observe os exemplos.

$\frac{25}{4}$	[2] [5] [÷] [4] [=]	6.25
$\frac{126}{15}$	[1] [2] [6] [÷] [1] [5] [=]	8.4
$\frac{2}{3}$	[2] [÷] [3] [=]	0.6666666

O que aconteceu no último exemplo?

A representação decimal da fração $\frac{2}{3}$ tem infinitas casas decimais, ou seja, a quantidade de algarismos não acaba nunca. Esses números decimais que possuem algarismos (ou grupos de algarismos) que se repetem eternamente são as ***dízimas periódicas***.

As dízimas periódicas são incômodas. Com elas, em geral não conseguimos fazer contas de somar, subtrair, multiplicar ou dividir. Por isso, preferimos representar esses números na forma de frações.

Vamos então recordar as operações com frações.

Frações iguais:

Sabemos que a fração $\frac{1}{2}$ é igual ao número decimal 0,5. Entretanto, as frações $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$, ... são também iguais a 0,5. Temos aqui um primeiro exemplo de frações iguais:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$$

Como fazemos para obter frações iguais?

A propriedade que enunciamos a seguir responde a essa pergunta.

Uma fração não se altera quando multiplicamos ou dividimos o numerado e o denominador pelo mesmo número.

Observe os exemplos:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 7}{2 \times 7} = \frac{7}{14}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{12}{32} = \frac{12 \div 4}{32 \times 4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{50}{60} = \frac{50 \div 10}{60 + 10} = \frac{5}{6}$$

Os dois últimos exemplos são importantes porque mostram como simplificar frações. Se em algum problema aparece a fração $\frac{12}{32}$, podemos, em seu lugar, usar a fração $\frac{3}{8}$, que representa o mesmo número e é mais simples.

A propriedade que vimos é fundamental para as operações de adição e subtração de frações.

Operações com frações

Sabemos que é muito fácil somar ou subtrair frações que tenham o mesmo denominador. Neste caso, basta somar ou subtrair os numeradores. Assim:

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{3+4}{10} = \frac{7}{10}$$

Observe outro exemplo e a simplificação do resultado.

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3+7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Como faremos, então, para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes? Não é difícil.

Vamos tentar representar as frações dadas por outras, iguais às que temos, mas com denominadores iguais. É o que veremos a seguir.

Adição e subtração de frações

Tomemos como exemplo, a soma $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$.

Os denominadores são diferentes. Então, buscamos um número que seja múltiplo de ambos. Encontramos 12, que é múltiplo de 4 e também de 6.

Vamos então representar as duas frações dadas com esse mesmo denominador. Observe:

$$\frac{1}{4}=\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1\times 2}{6\times 2}=\frac{2}{12}$$

Então,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$$

Acabamos de somar duas frações com denominadores diferentes. A subtração é feita da mesma forma. Devemos também igualar os denominadores.

Consideremos então a diferença $\frac{4}{5}-\frac{3}{8}$.

Qual será o novo denominador que devemos escolher? Pense um pouco e observe a solução.

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times 8}{5\times 8}=\frac{32}{40}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{15}{40}$$

Então,

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{8}=\frac{32}{40}-\frac{15}{40}=\frac{17}{40}$$

Multiplicação de frações

Se na solução de algum problema devemos calcular, por exemplo ***a terça parte de dois quintos***, estamos frente a uma situação em que devemos multiplicar duas frações. A regra é a seguinte:

Para multiplicar duas frações,
multiplique os numeradores e os denominadores

Assim:

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{1\times 2}{3\times 5}=\frac{2}{15}$$

O inverso de um número

O inverso de um número é um outro que, multiplicado pelo primeiro, dá 1. Por exemplo:

o inverso de 2 é $\frac{1}{2}$ porque $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

o inverso de $\frac{3}{5}$ é $\frac{5}{3}$ porque $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$

O ***zero*** é o único número que ***não possui inverso***.

Observe agora a igualdade abaixo:

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$$

Ela está correta, é claro. Mas, o que está mostrando? Que, do lado esquerdo, estamos dividindo 2 por 3 e, do lado direito, estamos multiplicando 2 pelo inverso de 3. Isso vale para qualquer número. A regra é a seguinte.

Dividir um número por outro é o mesmo que multiplicar esse número pelo inverso do outro.

Por exemplo, quanto dá $\frac{4}{5}$ divididos por $\frac{2}{3}$? Pense um pouco e acompanhe a solução.

$$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

As porcentagens

Uma porcentagem é uma fração de denominador 100. Por exemplo, **32%** é igual à fração $\frac{32}{100}$ que também é igual ao número decimal **0,32**. Quando queremos calcular uma porcentagem de algum valor, multiplicamos a fração por esse valor. Veja:

32%	de	650 laranjas	=	0,32	×	650	= **208 laranjas**
8%	de	R$140,00	=	0,08	×	140	= **R$11,20**

O que fazer para transformar uma fração qualquer em uma porcentagem?

Se o denominador só possui múltiplos de 2 e de 5, é fácil encontrar uma fração equivalente com denominador 100. Por exemplo:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 20}{5 \times 20} = \frac{40}{100} = 40\%$$

Mas como faríamos com a fração $\frac{4}{7}$?

O mais prático, em qualquer caso, é usar a máquina para dividir o numerador pelo denominador e depois deslocar a vírgula duas casas para a direita. Observe os exemplos:

$\frac{8}{25} = 8 \# 25 = 0{,}32 = 32\%$

$\frac{5}{8} = 5 \# 8 = 0{,}625 = 62{,}5\%$

$\frac{4}{7} = 4 \# 7 \cong 0{,}5714 = 57{,}14\%$

Repare que nesse último exemplo fizemos uma aproximação.

Na prática, usamos duas ou, no máximo, três casas decimais em nossas aproximações.

Exercícios

Exercício 1

Simplifique as frações abaixo. Exemplo:

$$\frac{18}{42} = \frac{18 ¸ 2}{42 ¸ 2} = \frac{9}{21} = \frac{9 ¸ 3}{21 ¸ 3} = \frac{3}{7}$$

a) $\frac{20}{32}$

b) $\frac{24}{36}$

c) $\frac{320}{400}$

d) $\frac{10}{100}$

Exercício 2

Complete os espaços abaixo com os sinais de **<** (menor), **>** (maior) ou **=** (igual). Exemplo: $\frac{2}{3} .... \frac{5}{8}$

Solução:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 ´ 8}{3 ´ 8} = \frac{16}{24} \\ \frac{5}{8} = \frac{5 ´ 3}{8 ´ 3} = \frac{15}{24} \end{array}\right\} \quad \frac{16}{24} > \frac{15}{24} \rightarrow \frac{2}{3} > \frac{5}{8}$$

a) $\frac{5}{8} .... \frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{3} .... \frac{5}{9}$

c) $\frac{5}{6} .... \frac{23}{24}$

d) $\frac{8}{10} .... \frac{20}{25}$

Exercício 3

Efetue:

a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$

b) $\frac{3}{10} - \frac{4}{15}$

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

Exercício 4

Efetue:

a) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}$

c) $\frac{2}{5} \div \frac{3}{7}$

b) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{3}$

d) $\left(1 + \frac{2}{4}\right) \div \frac{7}{2}$

Exercício 5

Calcule as porcentagens:

a) 10% de 120
b) 24% de 500
c) 5% de 60
d) 12,5% de 72

Exercício 6

Transforme as frações em números decimais aproximados. Dê as respostas com duas decimais. Entretanto, observe a terceira casa decimal. Se ela for menor que 5, mantenha o valor da segunda casa. Se ela for maior ou igual a 5, aumente de uma unidade a segunda casa.

Exemplo:

$\frac{1}{7} = 0{,}142... \cong 0{,}14$

$\frac{26}{19} = 1{,}368... \cong 1{,}36$

a) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{11}$

b) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{29}{13}$

Exercício 7

Escreva as frações abaixo como porcentagens. Não dê respostas com mais de duas decimais. Aproxime se necessário:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{7}{40}$

AULA

3

Introdução

Vamos falar um pouco sobre a ***aritmética***, a ***geometria***... e a ***álgebra***. Elas são áreas importantes da matemática. Cada uma delas inventa seus objetos de estudo e métodos de resolver problemas, e todas têm aplicações significativas em nosso cotidiano.

Como você deve se lembrar, de seus estudos no curso do 1º grau, a aritmética estuda os números - especialmente os números inteiros e os fracionários. Quanto à geometria, seus objetos de estudo são as figuras geométricas - como o triângulo, o quadrado, o círculo, a esfera etc.

Os conhecimentos de aritmética e de geometria surgiram possivelmente há mais de quatro milênios. Pelo que está registrado nos achados da arqueologia - a ciência que estuda o nosso passado - devemos muitos aos babilônios e aos egípcios e, finalmente, aos gregos. Estes últimos foram os responsáveis pelo surgimento do pensamento científico e nos deixaram os trabalhos de Tales, de Pitágoras e, mais tarde, de Euclides. (Euclides, por volta de 300 a.C., formalizou praticamente todo o conhecimento matemático de seu tempo em sua obra *Os Elementos*.)

E a álgebra?

A álgebra já é bem mais recente. Considera-se que tenha surgido na Índia, nos primeiros séculos deste milênio. De lá passou aos árabes. Nosso Sistema de numeração é chamado ***indo-arábico*** devido a esses povos. E com os árabes, que lhe deram o nome, a álgebra penetrou na Europa, onde desenvolveu-se extraordinariamente a partir do século XVI. Da Europa, esta área da matemática que continua crescendo, chegou às Américas e até nós, neste Brasil do limiar do terceiro milênio.

A matemática deve o que é não apenas à genialidade de homens e mulheres como Tales, Pitágoras, Hipátia (uma matemática grega), Newton, Gauss etc., mas também aos talentos “incógnitos” que em instantes magníficos criaram e continuarão criando a matemática.

Quem teria inventado o zero? E as noções de ponto e de reta? E os nossos algarismos? Jamais saberemos responder. Só sabemos que o conhecimento se espalha, como é comum na natureza: cada nova planta que brota traz esperança de muitas outras plantas que brotarão. Sendo assim, aqui vão nossas sementes algébricas! E que você as multiplique - é o nosso desejo.

Nossa aula

Para começar esta aula, pense no seguinte problema: uma mulher de 25 anos é casada com um homem 7 anos mais velho que ela.

Qual é a soma das idades desse casal? Pense e responda. Não é difícil responder. O marido tem:

$$25 + 7 = \mathbf{32} \text{ anos}$$

Portanto, a soma das idades do casal é:

$$25 + 32 = \mathbf{57} \text{ anos}$$

Agora vamos ver outro problema semelhante: o marido de certa mulher é 7 anos mais velho que ela. Quando nasce a primeira criança do casal, as idades dos dois somam 70 anos.

Qual a idade da mulher?

Podemos perceber que essa resposta não virá tão facilmente quanto a do problema anterior. É interessante, por isso, que você pegue papel e lápis, e tente responder à pergunta.

Será isso o que também faremos na próxima aula, quando mostraremos que alguns problemas tanto podem ser resolvidos pelo raciocínio aritmético quanto pelo algébrico.

Agora, queremos mostrar-lhe como resolver este problema pela álgebra, pois cremos que você saberá reconhecer o valor dessa nova forma de raciocínio.

O nascimento do "x"

Para resolver esse problema, poderíamos pensar assim: já que não sabemos a idade da mulher, nós escrevemos **?** em seu lugar.

Com isso, podemos escrever o que sabemos do problema: que a soma das idades da mulher e de seu marido é 79. Assim:

$$\underbrace{?}_{\textbf{idade da mulher}} + \underbrace{(\,?\, + 7)}_{\textbf{idade do marido}} = 79$$

Continuando, encontraremos:

$$\begin{aligned} ? + ? + 7 &= 79 \\ 2\,? &= 72 \\ ? &= 72 \div 2 \\ ? &= 36 \end{aligned}$$

Portanto, a idade da mulher é 36 anos. Para conferir, basta ver qual é a idade do marido e qual é a soma das idades.

Não é fácil? Pois esta é a essência do chamado raciocínio algébrico - e daqui a pouco nós o recordaremos para você. Por enquanto, repare que o raciocínio é exatamente igual ao de uma outra pessoa que, no lugar de **?**, usasse um outro símbolo qualquer para representar um número.

Por exemplo, alguém poderia pensar assim: "Como não sei a idade procurada, deixo um espaço para ela dentro deste quadradinho, e então escrevo o que sei." Ficaria assim:

$$\square + (\square + 7) = 79$$

Resolvendo esta equação (que é como chamamos em álgebra o procedimento de encontrar o número procurado), chegamos a:

$\square$ = **36**, como antes.

Ou seja, o símbolo que cada pessoa escolhe para ajudá-la a resolver o problema não é importante. Observe que o raciocínio é o mesmo.

Sendo assim, podemos usar ***qualquer símbolo*** (lembre-se disso, pois às vezes os símbolos escolhidos podem ajudar bastante na resolução de problemas que encontramos na vida - e até nos motivar mais a enfrentar esses problemas).

É comum, em Matemática, usarmos a letra "**x**" para designar o número que estamos procurando - a ***incógnita***, como se diz. Também em outras ciências e na literatura em geral a letra "**x**" tem sido usada para designar algo desconhecido ou misterioso.

Como exemplos, temos: o "**raio x**", que assim foi chamado porque desconhecia-se o que ele era; uma certa "**faculdade x**", relacionada com o desenvolvimento da consciência do homem (segundo o escritor britânico Colin Wilson); o **"cavalheiro x"**, personagem misterioso de algum romance ou novela etc.

No caso do problema anterior, então, sua equação fica assim, usando **x**:

$$x + (x + 7) = 79$$

Compare com as outras duas formas de escrevê-la. Não é a mesma coisa? E resolvendo a equação, obtemos **x = 36** para a idade da mulher, como antes.

Seguindo a tradição matemática, também adotaremos o **x** quando o símbolo for indiferente.

Resumindo o raciocínio algébrico: outro problema

João avalia que, de sua caixa d'água de 1000 litros, restavam apenas uns 100 litros. Para enchê-la de novo precisou fazer 45 viagens carregando uma lata cheia d'água. Qual a capacidade aproximada da lata? E quanto pesava a água na lata?

As etapas importante do nosso raciocínio acima são as seguintes.

Procure compreender a idéia geral do raciocínio: como vimos, ele é fruto do bom senso.

ETAPA 1 - Dando nome aos "bois"

O que precisamos saber para resolver o problema: isto será **x**.

Neste exemplo, **x** = capacidade da lata. Em seguida, usamos **x** para escrever o que sabemos; quer dizer, montamos a equação do problema.

ETAPA 2 - Montando a equação

Basta interpretar o que está escrito na nossa linguagem comum em termos matemáticos. Ou seja, escrever a equação. Reveja como fazemos:

Capacidade da lata = x

Capacidade de 45 latas = 45x

O que sabemos: 45x + 100 = 1000 (litros)

ETAPA 3 - Resolvendo a equação

Esta etapa é mais automática: são as regras do cálculo. Aqui:

$$45x + 100 = 1000$$

$$45x = 900$$

$$x = 900 \# 45$$

$$x = 20 \text{ (litros)}$$

E a lata pesa 20 kg, pois 1 litro de água pesa 1 kg. Não estamos considerando o peso da lata vazia, neste problema.

ETAPA 4 - Conferindo o resultado

"Tudo isso?", alguém poderia perguntar, espantado com o peso carregado por João em tantas viagens. Para não termos dúvida de que chegamos ao resultado certo, "checamos" se o número encontrado satisfaz de fato o que sabemos dos dados do problema. Quer dizer, se **x** for mesmo igual a 20, então deveremos ter 45x + 100 = 1000. Vejamos:

$$\mathbf{45 \times \underbrace{(20)}_{x} + 100 = 900 + 100 = 1000} \text{ (Confere !)}$$

São só estas etapas? Não. É preciso ter o cuidado final de verificar se já respondemos à pergunta do problema.

ETAPA 5 - Respondendo o que foi perguntado

Por exemplo, poderia ter sido perguntado não quanto era a ***capacidade*** da lata, mas sim qual o seu ***peso*** em água. (A resposta não seria, é claro, 20 litros!)

Ou seja: para completar a solução, você tem de responder exatamente o que o problema pede.

Foi uma boa aula. Concorda? O raciocínio algébrico é mesmo muito útil, poderoso e até mesmo muito atual em termos de pensamento matemático. Use-o nos próximos exercícios, não esquecendo de que o importante é a compreensão do que estamos estudando.

Exercícios

Exercício 1

Para cercar todo o perímetro de seu terreno quadrado e ainda gastar 26 m no caminho que leva à estrada, Procópio precisou comprar 94 m de cerca. Qual a área de seu terreno?

Exercício 2

Quando seu primogênito nasceu, Gustavo tinha 24 anos. Depois de quantos anos ele terá exatamente o dobro da idade de seu filho? E o triplo?

Exercício 3

a) Qual o número cuja metade é igual à sexta parte de seu triplo?

b) Qual o número cuja metade é igual à sexta parte de 21?

c) Qual o número cuja metade é igual à sexta parte de 42?

Exercício 4

Quinze anos depois do nascimento das trigêmeas Lia, Lina e Liana, quantos anos tem cada uma delas?

Exercício 5

Quanto devo pedir por determinada mercadoria que pretendo vender para que, descontados 10%, eu fique ainda com R$100,00? (Verifique!)

Exercício 6

Relacione cada número à esquerda com aquela expressão à direita que se torna verdadeira quando **x** é substituído pelo número:

VALORES DE **X**	EXPRESSÕES
2	a) $5x = 6 - x^2$
0	b) $\frac{18}{x} + 5 = 2 + x$
- 3	c) $\sqrt{x} + x = 0$
3	d) $x^3 + 2x = 12$
1	e) $x + 2x - 9 = 0$

AULA

4

O método aritmético e o método algébrico

Introdução

Se você esteve bem atento na aula passada, na qual conhecemos os "problemas com **x**", deve ter percebido que aquele problema das idades do casal poderia ter sido resolvido sem que fosse preciso usar **x**. Vejamos como. O problema dizia:

Certa mulher é casada com um homem 7 anos mais velho que ela. Quando a primeira criança do casal nasceu, a soma das duas idades era 79. Qual era a idade da mulher?

Podemos raciocinar da seguinte maneira. Se o homem e a mulher tivessem a mesma idade, a idade dela (ou dele) seria, é claro, metade da soma; e a soma seria o dobro da idade da mulher. Como o marido é 7 anos mais velho, o dobro da idade da mulher foi aumentado de 7 anos, somando 79 anos.

Logo, o dobro da idade da mulher é:

$$79 - 7 = 72$$

E a idade da mulher é:

$$72 \div 2 = 36$$

C.Q.D.! Isto é, ***Como queríamos demonstrar***, pois foi este o resultado que encontramos na outra aula.

A aula de hoje traz outros problemas, que podem ser resolvidos tanto pelo método aritmético (como fizemos agora), como pelo método algébrico, "ou método do **x**".

Qual é o melhor para cada problema? A matemática não decide isso por nós: ela apenas enriquece nosso conhecimento com vários métodos para resolver problemas, e deixa a escolha para nós. Pois cabe a cada pessoa escolher por si mesma, já que a Matemática também é parte da vida.

Sendo assim, papel e lápis! Porque também não existe "matemática de cabeça", e vamos à aula de hoje!

Vamos ver como resolver um mesmo problema por métodos diferentes.

No exemplo seguinte, temos mais uma questão sobre idades. Compare a solução pelo método aritmético e a solução pelo método algébrico. Você verá que chegaremos ao mesmo resultado.

> *" Sou cinqüentão", afirmou Paulo (querendo dizer que tinha cinqüenta e poucos anos). "E hoje é um dia cabalístico" (isto é, mágico). "Pois não apenas a idade da minha mulher, Jurema, mais jovem do que eu, se escreve ao contrário da minha, como a diferença entre as nossas idades é igual à idade que nossa filha comemora hoje: 9 anos!"*

Quantos anos tem Paulo? Uma tal data "cabalística" como essa se repetirá algum dia?

Tente descobrir a idade de Paulo, raciocinando apenas com números, sem utilizar **x**, ou seja, raciocinando aritmeticamente.

Resolvendo pelo método aritmético

O caminho mais simples para resolver o problema pelo método aritmético, neste caso, parece ser pelo raciocínio das tentativas. Assim, vamos fazer diretamente as contas em cada uma das possibilidades para a idade de Paulo - cinqüenta e poucos anos:

IDADE DE PAULO	IDADE DE JUREMA	DIFERENÇA (= 9?)	
51	15	36	(não)
52	25	27	(não)
53	35	18	(não)
54	45	9	(sim)
55	55	0	(já não serve: Jurema é mais jovem)

Portanto, Paulo tem 54 anos, e sua mulher, 45.

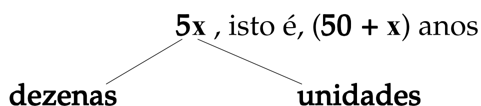
Quanto à segunda pergunta, fica para você responder. Continue usando o método das tentativas. No próximo ano, Paulo terá 55 anos, e Jurema, 46 (cujo contrário é 64, e não 55 - o que Paulo não consideraria "cabalístico"), e assim por diante. Procure!

Resolvendo pelo método algébrico

A pergunta é: qual a idade de Paulo "cinqüentão"?

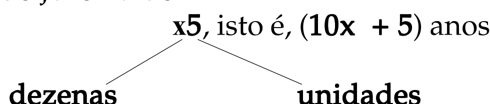
Vamo chamar a idade de Paulo de:

5x , isto é, (**50 + x**) anos



E a idade de Jurema de:

x5, isto é, (**10x + 5**) anos



Sabemos que a diferença entre as idades é de 9 anos. Logo,

$$\begin{aligned}(50 + x) - (10x + 5) &= 9\\ 50 + x - 10x - 5 &= 9\\ -9x + 45 &= 9\\ -9x &= 9 - 45\\ x &= \frac{-36}{-9} = \mathbf{4}\end{aligned}$$

A idade de Paulo, então, é 54 anos (como encontramos antes).

Que método é mais fácil? E mais rápido?

No exemplo relativo à idade de Paulo, talvez você ache mais fácil aplicar o método aritmético. Basta organizar um pouco o raciocínio, fazendo uma tabela, e procurar o par de números “contrários” que satisfaça o que se pede.

Já o método algébrico é mais rápido, e também mais geral: adapta-se imediatamente a vários problemas. (Veja os exercícios, depois.)

Mas isso foi nesse exemplo. Em outros problemas, pode ser diferente. É isso que é bom, pois a própria escolha inicial do método a ser empregado já desenvolve nosso raciocínio e nossa criatividade.

Veremos agora um problema que pode ser resolvido por, pelo menos, três métodos: um aritmético, um algébrico e um gráfico. Deixamos para você opinar, neste caso, sobre qual deles é o mais fácil, ou o mais rápido, ou o mais geral etc.

Outro problema... e três métodos de resolução

Estou com uns amigos numa mesa de bar. Tenho na carteira R$15,70. Quanto posso deixar minha despesa alcançar, se também pretendo deixar como gorjeta para o garçom 10% sobre essa despesa?

Resolvendo pelo método aritmético

Fazendo algumas tentativas com o valor da despesa, observo que, para cada 10 reais de despesa, deixarei mais 1 real para o garçom, totalizando esse gasto 11 reais, ou R$11,00. Para cada 1 real de despesa, deixarei 10 centavos, gastando assim R$1,10. Vamos, então, acrescentando novos gastos como esses, até a soma se aproximar do que tenho (R$15,70). Veja a tabela, com valores em R$:

DESPESA	GORJETA	GASTO REAL	SOMA
10	1	11	11
1	0,10	1,10	12,10
1	0,10	1,10	13,20
1	0,10	1,10	14,30
1	0,10	1,10	15,40
0,10	0,01	0,11	15,51
0,10	0,01	0,11	15,62
0,10	0,01	0,11	15,73 (mais do que tenho)

Observe que, após a quinta linha de despesa, não valeria a pena continuar somando 1 real, pois isso levaria o total do gasto a mais de 16 reais - quantia de que não disponho. Por isso, continuamos com valores simples menores, de R$0,10 de despesa. Sendo assim, a tabela mostra que, nesse caso, posso deixar minha despesa alcançar apenas o que consta da última linha. Ou seja:

$$10 + 4 + 0{,}20 = \mathbf{14{,}20\ reais}$$

Resolvendo pelo método algébrico

Vamos dar nomes (ou símbolos) aos componentes do problema:

- x - para o valor que a despesa pode alcançar
- 0,1x - para a gorjeta = 10% de x = (10/100) · x
- 1,1x - para o gasto = x + 0,1x

Então, eu quero saber qual o valor de **x** para que o meu gasto no bar não ultrapasse R$15,70.

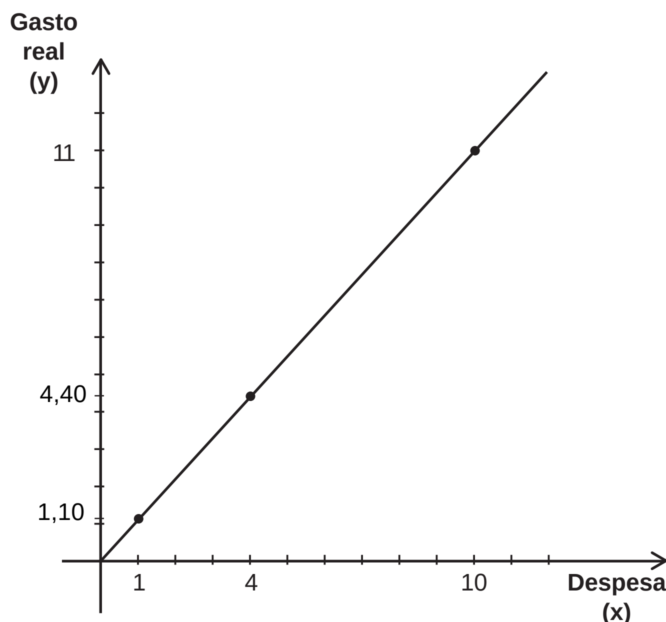
$$1{,}1x = 15{,}70 \text{ (ou menor que isso)}$$
$$x = 14{,}27 \text{ - um pouco mais que } 14{,}20\text{. Como antes.}$$

De fato, se a minha despesa for R$14,20, a gorjeta será de R$1,42 ao todo, e terei gasto R$14,20 + R$1,42 = **R$15,62**, como encontramos na solução aritmética.

Resolvendo pelo método gráfico

Podemos também nos assegurar dessa resposta visualizando o problema num gráfico. Por exemplo, marca-se no eixo horizontal a despesa e, no vertical, a despesa aumentada de 10%, quer dizer, o gasto real. E marcando neste gráfico alguns valores conhecidos, como aqueles da tabela do item **Resolvendo pelo método aritmético**.

DESPESA	GASTO REAL
10	11
1	1,10
4	4,40



É fácil notar que esses três pontos do tipo (x,y) = (despesa, gasto) que encontramos na tabela, bem como quaisquer outros que calculemos, formam uma reta que passa pela origem dos eixos. De fato, isso acontece porque o gasto é proporcional à despesa: ou seja, se a despesa for, por exemplo, 10 vezes maior, o gasto também será 10 vezes maior. Realmente, vimos que, de fato, um deles é múltiplo do outro: gasto = (1,1) × despesa.

Aqui é bom fazer uma pequena pausa para tratarmos de sinais matemáticos. É que, em álgebra, convém trocar o sinal de vezes (×) pelo ponto (·), para não confundir com a letra **x**.

Tradicionalmente, a matemática utiliza os seguintes sinais:

× e · para a multiplicação
e
e : para a divisão.

Por isso, se você encontrar:

gasto = (1,1) · despesa

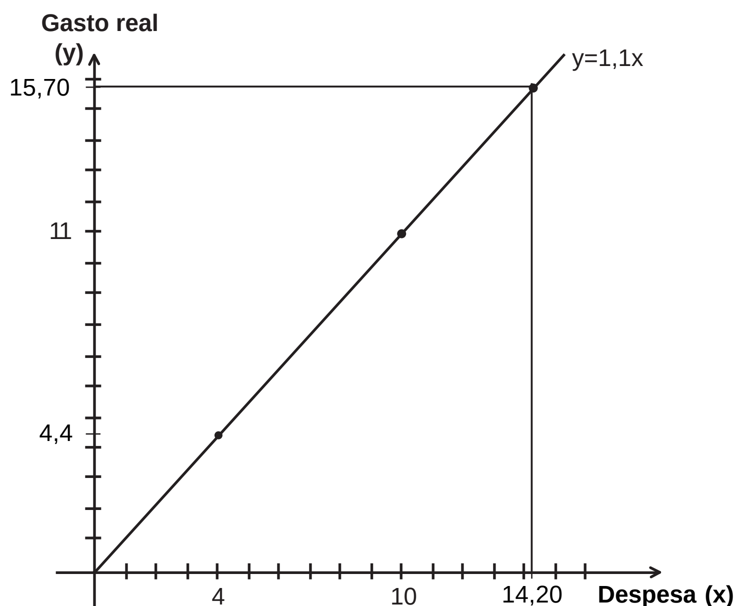
é a mesma coisa que

gasto = (1,1) × despesa

Algumas vezes, você também vê uma multiplicação na qual o sinal não aparece. Podemos escrever, por exemplo, o produto de **a** por **b** de três formas:

a × **b**, **a** · **b** ou simplesmente **ab**

Assim, para sabermos que a despesa corresponde ao gasto de, no máximo, R$15,70, marcamos este número no eixo vertical e procuramos pela despesa no eixo horizontal:



Fazendo isto com cuidado, vimos que a despesa pode ser de até R$14,20, ou um pouco mais alta - como concluímos pelos outros dois métodos. Aqui estão alguns exercícios para você praticar. A lição mais importante desta aula, entretanto, não foi dita até aqui. É esta:

Resolver um mesmo problema por dois métodos diferentes pode lhe dar uma grande segurança quanto às respostas. Se elas forem iguais, é bem possível que suas respostas estejam certas. “E se forem diferentes?”, você perguntaria. Neste caso, é claro que uma das respostas está errada!

Saber que estamos errados também é uma forma de acertar. Concorda? O grande cientista Einstein teria dito, certa vez, que não se importava quando alguém apontava um erro em suas teorias; na verdade, até gostava. Por quê? Ele dizia que, tendo sido encontrado esse equívoco, isso o colocava mais perto da verdade, pois já não estava se enganando.

Grande Einstein! São palavras que nos fazem pensar, não é mesmo?

Exercícios

Exercício 1

Use o gráfico do último problema desta aula para encontrar que despesa posso fazer para não ultrapassar os gastos abaixo, deixando ainda 10% para o garçom:

a) R$ 8,80
b) R$ 9,02
c) R$ 19,80

Exercício 2

Resolva o Exercício 1 aritmeticamente, completando a tabela dada na aula. Compare com as respostas encontradas naquele exercício.

Exercício 3

Resolva o exercício 1 algebricamente, usando a equação que relaciona despesa e gasto no problema de gorjeta de 10%. Compare com as respostas dos exercícios anteriores.

Exercício 4

Se eu decidisse deixar 20% de gorgeta para o garçom , em vez de 10%, quanto poderia ter de despesa?

a) Solução aritmética:
b) Solução algébrica:
c) Solução gráfica:

AULA

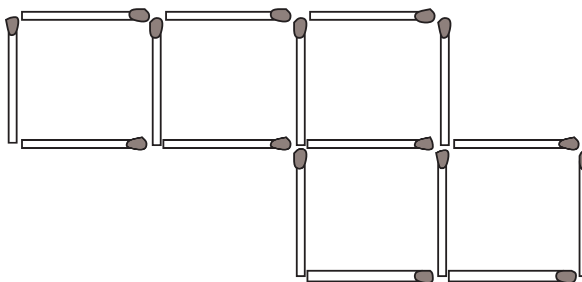
5

Equacionando os problemas

Introdução

Nossa aula começará com um quebra-cabeça de mesa de bar - para você tentar resolver agora.

Observe esta figura feita com palitos de fósforo. Mova de lugar exatamente 2 palitos, de modo a transformá-la em 4 quadrados iguais, sem sobrar nenhum palito. Você pode fazer isso com palitos ou no desenho.



Nossa Aula

Conseguiu resolver o quebra-cabeças? Não? Então, vamos resolvê-lo juntos, pelo caminho da matemática. Certos problemas não nos parecem, de início, "problemas de matemática" - mas, de repente, vemos que existe uma solução para eles que pode ser chamada de ***solução matemática***. (Na realidade, o que existe na vida prática não são problemas de matemática - mas soluções matemáticas, criadas pelas pessoas para resolver problemas práticos).

O quebra-cabeça é um exemplo. A princípio, pode não estar bem claro qual matemática usar. Geometria? Aritmética? De fato, o quebra-cabeça envolve tanto figuras geométricas quanto números.

Se você ainda não conseguir resolvê-lo, talvez seja porque não tenha percebido que o quebra-cabeça tem dois aspectos: o ***geométrico*** e o ***numérico***. Talvez também tenha lhe faltado equacionar o problema. Isto é: escolher quem será a incógnita - geralmente chamada de **x** - e escrever a equação satisfeita por essa incógnita. A partir daí - sempre deixando claro qual é a pergunta do problema -, basta resolver a equação: quer dizer, "encontrar o **x** do problema", como se costuma dizer.

Quando conseguimos equacionar um problema, vemos claramente o que é conhecido (pela equação) e o que se procura (a incógnita). Assim, o caminho da solução, que leva de uma coisa à outra, muitas vezes salta aos olhos nesse equacionamento. Vejamos no quebra-cabeça.

Equacionando o quebra-cabeça

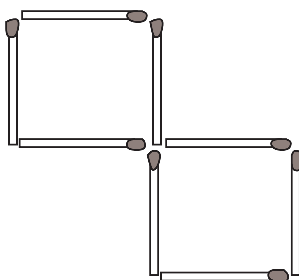
O que vemos na figura dada? Vemos 5 quadrados iguais. Eles estão unidos e são feitos com palitos de fósforo. O problema pede que os 5 quadrados se transformem em 4 quadrados iguais, só com o movimento de 2 palitos.

Que figura formarão, então, os 4 quadrados? Se soubermos isso, será bem mais fácil formar a tal figura... e o problema estará resolvido.

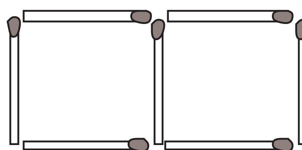
Dois quadrados juntos podem ser formados de um dos seguintes modos:

a) os quadrados ***não têm*** lado (palito) comum; ou
b) os quadrados ***têm*** um lado comum.

Qual a diferença importante no caso de querermos formar uma ou outra destas figuras? Pense.



2 quadrados *com* lado comum



2 quadrados *sem* lado comum

A diferença é numérica: em **a)**, precisamos de 8 palitos; já em **b)**, precisamos de apenas 7 - pois "economizamos" um palito quando os quadrados são vizinhos, tendo um lado comum.

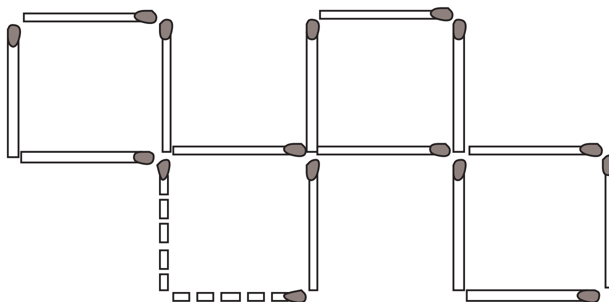
E no nosso caso? Queremos formar 4 quadrados, sem que sobrem palitos. Qual é a pergunta crucial aqui? Pense.

Isso mesmo! A pergunta é: "Quantos palitos temos?"

É só contar: temos 16 palitos. Se cada quadrado possui 4 palitos e queremos formar uma figura com 4 quadrados - desde que não permitamos que dois quadrados sejam vizinhos ("de parede", isto é, de lado comum) - usaremos:

$4 \times 4 = 16$ palitos. Exatamente o que temos!

Algumas tentativas irão lhe mostrar que, desenhando ou fazendo 4 quadrados com 16 palitos, o desenho que devemos procurar formar é este:



Está resolvido. Não lhe parece mais fácil, agora?

Pois então. Tudo teve uma seqüência muito natural, desde o momento em que equacionamos o problema, contando o número de palitos e tentando visualizar claramente o que havia sido pedido - neste caso, a forma da figura dos 4 quadrados.

Equacionando um problema algébrico

Rigorosamente falando, equacionar um problema envolve escrever a equação (ou as equações) de modo que ela expresse em linguagem matemática o que foi dado no problema em linguagem comum.

Vejamos, então, como fazer isso com problemas algébricos, ou melhor, com ***problemas que admitem solução algébrica***.

EXEMPLO 1 

Qual é o número cujo dobro, mais 5, é igual a 17?

Equacione o problema, chamando o número desconhecido de **x**. Vimos que não importa a letra que usamos para designar a incógnita, isto é, o número procurado - mas é universal o uso do **x**. O fato importante é que:

$$2x + 5 = 17$$

A partir daí, acharíamos **x**. (Você pode tentar, se quiser). Só que nesta aula estamos mais interessados no ***equacionamento*** dos problemas - que é a primeira etapa. Geralmente, essa é a etapa mais importante na resolução desses problemas.

Vamos relembrar os momentos fundamentais desse equacionamento.

- Quando encaramos o tal número procurado como a incógnita do problema, e o chamamos de **x**;

- Quando traduzimos em "matematiquês" o que está dado em português, ou seja, quando escrevemos a equação matemática que é satisfeita por essa incógnita. Neste exemplo, faríamos assim:

x = número
O que sabemos: 2x + 5 = 17

Para reconhecer **x**, é só resolver a equação. Encontra-se **x = 6**. Verifique.

Vamos ver outros exemplos de equacionamento de problemas. É interessante que você, em cada caso, experimente responder a estas duas perguntas do equacionamento, antes de continuar a leitura:

a) O que é **x**, neste caso? (Qual é a incógnita?)
b) O que sabemos sobre **x**? (Qual é a equação?)

EXEMPLO 2

Quanto deve medir de lado (em km) um terreno quadrado, para que o número que vai expressar seu perímetro (em km) seja o mesmo que o número que expressa sua área (em km)? Procure a solução!

Em primeiro lugar, vamos responder às duas perguntas principais do equacionamento:

a) **x** = lado

b) O que sabemos: **4x = x**

perímetro (4x) — área (x)

Aqui, vamos lembrar que um número (ou incógnita) ao quadrado é esse número (ou incógnita) multiplicado por ele mesmo. Então:

$$4x = x \cdot x$$

E, logo, adivinhamos um número **x** que satisfaz esta equação. Qual é?

Ora até visualmente fica claro que a expressão 4x = x , acima, é verdadeira quando substituímos **x** por 4, pois temos:

$$4 \cdot 4 = 4 \cdot 4$$

Portanto, se o lado do terreno quadrado for 4 quilômetros, satisfará o que é pedido.

Uma observação importante: a equação 4 x = x é uma equação de 2º grau. Por isso, (como recordaremos) deve ter outra raiz, ou seja, outro número para substituir o **x**. A outra raiz é zero, pois zero vezes qualquer número é zero. Mas, neste caso, o terreno teria lado nulo, quer dizer, não existiria. (Dizemos que, neste caso, x = 0 é uma ***solução degenerada***).

EXEMPLO 3

- Qual o número cuja metade é a sexta parte de 42? E de 21?
- E qual o número cuja metade é a sexta parte de seu triplo?

A primeira pergunta é equacionada assim:

x = número

O que sabemos: $\frac{x}{2} = \frac{\cancel{42}^{\,7}}{\cancel{6}_{\,1}}$

A partir daí fica fácil: multiplicando os dois lados por 2, teremos **x** = 14.

A segunda pergunta é equacionada assim:

x = número

O que sabemos: $\frac{x}{2} = \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}$

Logo, multiplicando os dois lados por 2, temos **x** = 7.

Já a terceira pergunta é bem diferente:

x = número

O que sabemos: $\frac{x}{2} = \frac{3x}{6}$ **isto é, x = x**

Você pode dar exemplo de um número que pode substituir **x** e fazer a sentença ser verdadeira? Pense.

Claro: qualquer número serve! Pois **x = x** é verdadeiro para todo **x**, já que todo número é igual a si mesmo.

Assim, **x = x** não é propriamente uma equação. Dizemos que é uma ***identidade***, pois é verdadeira para todo **x**.

EXEMPLO 4

O marcador de gasolina do meu automóvel apresenta um erro e desejo conhecê-lo. Assim, poderei compensá-lo nas próximas leituras do marcador. Há pouco ele marcava 3/4 do tanque, e precisei de 10 litros para enchê-lo completamente. A capacidade do tanque é de 50 litros. Qual o erro percentual que o marcador apresenta? Para mais ou para menos?

Qual deve ser a incógnita nesse problema: você diria que é o erro percentual procurado (quer dizer, quantos por cento do tanque)?

O primeiro cuidado do equacionamento é a escolha da incógnita, do **x**. Só é preciso bom-senso para se fazer essa escolha: por exemplo, **x** deve ser tal que saibamos **logo** usá-lo para escrever a equação do problema.

Assim, é mais razoável fazer da seguinte maneira:

x = Volume que havia no tanque (litros)

O que sabemos: x + 10 = 50

Logo, x = 40.

O que queremos saber:

- **erro = ?**
- **erro percentual = ?%**

Mas o volume que o tanque marcava era:

$$\frac{3}{4} \times 50 = 37,5$$

Assim:

$$\text{erro} = 40 - 37,5 = 2,5 \ \text{(em 40 litros)}$$

Finalmente, em termos de erro percentual, precisamos fazer uma ***regra de três***, procurando o erro não em 40, mas em 100 litros.

$$2,5 \ — \ 40$$

$$y \ — \ 100$$

Daí,

$$\frac{2,5}{y} = \frac{40}{100}$$

Então, multiplicando os dois lados por 100 y, temos:

$$(2,5) \cdot (100) = 40\,y$$

Logo, dividindo por 40 e trocando os lados, temos que

$$y = \frac{250}{40} = 6,25 \quad \text{(em 100 litros)}$$

Concluímos que o erro percentual apresentado pelo marcador é de 6,25 litros em 100 litros, ou seja, **6, 25%** para menos, pois ele marca menos do que devia.

Nesta página e nas seguintes estão alguns problemas para você equacionar, sem necessariamente resolvê-los.

Lembre-se dos dois pontos importantes do equacionamento! "Quais"?! É hora de revisão da aula...

Exercícios

Exercício 1

Considere o seguinte problema: Subtraindo-se 4 de certo número e dividindo-se esse resultado por 2 e, depois, somando-se este novo resultado ao triplo daquele número, sabemos que o resultado é igual a $\frac{4}{5}$ do número mais 7. Qual é o número?

a) Qual é a incógnita?

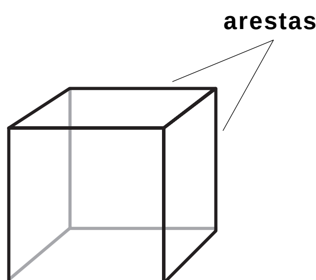
b) Que equação ela satisfaz?

c) O que o problema pede?

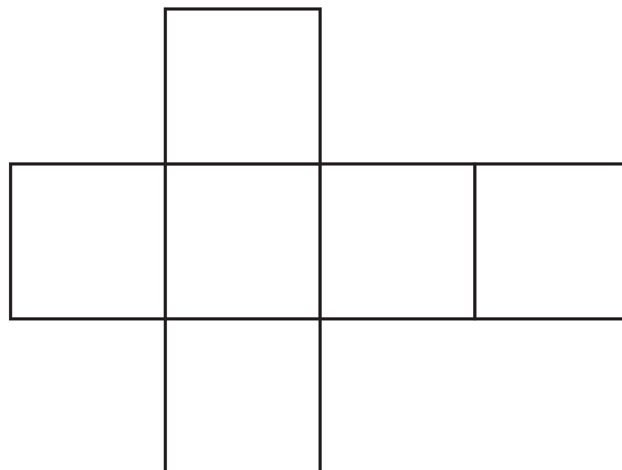
(Atenção: O exercício não pede para resolver o problema. Faça-o se quiser.)

Exercício 2

a) Faça o mesmo com este problema, parecido com o **Exemplo 2**, visto na aula. Quanto deve medir a aresta (em m) de um cubo, para que o número que expressa a área (em m) da superfície lateral total do cubo (formada pelos 6 quadrados que o limitam) seja um número igual ao de seu volume (em m)?



cubo



superfície lateral do cubo

b) Olhando para sua equação, que palpite você arriscaria para o tamanho da aresta procurada?

Exercício 3

a) Equacione o seguinte problema. A idade de um pai é o triplo da idade de seu filho e, ao mesmo tempo, o filho é 22 anos mais jovem que o pai. Quais as idades deles?
Cuidado: há duas incógnitas! (Chame-as de **x** e **y**). E há também duas equações.

b) Observando atentamente as suas duas equações, você consegue descobrir **x** e **y**? (Pense na diferença entre as idades, vendo-a de dois modos.)

Exercício 4

a) Resolva o item **a)** do exercício anterior chamando as incógnitas de **p** e **f**. Compare as equações com aquelas equações anteriores: o que poderíamos dizer dos valores dessas incógnitas?

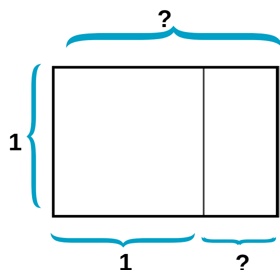
b) Que letras você prefere para as incógnitas, neste problema? Por quê?

Exercício 5

Equacione este problema, que trata do famoso ***retângulo áureo***.

O lado menor de um retângulo mede 1 m, e o lado maior é desconhecido. Queremos que esse lado maior seja tal que, quando retirarmos um quadrado de lado 1 m do retângulo, sobre uma retângulo semelhante ao retângulo grande - isto é, do mesmo formato que o retângulo grande, com os lados respectivamente proporcionais aos dele.

O retângulo áureo é igual a um quadrado unido a outro retângulo áureo menor (é importante na natureza, nas artes e na matemática).



Sugestão: Chame de **x** a maior - ou a menor - das duas medidas desconhecidas, na figura. Agora interprete a proporcionalidade entre os lados do retângulo grande e do pequeno em termos de uma equação em **x**.

Atenção: A equação é de 2º grau. Deixe a resolução para o momento em que estiver relembrado esse assunto, em aulas futuras.

AULA

6

Resolvendo equações

Introdução

À medida que os problemas se tornam mais complicados, o método algébrico vai se impondo naturalmente ao método aritmético. Resolver equações fará parte das nossas atividades diárias. Mas, o que significa resolver uma equação? Tomemos como exemplo esta equação:

$$\frac{x+4}{2} = 2(x - 3) - 1$$

Não importa de que problema ela tenha vindo. Desejamos, antes de mais nada, responder à pergunta que fizemos.

Resolver uma equação significa encontrar um número tal que, se for colocado no lugar da letra **x**, torna a igualdade correta. Veja o que acontece se substituímos **x** por 2.

$$\frac{x+4}{2} = 2(2 - 3) - 1$$

$$3 = -3 \longrightarrow \text{errado!}$$

Logo, **x = 2** não é solução da nossa equação. Veja agora o que acontece se substituímos **x** por 6.

$$\frac{6+4}{2} = 2(6 - 3) - 1$$

$$5 = 5 \longrightarrow \text{certo!}$$

Portanto, **x = 6** é ***solução*** da nossa equação. Dizemos também que **x = 6** é ***raiz*** da equação dada.

É importante saber que **x = 6** é a ***única*** solução da equação do nosso exemplo. Você pode tentar substituir **x** por outros números; mas fique certo de que jamais encontrará outras igualdades corretas.

As equações que aprenderemos a resolver nesta aula são chamadas de ***equações do primeiro grau***, ou seja, são equações em que a letra **x** não aparece elevada a nenhum expoente. Um fato importante relativo às equações de 1º grau é que:

Toda equação de 1º grau possui uma solução.

Inicialmente, vamos aprender a resolver equações do 1º grau. Não nos importará, portanto, de quais problemas elas vieram.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Resolva a equação $2x + 3(x - 2) = 7x - 34$.

Neste primeiro exemplo, não há denominadores. Então, a primeira coisa a fazer é eliminar os parênteses. Observe que na multiplicação $3(x - 2)$, o número 3 multiplica todos os termos que estão dentro do parênteses, ou seja:

$$3(x - 2) = 3x - 3 \cdot 2$$

Voltemos, então, à equação dada.

$$\begin{aligned} 2x + 3(x - 2) &= 7x - 34 \\ 2x + 3x - 3 \cdot 2 &= 7x - 34 \\ 2x + 3x - 6 &= 7x - 34 \end{aligned}$$

Agora, todos os termos que contêm a letra **x** devem ser transportados para o lado esquerdo. Observe, então, a mudança do sinal dos termos que trocaram de lado.

$$2x + 3x - 7x = 6 - 34$$

Continuamos fazendo as contas:

$2 + 3 - 7 = -2$ do lado esquerdo e
$6 - 34 = 28$ do lado direito.

Temos então:

$$-2x = -28$$

É conveniente trocar os sinais dos dois lados:

$$2x = 28$$

e dividir os dois membros por 2 para obter o valor de **x**.

$$\frac{2x}{2} = \frac{28}{2}$$

$$x = 14$$

Está resolvida, assim, a nossa equação. Se quisermos conferir se a solução é realmente a que encontramos, devemos substituir **x** por **14** na equação dada.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 14 + 3\,(14 - 2) &= 7 \cdot 14 - 34 \\ 28 + 36 &= 98 - 34 \\ 64 &= 64 \end{aligned}$$

Está certo. A raiz da equação dada é realmente **x = 14**.

EXEMPLO 2

Como resolver a equação abaixo?

$$\frac{x-4}{2} + 3x = \frac{4x}{5} + 7$$

Neste exemplo, a equação possui ***denominadores***.

Portanto, a primeira coisa a fazer, neste caso, é eliminar esses denominadores. Para isso, buscamos um número que seja múltiplo de todos os denominadores e multiplicamos ***todos*** os termos da equação por esse número.

No nosso caso, os denominadores são **2** e **5**. Como 10 é múltiplo de 2 e de 5, vamos multiplicar por 10 todos os termos dessa equação.

$$10 \cdot \frac{(x-4)}{2} + 10 \cdot 3x = 10 \cdot \frac{4x}{5} + 10 \cdot 7$$

Fazemos agora as simplificações:

$$\overset{5}{\cancel{10}} \cdot \frac{(x-4)}{\underset{1}{\cancel{2}}} + 10 \cdot 3x = \overset{2}{\cancel{10}} \cdot \frac{4x}{\underset{1}{\cancel{5}}} + 10 \cdot 7$$

$$5\,(x - 4) + 30x = 8x + 70$$

Agora não há mais denominadores. Logo, podemos resolver essa equação do mesmo modo que fizemos no primeiro exemplo.

$$\begin{aligned} 5x - 20 + 30x &= 8x + 70 \\ 5x + 30x - 8x &= 70 + 20 \\ 27x &= 90 \end{aligned}$$

$$\frac{27x}{27} = \frac{90}{27}$$

$$x = \frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 9}$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Portanto, a solução da equação dada é $x = \frac{10}{3}$

Vamos agora resolver alguns problemas com o auxílio da álgebra.

Em cada um deles vamos tentar, a partir do enunciado, obter uma equação e, em seguida, resolvê-la.

EXEMPLO 3

Um feirante levou 60 mamões para vender na feira. Começou vendendo cada um por 50 centavos. Depois, como a venda estava fraca, baixou o preço para 30 centavos e vendeu todos os outros. Sabendo que ele arrecadou R$ 22,80, quantos mamões ele vendeu pelo preço mais caro?

Digamos que seja **x** o número de mamões que ele vendeu pelo preço mais caro. Como cada uma dessas frutas foi vendida por R$ 0,50 então, na primeira parte da venda ele arrecadou $0{,}50 \cdot x$.

Quantos mamões sobraram?

Se ele tinha inicialmente 60 mamões e vendeu **x** mamões, então sobraram **60 – x mamões**. Como cada um deles foi vendido por R$ 0,30, então, na segunda parte da venda o feirante arrecadou $0{,}30\,(60 - x)$.

Se ele arrecadou no total R$ 22,80, nossa equação é:

$$0{,}50 \cdot x + 0{,}30\,(60 - x) = 22{,}80$$

Vamos agora resolver essa equação. Observe inicialmente que, na parte decimal de um número, o zero colocado à direita pode ser dispensado. Ficamos então com:

$$0{,}5 \cdot x + 0{,}3\,(60 - x) = 22{,}8$$

Para evitar trabalhar com decimais, multiplicamos todos os termos da equação por 10.

$$5x + 3\,(60 - x) = 228$$

Agora fica fácil:

$$\begin{aligned} 5x + 3 \cdot 60 - 3x &= 228 \\ 5x + 180 - 3x &= 228 \\ 5x - 3x = 228 &= 180 \\ 2x &= 48 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{48}{2} \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Portanto, o feirante vendeu 24 mamões pelo preço mais caro.

EXEMPLO 4

Uma caixa com 30 lápis custa R$ 4,80. Quanto deverá custar uma outra com 40 lápis?

Este é um problema de regra de três. Problemas como esse são muito freqüentes em nossa vida. Observe como organizamos os dados no quadro montado abaixo.

preço	—>	4,80	x
quantidade	—>	30	40

Para resolver o problema, montamos a equação

$$\frac{4,80}{30} = \frac{x}{40}$$

Por que fazemos isso? É simples. Vamos pensar no significado de cada fração. Repare que, dividindo o preço da caixa pela quantidade de lápis, estamos calculando ***quanto custa cada lápis***. Se o preço de um lápis é o mesmo nas duas caixas, as duas frações devem ser ***iguais***. Resolver essa equação é fácil. Basta multiplicar por 40 os dois lados.

$$40 \cdot \frac{4,80}{30} = 40 \cdot \frac{x}{40}$$

Daí,

$$x = \frac{40 \cdot 4,80}{30} = 6,4$$

Logo, a caixa maior ***deverá*** custar **R$ 6,40**.

Comentário: freqüentemente, encontramos no mercado um mesmo produto em embalagens diferentes e com preços diferentes. Nesse caso, é preciso saber qual das embalagens é mais econômica.

Por exemplo, se uma caixa com 30 lápis custa R$ 4,80 e outra com 40 lápis custa R$ 6,10, o problema que acabamos de resolver nos mostra que devemos preferir a segunda. Na caixa maior, o preço de cada lápis é certamente menor.

EXEMPLO 5

João recebeu seu salário e verificou que:

- a quarta parte do dinheiro ele gastou com aluguel e pagamento das contas;
- a terça parte gastou no supermercado;
- restaram-lhe R$ 100,00 para todas as outras despesas.

Qual é o salário de João?

Vamos chamar de **x** o salário de João. Agora, vamos somar o que ele pode gastar com outras despesas. Essa soma é o salário de João. Então:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 100 = x$$

Para resolver essa equação, vamos eliminar os denominadores, multiplicando todos os termos por 12.

$$12 \cdot \frac{x}{4} + 12 \cdot \frac{x}{3} + 12 \cdot 100 = 12 \cdot x$$

Simplificando, temos:

$$3x + 4x + 1200 = 12x$$

Passando todos os termos que contêm **x** para um mesmo lado, ficamos com:

$$1200 = 12x - 3x - 4x$$
$$1200 = 12x - 7x$$
$$1200 = 5x$$
$$5x = 1200$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{1200}{5}$$
$$x = 240$$

Concluímos que o salário de João é de **R$ 240,00**.

Observe agora o próximo exemplo para aprender algo diferente sobre as equações.

EXEMPLO 6 

Antônio, Bruno e Carlos são irmãos. Sabe-se que Bruno é dois anos mais velho que Antonio e que Carlos é três anos mais velho que Bruno. Se a soma das idades de Antonio e Carlos é o dobro da idade de Bruno, calcule as idades dos 3 irmãos.

Vamos chamar de **x** a idade de Antônio. Como Bruno é 2 anos mais velho, a sua idade será $x + 2$. E já que Carlos é três anos mais velho que Bruno, a idade de Carlos será $x + 2 + 3 = x + 5$. Resumindo:

Antônio	Bruno	Carlos
x	$x + 2$	$x + 5$

Como a soma das idades de Antônio e Carlos é o dobro da idade de Bruno, temos a seguinte equação:

$$x + x + 5 = 2(x + 2)$$

Vamos resolver como já aprendemos

$$x + x + 5 = 2x + 4$$
$$5 - 4 = 2x - x - x$$
$$1 = 0$$

Mas isto é um absurdo! Certamente que 1 não é igual a zero. Qual é o significado do que aconteceu?

Vamos explicar. Chegamos à equação:

$$5 - 4 = 2x - x - x$$

que é equivalente a

$$1 = (2 - 1 - 1)x$$

ou, ainda,

$$1 = 0 \cdot x$$

Essa é uma equação ***impossível***, uma vez que não existe nenhum valor para **x** que torne a igualdade verdadeira. Isso quer dizer que o problema proposto é impossível, ou seja, ***nunca*** a soma das idades de Antônio e Carlos será o dobro da idade de Bruno.

É importante saber que muitos problemas não possuem solução. Dizemos então que são problemas impossíveis, isto é, que a situação apresentada por eles nunca ocorrerá.

Exercícios

Exercício 1

Resolva as equações abaixo:

a) $3x + 4 = 25$

b) $5(x - 1) - 19 = 3(x - 2)$

c) $\frac{2x}{3} + \frac{x - 2}{6} = 8$

d) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 1$

Exercício 2

A soma de um número com o dobro do consecutivo dele dá 74. Qual é esse número?

Exercício 3

Antônio, Bruno e Carlos são irmãos. Sabe-se que Bruno é 2 anos mais velho que Antônio e que Carlos é 3 anos mais velho que Bruno. Se a soma das idades dos três irmãos é 55, calcule as idades de cada um deles.

Exercício 4

Em certo mercado, uma caixa com uma dúzia de ovos custa R$ 2,80 e uma outra com 18 ovos custa R$ 4,00. Qual das duas embalagens é mais econômica?

Exercício 5

Cada banco de um ônibus possui dois lugares. Entraram 50 passageiros nesse ônibus, mas 14 tiveram de viajar em pé. Quantos bancos tem o ônibus?

Exercício 6

Pai e filho têm 31 e 8 anos. Daqui a quantos anos o pai terá o dobro da idade do filho?

Exercício 7

Uma escola tem apenas turmas de 5ª, 6ª e 7ª séries. A metade dos alunos está na 5ª série. A terça parte dos alunos está na 6ª série e 32 alunos estão na 7ª série. Quantos alunos tem a escola?

Exercício 8

Maria saiu de casa com algum dinheiro. Comprou uma camiseta por R$ 6,00 e gastou a quarta parte do restante num lanche. Se Maria voltou para casa com metade do dinheiro que tinha, calcule que quantia ela levava quando saiu de casa.

AULA

7

A álgebra nas profissões

Introdução

Nesta aula, você vai perceber que, em diversas profissões e atividades, surgem problemas que podem ser resolvidos com o auxílio da álgebra. Alguns problemas são tão freqüentes que existem fórmulas prontas para sua rápida resolução. Outros, por não serem tão freqüentes, vão necessitar de maior raciocínio e criatividade. Mas, em todos eles, você poderá perceber a força dessa nova ferramenta que é a ***álgebra***.

Nossa aula

A álgebra na medicina

Na medicina, os médicos utilizam muitas fórmulas matemáticas. Principalmente para calcular as quantidades certas de remédios que devem ser dados aos doentes e para outros cálculos. São fórmulas que não podemos entender porque não somos médicos. Mas existem algumas que são simples e úteis para todos, como esta que vamos mostrar agora.

EXEMPLO 1

Como calcular a altura de uma criança?

A altura de uma criança depende de sua idade e de muitos outros fatores. Entretanto, os médicos examinaram uma quantidade muito grande de crianças brasileiras e tiraram uma média (no exercício 1 vamos lembrar o que é isso). Essa pesquisa deu origem a uma fórmula que você mesmo pode usar para verificar o desenvolvimento dos seus filhos. A fórmula - que vale para crianças de 4 a 13 anos - é a seguinte:

$$y = 5,7 \cdot x + 81,5$$

Nessa fórmula:

- **x** é a idade da criança (em anos)
- **y** é a altura da criança (em centímetros)

Por exemplo, se uma criança tem 5 anos podemos calcular sua altura, substituindo o **x** da fórmula por 5.

Veja:

$$y = 5{,}7 \cdot 5 + 81{,}5$$
$$y = 28{,}5 + 81{,}5$$
$$y = 110 \text{ cm}$$

O resultado indica que, em geral, as crianças de 5 anos devem estar medindo por volta de 110 cm de altura. Em geral, como o desenvolvimento da criança depende de outros fatores, como a altura dos pais, a alimentação etc., são consideradas crianças normais as que tiverem altura até 10 cm a mais ou a menos que o valor dado pela fórmula.

Para você saber mais

Cada criança tem seu jeito de crescer. Em geral, as meninas crescem de forma muito próxima aos valores dados pela fórmula. Já os meninos crescem um pouco menos dos 10 aos 12 anos e passam a crescer mais depois dos 12 anos.

Com a fórmula que apresentamos, você pode fazer previsões Suponha que uma menina tenha 115 cm de altura aos 5 anos. Essa criança tem, portanto, 5 cm a mais que o valor dado pela fórmula. Se tudo correr normalmente, essa diferença deve se manter (ou até aumentar um pouco) ao longo dos anos. Assim, se você quiser saber que altura ela terá aos 10 anos, aplique a fórmula e acrescente esses 5 centímetros.

A álgebra em uma pequena empresa

Mesmo em pequenas empresas surgem freqüentemente problemas relacionados com a produção, com os custos, com os investimentos, com a divisão dos lucros etc. Vamos mostrar um deles e sua solução, com o auxílio da álgebra.

EXEMPLO 2

Como fazer uma divisão proporcional?

Em uma confecção trabalham 16 costureiras, 2 supervisoras e 1 diretora. Cada supervisora ganha 25% a mais que uma costureira, e a diretora ganha 50% a mais que uma costureira. Todos os meses, uma pequena parte do faturamento é colocada numa poupança para ser distribuída no fim do ano. É a "caixinha do Natal". Pois bem, no fim do ano, essa poupança tinha R$ 1.440,00. Como deveremos fazer a distribuição dessa caixinha mantendo-se a mesma proporção dos salários?

Temos aqui uma excelente oportunidade para usarmos a álgebra. Como já vimos nas aulas anteriores, é preciso escolher o significado da nossa ***incógnita***.

Vamos então representar com a letra **x** a quantia que cada costureira deverá receber.

Cada supervisora ganha 25% a mais que uma costureira. Portanto, cada uma receberá:

$$x + 25\% \text{ de } x = x + \frac{25}{100} \cdot x$$

$$= x + 0{,}25 \cdot x$$
$$= (1 + 0{,}25)\ x$$
$$= 1{,}25\,x$$

A diretora ganha 50 % a mais que uma costureira. Portanto, ela receberá:

$$x + 50\% \text{ de } x = x + \frac{50}{100} \cdot x$$

$$= x + 0{,}5 \cdot x$$
$$= (1 + 0{,}5)\ x$$
$$= 1{,}5\,x$$

Veja, então, o resumo no quadro abaixo.

16 costureiras	→	$16 \cdot x$
2 supervisoras	→	$2 \cdot 1{,}25 \cdot x$
1 diretora	→	$1{,}5 \cdot x$

Vamos somar tudo e igualar o resultado ao total da poupança:

$$16 \cdot x + 2 \cdot 1{,}25 \cdot x + 1{,}5x = 1440$$

Para encontrar o valor de **x** basta, então, resolver essa equação. Observe:

$$16x + 2{,}5x + 1{,}5x = 1440$$
$$(16 + 2{,}5 + 1{,}5)\,x = 1440 \qquad (\mathbf{x} \text{ em evidência})$$
$$20x = 1440$$
$$\frac{20x}{20} = \frac{1440}{20} \qquad (\text{dividindo por } 20)$$
$$x = 72$$

Portanto, cada costureira deverá receber R$ 72,00. O resto é fácil.

$$1{,}25 \cdot x = 1{,}25 \cdot 72 = 90$$
$$1{,}5 \cdot x = 1{,}5 \cdot 72 = 108$$

Assim, cada supervisora deverá receber R$ 90,00 e a diretora, R$ 108,00. Foi feita então a ***divisão proporcional*** da caixinha do Natal.

A álgebra na carpintaria

Será que a álgebra tem vez em uma simples carpintaria?

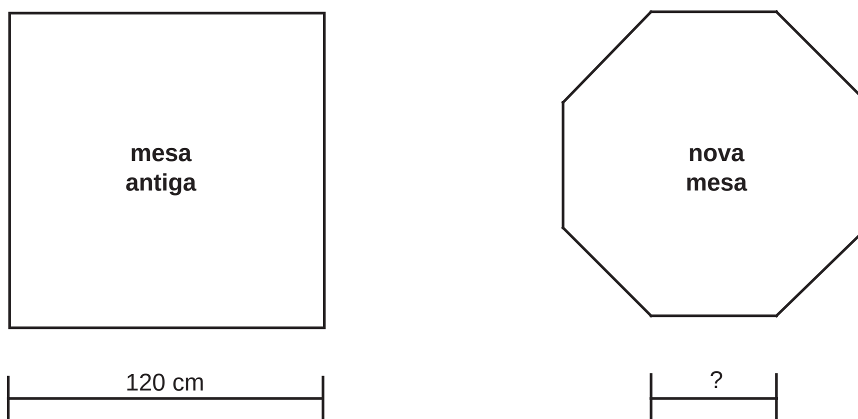
Tem sim. Existem problemas que o marceneiro pode resolver de forma muito eficiente com auxílio da álgebra. Vamos ver um deles.

EXEMPLO 3

O corte está no lugar certo?

Certo dia, um marceneiro recebeu a seguinte tarefa: cortar os cantos de uma mesa quadrada, que tinha 120 cm de lado, para transformá-la em uma outra com ***8 lados iguais***.

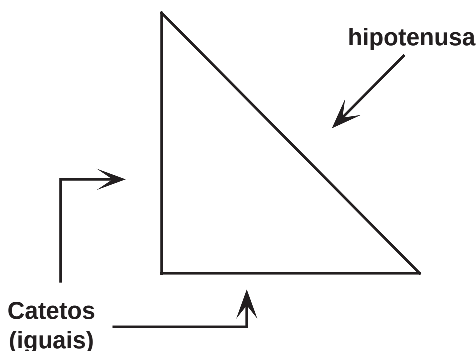
Observe, nas figuras abaixo, o problema do marceneiro.



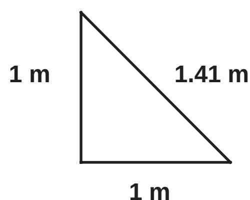
Repare que o problema de transformar a mesa quadrada em outra, com 8 lados iguais, não é um problema fácil. Os cortes precisam ser feitos em lugares certos. Se não, o marceneiro corre o risco de estragar a mesa. Como fazer, então, os cortes perfeitos?

Acompanhe o raciocínio do marceneiro e, mais uma vez, a utilidade da álgebra.

As partes que serão eliminadas da mesa quadrada são triângulos retângulos com dois lados iguais. Eles se chamam ***catetos***. O lado maior, onde será feito o corte, chama-se ***hipotenusa***.



Para observar direito esse triângulo, ele fez um desenho grande de um triângulo desse tipo, com catetos de 1 m de comprimento, e mediu a hipotenusa.

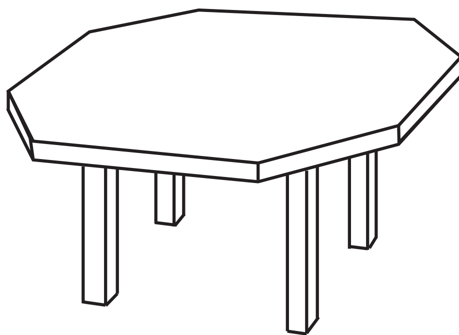


O valor que ele encontrou para a hipotenusa foi ***1 metro e 41 centímetros*** (este valor não é exato, porém é bem aproximado).

O marceneiro sabia que, para aumentar ou diminuir o tamanho de uma figura, mantendo sua forma, basta multiplicar ***todos*** os comprimentos dessa figura por um mesmo número. Por exemplo, um triângulo 10 vezes maior que o da figura que o marceneiro fez terá lados de 10 m, 10 m e 14,1 m.

Ele, então, raciocinou corretamente colocando a letra **x** como a medida dos catetos dos triângulos que serão retirados. Assim, a medida da hipotenusa desses triângulos será **1,41x**.

Veja como ficou o projeto da nova mesa.



Na mesa de 8 lados, todos eles devem ser iguais. Portanto, a medida de cada um deles será 1,41x.

Agora, basta somar os comprimentos sobre um lado do quadrado antigo.

$$x + 1{,}41x + x = 120$$

Agora, vamos envolver essa equação.

$$2x + 1{,}41x = 120$$

$$3{,}41x = 120$$

$$\frac{3{,}41x}{3{,}41} = \frac{120}{3{,}41}$$

$$x = 35{,}19$$

Concluímos, então, que cada cateto dos triângulos que serão retirados mede, aproximadamente, 35,2 cm. O problema está resolvido. A partir de cada canto da mesa, o marceneiro vai medir comprimentos de 35,2 cm, e passar a serra nas hipotenusas dos triângulos formados.

A mesa ficará com 8 lados iguais. E qual será a medida de cada lado da nova mesa?

Cada lado da nova mesa mede 1,41x, ou seja, $1{,}41 \cdot 35{,}2$, o que dá 49,6 cm. Quase 50 cm de lado.

Como você percebeu, a álgebra foi utilizada para resolver problemas muito diferentes. Mas não se esqueça: ela é apenas uma ferramenta. O mais importante é sempre o raciocínio.
A habilidade de resolver problemas se desenvolve aos poucos. Com a prática. Com persistência.

Exercícios

Tente resolver os exercícios desta aula. Se você não conseguir, deixe passar alguns dias e tente de novo. Exercitar o pensamento desenvolve a nossa mente e faz com que os problemas, com o passar do tempo, pareçam mais fáceis.

Exercício 1

Um pediatra anotou as alturas das meninas de 8 anos que foram ao seu consultório em determinada semana:

125 cm, 128 cm, 130 cm, 123 cm, 132 cm e 126 cm

a) Qual a altura média dessas crianças?
b) Qual o valor fornecido pela fórmula das alturas das crianças?

Observação: A média de vários números é igual à soma desses números dividida pela quantidade de números dados.

Exercício 2

Uma construtora encomendou tábuas de pinho a 4 fornecedores diferentes. O primeiro entregou tábuas com 225 cm de comprimento; o segundo com 236 cm, o terceiro com 230 cm e o quarto com ..... cm. O mestre de obras calculou que a média dos comprimentos das tábuas era de 231 cm. Qual foi o comprimento das tábuas entregues pelo quarto fornecedor?

Sugestão: Represente por **x** o comprimento das tábuas do quarto fornecedor e calcule a média dos quatro comprimentos.

Exercício 3

Você certamente já reparou que os calçados são medidos por números: 35, 36 e 37 para as mulheres e 39, 40 e 41 para a maioria dos homens. Mas, existem, é claro, pés maiores.

O número do sapato depende do comprimento do pé, e a fórmula para calcular o número do calçado é a seguinte:

$$N = \frac{5c + 28}{4}$$

onde:
N é o número do sapato
c é o comprimento do pé, em centímetros

a) Que número calça uma pessoa cujo pé mede 24 cm?

b) Qual é o comprimento do pé de um jogador de basquete que calça 45?

Exercício 4

Na Europa, existem empresas em que o salário mais alto é, no máximo, 4 vezes o salário mais baixo. Vamos imaginar uma empresa dessas e considerar que ela seja formada por operários, técnicos, engenheiros e diretores. Cada técnico ganha o dobro de um operário. Cada engenheiro ganha o triplo de um operário e cada diretor ganha o quádruplo de um operário.

Sabe-se que nessa empresa trabalham 80 operários, 20 técnicos, 4 engenheiros e 2 diretores. Se a folha de pagamento dos salários é de R$ 74.200,00, pergunta-se:

a) Quanto ganha cada operário?
b) Quanto ganha cada diretor?

Sugestão: Represente o salário de cada operário por **x** e complete o quadro abaixo:

1 operário ganha **x** — 80 operários ganham ....
1 técnico ganha .... — 20 técnicos ganham ....
1 engenheiro ganha .... — 4 engenheiros ganham ....
1 diretor ganha .... — 2 diretores ganham ....

Tente descobrir a equação que resolve o problema.

Exercício 5

A cantina de uma escola fez um refresco para as crianças, diluindo 1 litro de suco concentrado de laranja em 9 litros de água. Foram produzidos 10 litros de refresco, no qual 10 % do total é de suco concentrado e 90 % é de água. Como o refresco não ficou bom, resolveu-se acrescentar mais suco concentrado até que o total ficasse com 20 % de suco concentrado.
Pergunta-se: Que quantidade de suco concentrado deve ser adicionada ao refresco?

Sugestão: Observe o quadro abaixo.

	LITROS DE SUCO CONCENTRADO	LITROS DE ÁGUA	TOTAL DE REFRESCO
1º REFRESCO	1	9	10
2º REFRESCO	1 + x	9	10 + x

Agora escreva uma equação que represente o seguinte:

Suco concentrado = 20% do total do refresco

AULA

8

Coordenadas

Introdução

O subtítulo da aula de hoje poderia ser este: "Visualizando relações entre números". E esse assunto nos faz lembrar o matemático francês René Descartes (1596-1650). Foi Descartes quem inventou um jeito de visualizar números e relações entre números, que ficou conhecido como ***plano cartesiano*** - um sistema de eixos coordenados.

Os exemplos que aparecem nesta aula mostrarão como os gráficos no plano cartesiano são simples e naturais e, no entanto, profundos e esclarecedores.

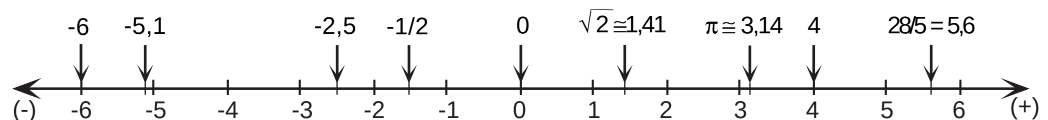
Por enquanto, basta que você se lembre dos gráficos de barras - como aquele que mostra a população do país a cada ano, o seu salário a cada mês, a temperatura de um local a cada hora etc. O plano cartesiano é igualmente fácil, e ainda mais claro visualmente. Vamos a ele!

Nossa aula

Para começar, vamos rever uma conhecida nossa do 1º grau - ***a reta numérica***.

Eis aqui a reta numérica, com alguns números representados nela. Observe as distâncias iguais entre números inteiros consecutivos, como:

- 2, - 1, 0, 1, 2, 3 etc.



A reta numérica é ***completa***: cada um dos seus infinitos pontos representa exatamente um número real, e todos os infinitos números reais têm lugar nela. Ela se estende indefinidamente (ou ilimitadamente) nos dois sentidos da horizontal. E é um eixo orientado: quanto mais à direita, maior o número (ex: 10, 100, 1.000, 10.000 etc.); quanto mais à esquerda, menor (ex: - 10, - 100, - 1000, - 10.000 etc.). Assim, por exemplo: -100 é menor do que -10. Escrevemos:

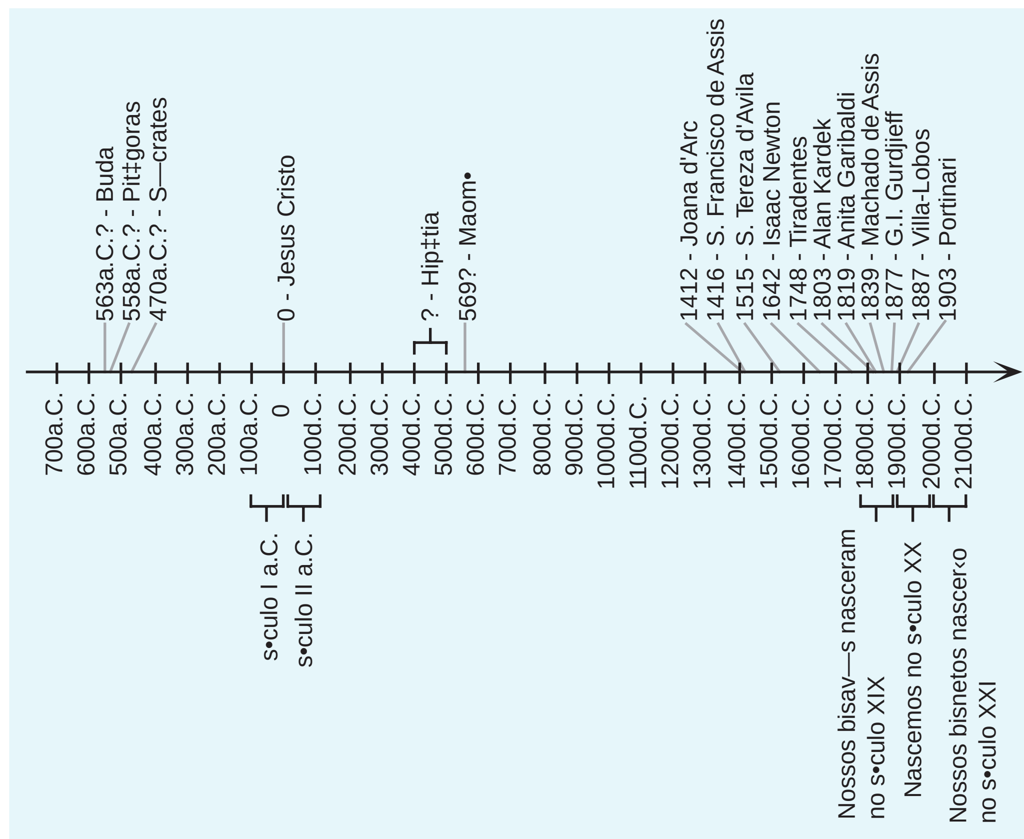
$$-100 < -10$$

Então, - 100 fica à esquerda de - 10. Pode-se dizer também que - 10 é maior do que - 100 e escrever:

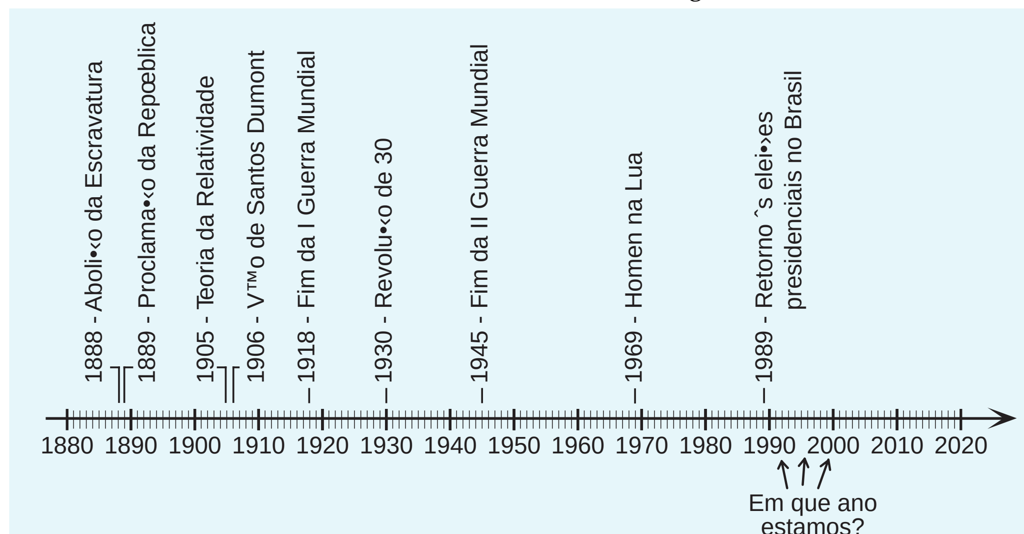
$$-10 > -100$$

Um exemplo de reta numérica: a linha do tempo

A reta numérica tem aplicações práticas muito importantes. Exemplo disso são as linhas do tempo utilizadas em História. Essa reta também pode ser interessante do ponto de vista de nossa própria vida, de nossa história pessoal. Aqui está um trecho dela, dividido em milênios e subdividido em séculos, com exemplos do ano em que nasceram alguns homens e mulheres que ficaram conhecidos, como líderes, cientistas e artistas, entre outros. A linha do tempo nos ajuda a compreender melhor há quanto tempo cada um deles nasceu. Veja:



Vamos agora fazer um "zoom", como se diz em linguagem de computador (ou um "close", em linguagem de fotografia), na reta numérica. Assim podemos visualizar mais de perto (*close*, em inglês) o nosso próprio século XX subdividido em décadas e anos (e seus séculos vizinhos) com alguns acontecimentos:



Você também pode marcar nesta linha do tempo o ano do seu próprio nascimento, e riscar ao longo dela o segmento que corresponde à sua vida até hoje. Por falar nisso: quantos anos você tem? Visualize sua idade nesse segmento. Use outras cores para traçar os "segmentos de vida" de seus familiares. Não fica tudo mais claro com a reta numérica?

Relembrando os gráficos de barras

Vamos relembrar, com o problema que será proposto, o que é um gráfico de barras.

Júlio é um profissional autônomo. Para controlar de perto as finanças familiares, Júlio anota todo mês quanto ganhou e quanto gastou (em reais). Agora ele está analisando a tabela que montou com as anotações de ganhos.

Responda:

a) Em que mês Júlio ganhou mais?
b) Em que mês seu ganho deu maior salto para cima?
c) E para baixo?

MÊS/1994	GANHO (R$)
jan	300
fev	410
mar	540
abr	380
mai	320
jun	500
jul	490
ago	570
set	380
out	430
nov	420
dez	400

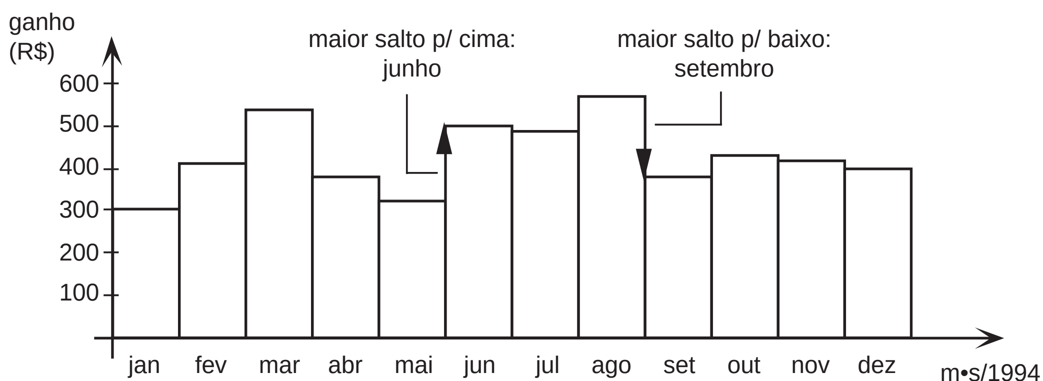
A pergunta do item **a)** é fácil de responder: basta procurar pelo número maior da tabela. (O mês foi agosto: R$ 570,00).

Já os itens **b)** e **c)** não estão com as respostas tão claras. Uma boa sugestão seria ampliar a tabela para incluir também uma coluna com "Diferença em relação ao mês anterior".

Ela começaria com os seguintes dados: fev, 10; mar, 130; abr, - 160 etc.

Continue, e responda **b)** e **c)**.

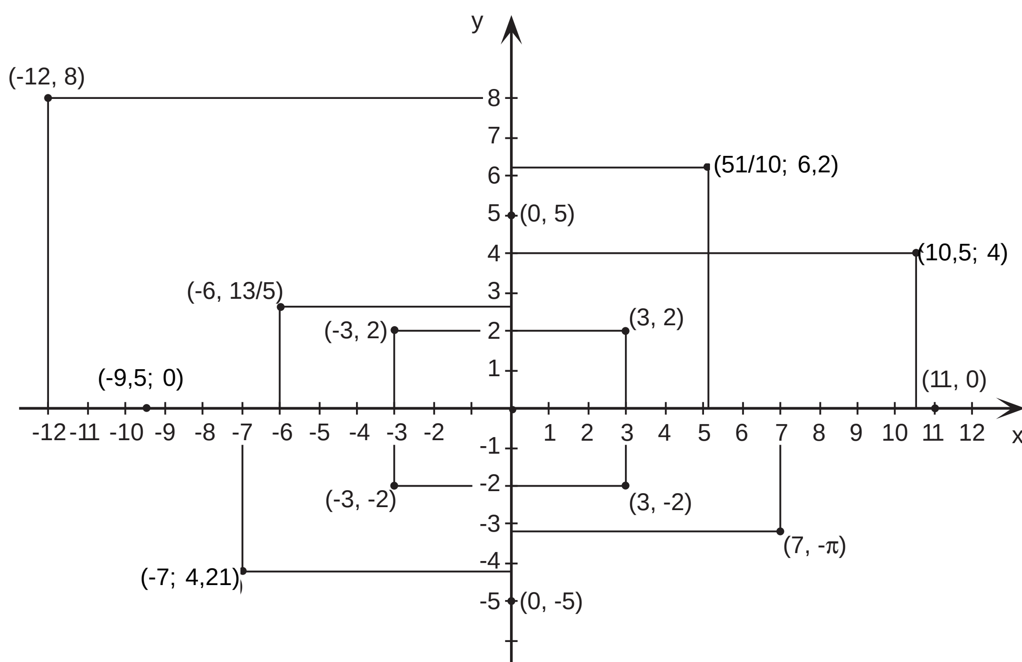
A idéia é fazer um gráfico de barras para que, nele, você visualize as respostas:



Fácil; não é? É por isso que um gráfico tem tanto valor, pois, sem ele, as relações entre os números ficariam bem mais abstratas. Daí a importância da invenção de Descartes, o plano cartesiano. A idéia é igual à de um gráfico de barras, com pequenas mas importantes diferenças: no plano cartesiano, os dois eixos orientados perpendiculares são duas retas numéricas com os dois pontos "0" (zero) superpostos, formando a origem do plano.

O plano cartesiano

Aqui está um exemplo de plano cartesiano, com alguns pontos assinalados. Cada ponto tem duas coordenadas - **x** e **y** - e é simbolizado por (**x, y**); dizemos que **x** é a ***abscissa*** do ponto, e **y** é a ***ordenada***. Se um dos números representados por **x** ou **y** tiver vírgula, podemos separar as duas letras com ponto e vírgula. Exemplo: (2; 1,5).



Para você se certificar de que compreendeu bem como funciona o plano cartesiano, marque nele estes outros pontos :

(7, 3)
(7, 0)
(7, -3)
(-7, 3)
(-11, -3)

Escreva suas coordenadas junto do ponto (como está na ilustração).

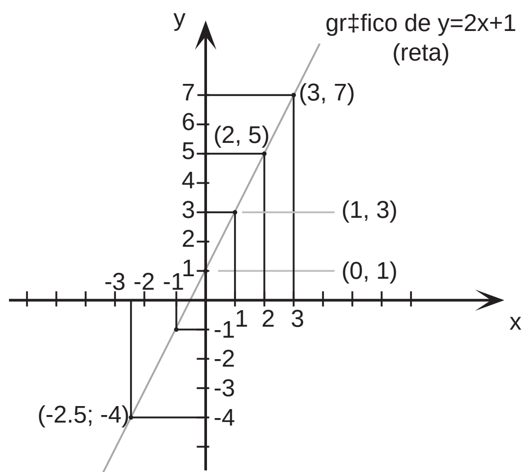
O plano cartesiano é fácil e lógico, não acha? E o melhor está por vir. Quando **x** e **y** não são dois números quaisquer, mas estão ***relacionados*** por alguma fórmula, ou alguma regra, então acontece uma coisa espantosa! Vejamos logo alguns exemplos. E você também concordará conosco que esse invento é mesmo um auxílio e tanto para entender relações entre números.

Dois exemplos de gráficos de relações entre números

Vamos marcar alguns pontos (**x**, **y**) no plano cartesiano, de maneira que **x** e **y** satisfaçam uma relação dada. Para isso, primeiro faremos uma ***tabela*** de valores de **x** e **y**, a partir de alguns exemplos. A primeira relação é esta:

a) $y = 2x + 1$

x	y = 2x + 1
1	3
2	5
3	7
0	1
- 1	- 1
- 2,5	- 4



Quanto mais pontos assinalarmos, maior será nossa certeza: se marcássemos todos os pontos (x, y) = (x, 2x + 1) para todos os valores de **x**, então teríamos desenhado uma reta. Ela é o ***gráfico*** da relação y = 2x + 1, e é formada por todos os pontos (x, y) do plano, tais que y = 2x + 1.

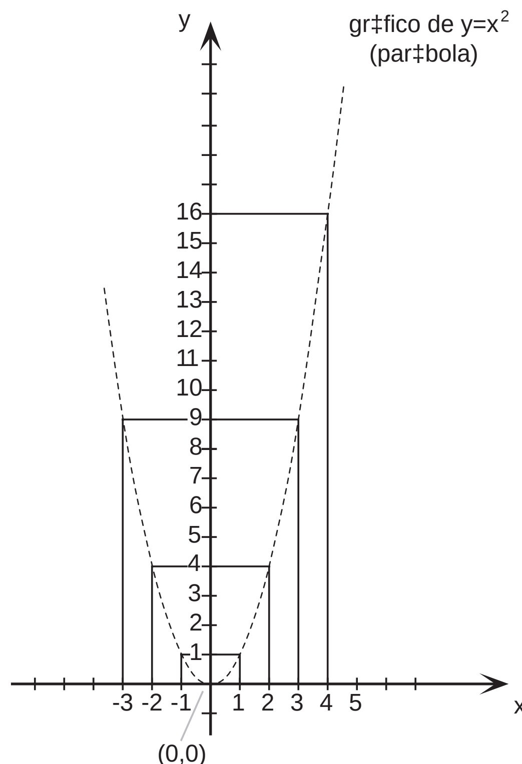
Por exemplo: o ponto (2, 5) está nesta reta, pois 5 = 2 · (2) + 1; já (2, 6) não está, pois 6 ≠ 1 · (2) + 1. Verifique.

Lembrete: em matemática, quando queremos escrever uma igualdade usamos o sinal de igual (=); quando queremos mostrar uma diferença, usamos o sinal de diferente (≠).

Outro exemplo: como será o gráfico dos pontos (x, y), tais que **y** seja o número que mede a área de um terreno quadrado de lado **x**, ou seja, tais que $\mathbf{y = x^2}$?

b) $y = x^2$

x	$y = x^2$
2	4
1	1
0	0
- 1	1
- 2	4
3	9
- 3	9
4	16
2,5	6,25



O gráfico da relação **y = x²** é uma curva importante na geometria e na física: uma ***parábola***. A parábola é, por exemplo, a curva descrita no ar por uma bola chutada, ou qualquer objeto arremessado. Você também já deve ter ouvido falar em antena parabólica: sua forma é derivada da parábola.

Calcule e marque outros pontos da parábola $y = x^2$. Que tal usar números fracionários?

Conclusão

Esses exemplos são suficientes para nos convencer da importância do plano cartesiano: tanto na solução de problemas da vida prática (área de terrenos, salários, gastos etc), quanto no próprio desenvolvimento da matemática. Com o plano cartesiano, Descartes criou a ferramenta visual para o que veio logo depois: o ***cálculo diferencial e integral***. Esse cálculo foi uma verdadeira revolução na matemática, do mesmo modo que foram revolucionárias as suas aplicações em outras ciências, a exemplo da física, da biologia e da astromonia, e também em várias áreas, como em economia e até em psicologia.

Para nós, o plano cartesiano também será de grande auxílio. Vamos nos exercitar nele?

Exercícios

Exercício 1

A figura mostra um joguinho muito popular: a Batalha Naval. Consiste em um tabuleiro quadriculado, no qual a posição de cada quadradinho é dada pelo eixo horizontal, com letras (A, B, C, ...) e, pelo eixo vertical, com números (1, 2, 3, ...).

Aqui estão algumas das peças da Batalha Naval, dadas por seus quadradinhos. Preencha os quadradinhos no quadro à esquerda e veja como são essas peças:

- submarino: E7
- destroyer: G4, G5
- hidroavião: L4, M3, N4
- cruzador: B11, C11, D11, E11
- couraçado: L9, L10, L11, L12, L13

Diga que quadradinhos do quadro à direita estão formando estas peças:

- submarino:
- destroyer:
- hidroavião:
- cruzador:
- couraçado:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1																1																1
2																2																2
3																3																3
4																4																4
5																5																5
6																6																6
7																7																7
8																8																8
9																9																9
10																10																10
11																11																11
12																12																12
13																13																13
14																14																14
15																15																15
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	

No Exercício 2, o gráfico é outra curva importante de geometria: uma **hipérbole**. Por exemplo, a trajetória que um corpo momentaneamente atraído pela Terra descreve no espaço pode ser uma hipérbole, ou mesmo uma parábola. Já a trajetória da Terra em volta do Sol é uma elipse, como descobriu Johannes Kepler (1571-1630).

Exercício 2

Use o plano cartesiano para comparar o tamanho e a forma de todos os terrenos retangulares que têm a mesma área - digamos, de 12 km^2. Ou seja, use o gráfico de todos os pontos (x, y) tais que, se **x** e **y** forem lados de um desses retângulo, então $\mathbf{x \cdot y = 12}$. Ou, dividindo tudo por **x** (que não pode ser zero), então $\mathbf{y = \frac{12}{x}}$.

Faça como nos exemplos vistos: tabela e gráfico em papel quadriculado.

Exercício 3

Quais destes pontos devem pertencer ao gráfico de $\mathbf{y = 2x + 1}$? Por quê?

a) (5, 11)

b) (4, 11)

c) (- 11, - 20)

d) $(\pi,\ 2\pi + 1)$

e) $(-\frac{1}{2};\ 0,1)$

f) (200, 401)

Exercício 4

Quais destes pontos se encontram sobre a parábola $\mathbf{y = x^2}$? Por quê?

a) (- 4, 16)

b) (10, 102)

c) (10, 100)

d) $(\sqrt{2},\ 2)$

e) (7, - 49)

f) (- 7, - 49)

AULA

9

O gráfico que é uma reta

Introdução

Agora que já conhecemos melhor o plano cartesiano e o gráfico de algumas relações entre **x** e **y**, voltemos ao exemplo da aula 8, onde **y = 2x + 1** e cujo gráfico é uma reta.

Queremos saber mais sobre como é essa ligação que existe entre a fórmula **y = 2x + 1** e a figura geométrica da reta. Queremos saber, por exemplo, se outras fórmulas também têm como gráfico uma reta. Caso haja, o que essas fórmulas de retas têm em comum; de que modo se parecem?

É isso que estudaremos hoje. Como você verá, são muitas as situações na vida cotidiana - especialmente nas nossas diversas profissões - em que a relação entre duas grandezas é expressa graficamente por um reta. Veremos isso num exemplo com um automóvel em movimento, na relação entre a distância percorrida e o tempo de percurso. E deixaremos para você aplicar as mesmas idéias na sua própria área de trabalho: na construção civil, na indústria, no comércio, no trabalho em casa etc.

A conclusão da aula é que a Matemática tem uma maneira de visualizar toda uma série de problemas, facilitando imensamente sua resolução.

Nossa aula

Um exemplo tirado do futebol

Talvez você já tenha visto um comentarista de futebol dizer o seguinte, analisando um determinado chute a gol: "*A velocidade da bola era de aproximadamente 90 km/h, quando foi espalmada pelo goleiro.*" O que significa isso? Como se faz essa estimativa de velocidade?

Se um automóvel estivesse a 90 km/h, isso quer dizer que ele percorreria 90 quilômetros de distância no tempo de 1 hora. Possivelmente, a estimativa do comentarista deve ter sido calculada por computador da seguinte maneira: pelo vídeo do chute, é anotado o instante em que o pé do jogador toca a bola e a posição em que ele está no campo; é anotado também o instante em que o goleiro espalma a bola e a posição do goleiro. Assim, obtém-se a ***distância*** que a bola percorreu e o ***tempo*** que levou para isso. O que é a velocidade da bola, então?

Se, para simplificar, considerarmos que a velocidade da bola ***é constante ao longo de toda sua trajetória***, então, por definição:

Velocidade é a distância percorrida dividida pelo tempo de percurso.

Rigorosamente falando, isso não é verdade, pois o atrito do ar diminui a velocidade da bola o tempo todo. Estamos simplificando as coisas.) Em linguagem matemática:

$$\textbf{velocidade} = \frac{\textbf{espaço}}{\textbf{tempo}} \quad \textbf{ou v} = \frac{\textbf{e}}{\textbf{t}}$$

No caso desse chute, a velocidade equivale a 90 km/h. Em metros por segundo (pois as medidas do campo de futebol são em metros e cada chute se dá em frações de segundo), ela é de:

$$v = 90\,km/h = \frac{90km}{1h} = \frac{90 \times 1000m}{3600s} = 25\,m/s$$

40

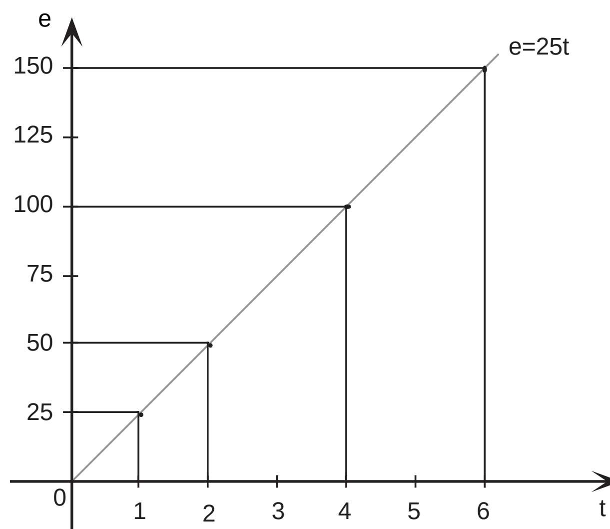
Ou seja, a bola percorre um espaço de ***25 metros a cada segundo***. Ou 50 metros a cada 2 segundos, ou 100 metros a cada 4 segundos, ou 150 metros a cada 6 segundos, e assim por diante.

É fácil visualizar de uma só vez a relação do espaço (**e**) percorrido com o tempo (**t**) de percurso - que neste exemplo é:

$$\frac{e}{t} = 25, \text{ ou } e = 25\,t$$

Para isso, basta construir uma tabela e um gráfico que mostre a maneira como o espaço se relaciona com o tempo:

t	e = 25t
0	0
1	25
2	50
4	100
6	150



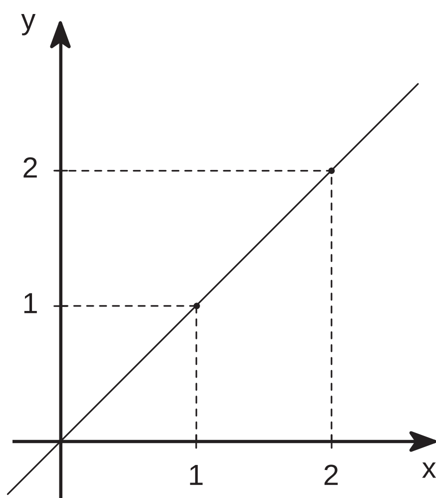
Como vemos, neste caso, temos uma reta que passa pela origem do plano cartesiano. Observe que, nesse exemplo, os eixos do plano cartesiano representam **e** (espaço) e **t** (tempo), que são grandezas diferentes: uma é medida em metros e outra, em segundos, respectivamente. Dessa forma, a marcação dos pontos sobre os eixos pode ser feita também com unidades diferentes. No eixo vertical, cada unidade equivale a 25 metros; enquanto no eixo horizontal cada unidade corresponde a 1 segundo.

O gráfico de y = ax: retas pela origem

Observe os exemplos a seguir:

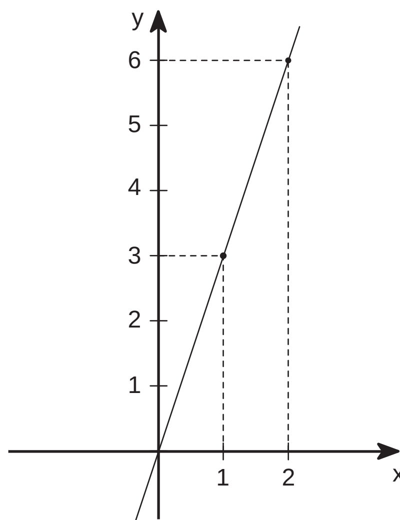
a) $y = x$

x	y
0	0
1	1
2	2



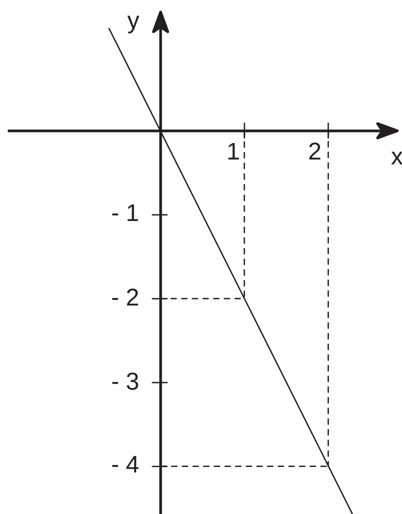
b) $y = 3x$

x	y
0	0
1	3
2	6



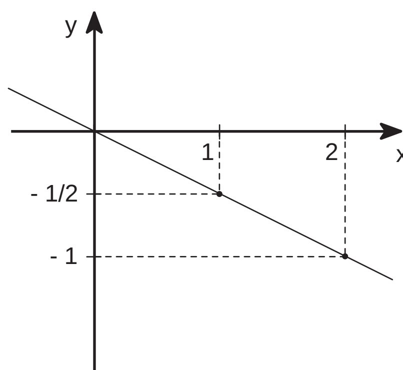
c) $y = -2x$

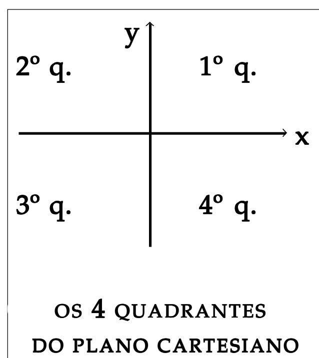
x	y
0	- 0
1	- 2
2	- 4



d) $y = -\frac{1}{2}x$

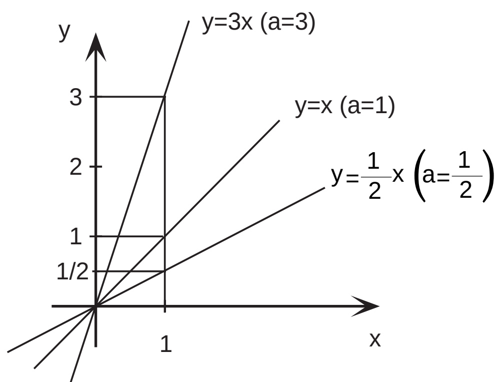
x	y
0	0
1	$-\frac{1}{2}$
2	- 1

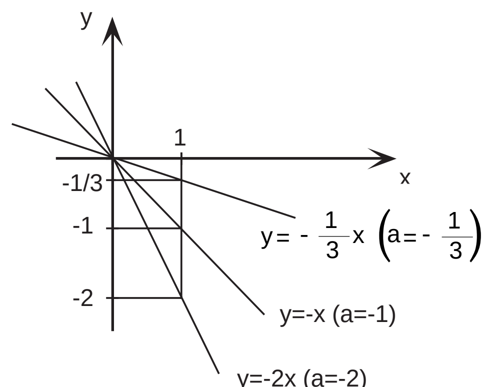




OS 4 QUADRANTES DO PLANO CARTESIANO

Como você mesmo deve ter notado, o gráfico de **y = ax** (no qual **a** é uma constante) é sempre uma reta. Quando **a** é positivo, a reta está no 1º e no 3º quadrantes do plano cartesiano; quando **a** é negativo, a reta está no 2º e no 4º quadrantes. Veja nos exemplos abaixo:





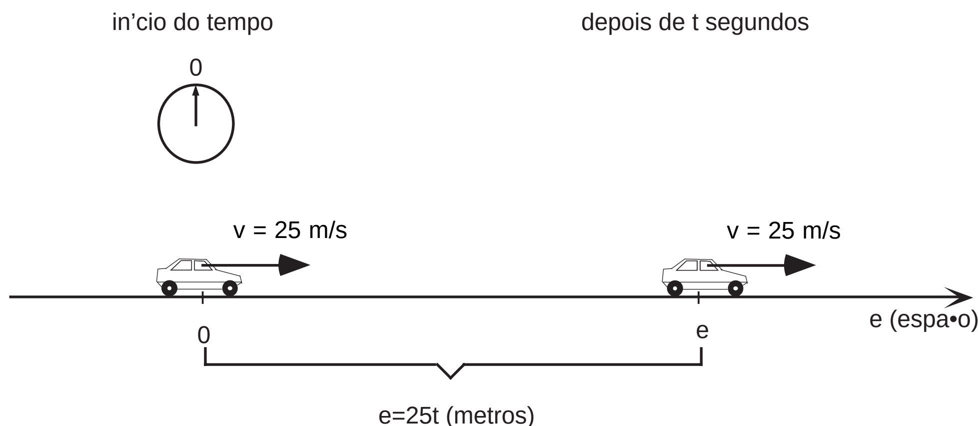
Voltando ao exemplo da velocidade

O gráfico da relação **e = 25 t**, que vimos no início da aula, mostra, para cada instante de tempo **t**, o espaço **e** percorrido pela bola de futebol, desde o início do movimento até o instante **t**.

Você se lembra de que verificamos que:

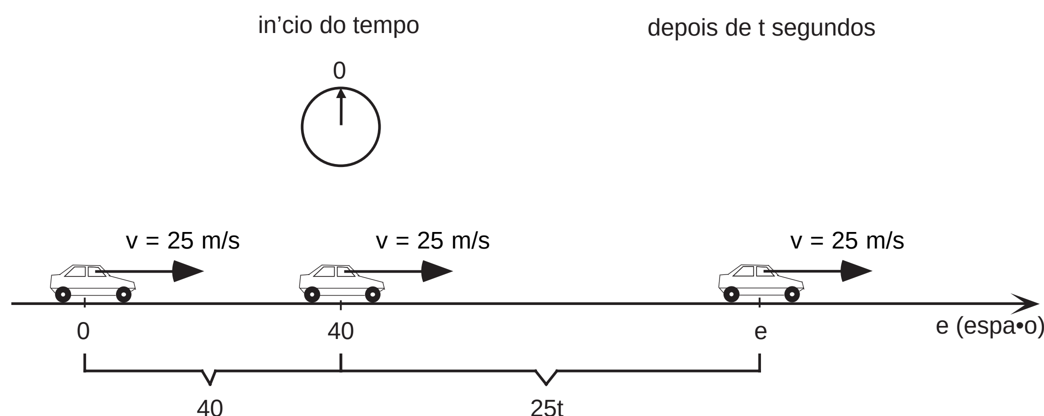
v = 25 m/s é equivalente a **v = 90 km/h**

Imagine agora um carroque se desloca a uma velocidade de **90 km/h**, ou seja, sua velocidade é de **25 m/s**. Na figura abaixo, ilustramos isso, imaginando o eixo **e** como o próprio caminho do carro para ajudar na visualização. Desenhamos no carrouma seta **v**, sempre do mesmo tamanho, para representar sua velocidade constante:



O gráfico da página 64 já falou tudo sobre este exemplo, não é mesmo? Vê-se logo que o carro tinha percorrido 25 metros após 1 segundo do início da contagem do tempo; 50 metros após 2 segundos, 75 metros após 3 segundos etc.

Agora vamos mexer um pouco no exemplo. No total, quantos metros teria percorrido o carro se o cronômetro só tivesse sido disparado para começar a contagem do tempo depois de o carro já haver percorrido 40 metros?



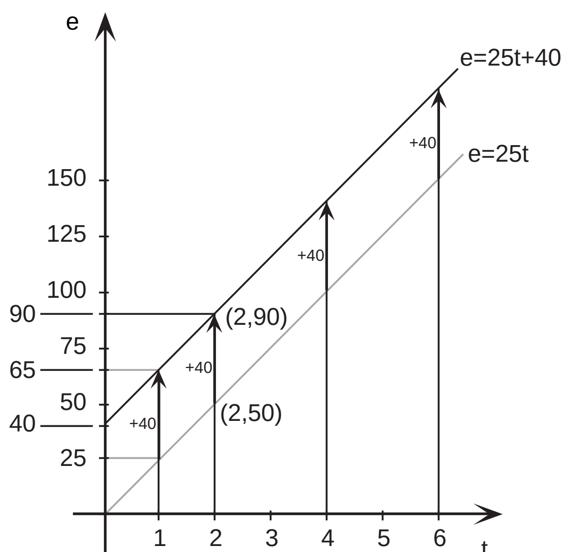
No total, o carro teria percorrido **25t** (como antes) mais **40 metros**. É fácil obter o novo gráfico do espaço percorrido em relação ao tempo, para **e = 25t + 40**. Acompanhe como o espaço inicial, que aqui é de **40 metros**, aparece nas linhas da nova tabela e no gráfico, deslocando a reta anterior para cima em **40 unidades** (40 metros).

TABELA ANTERIOR:

t	e = 25t
0	0
1	25
2	50
4	100
6	150

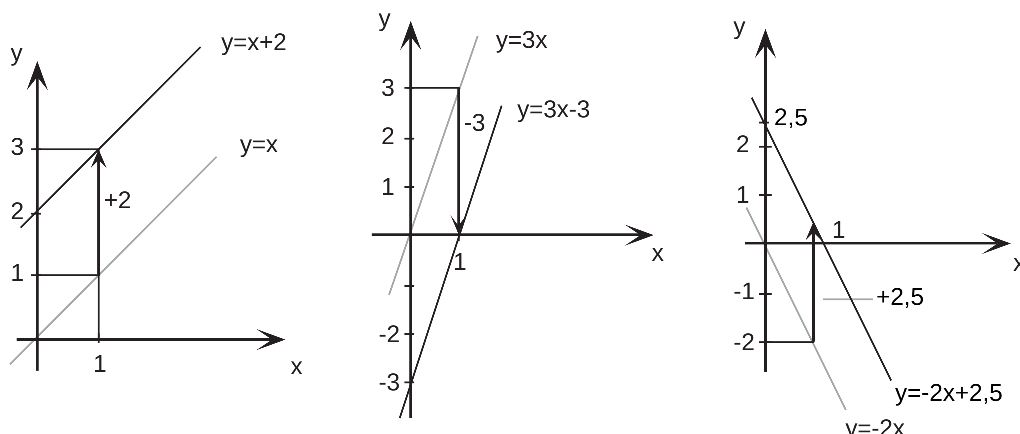
TABELA NOVA:

t	e = 25t + 40
0	0 + 40 = 40
1	25 + 40 = 65
2	50 + 40 = 90
4	100 + 40 = 140
6	150 + 40 = 190



O gráfico de y = ax + c: retas quaisquer

Nos exemplos abaixo, construímos gráficos de equações do tipo **y = ax + c**. Esses gráficos foram obtidos somando-se c unidades aos gráficos dos exemplos anteriores, cujas equações eram do tipo **y = ax**.



Observe que, quando **c** é positivo, a reta de **y = ax + c** corta o eixo **y** acima da origem; e quando **c** é negativo, corta o eixo **y** abaixo da origem.

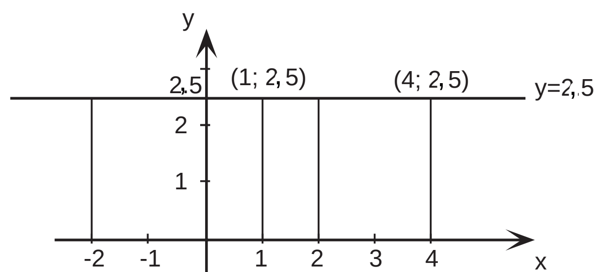
Um caso particular: retas horizontais

Os diversos gráficos de **y = ax** já nos mostraram que a constante **a** está relacionada com a inclinação da reta. Quando **a** é positivo (reta no 1º e 3º quadrantes), dizemos que a reta tem ***inclinação positiva***; quando **a** é negativo (reta no 2º e 4º quadrantes), dizemos que a reta tem ***inclinação negativa***.

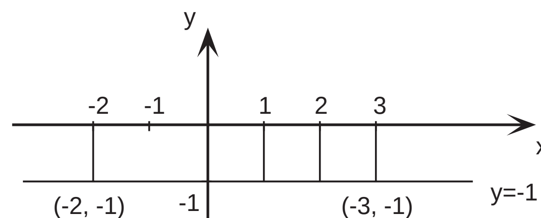
Como a reta de **y = ax + c** é a reta de **y = ax** deslocada de **c** para cima (se **c > 0**) ou para baixo (se **c < 0**), a inclinação permanece igual. Confira nas figuras: as retas são paralelas, tendo a mesma inclinação.

Para quem está atento, uma pergunta logo surge: que dizemos da inclinação, quando **a** não é positivo nem negativo, mas nulo (**a = 0**)? Dizemos que a inclinação é ***nula***. E como será uma reta **y = ax + c** com **a = 0**, ou seja, tal que **y = c** (para todo **x**)? Aqui estão duas delas, com tabela e gráfico:

x	y = 2,5
0	2,5
1	2,5
2	2,5
4	2,5
- 2	2,5



x	y = - 1
0	- 1
1	- 1
2	- 1
4	- 1
- 2	- 1



Veja que efeito teve anular **a** na relação **y = ax + c**: ficamos com **y = c**, cujo gráfico é uma ***reta horizontal***.

Já conhecemos retas inclinadas de vários modos e, agora, retas horizontais. Que tipo de reta nos falta encontrar? Pense.

Outro caso particular: retas verticais

Relembre que obtivemos retas horizontais anulando o coeficiente **a** de **x** na relação **y = ax + c**. Poderíamos encontrar as retas que nos faltam, as verticais, fazendo a mesma coisa com **y** - ou seja, anulando o seu coeficiente? Do jeito que está não - porque o coeficiente de **y** é 1. Mas se incluírmos também um coeficiente (b) para **y**, então, quando ele for nulo, teremos as retas verticais: é o caso dos dois últimos dos próximos exemplos.

O gráfico de $ax + by = c$: exemplos

Vamos desenhar estes gráficos de retas, usando uma tabela auxiliar:

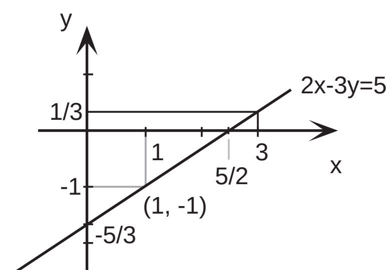
a)

$2x - 3y = 5$

$-3y = -2x + 5$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

x	$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
0	$-5/3 = -1{,}6$
5/2	0
1	-1
3	1/3



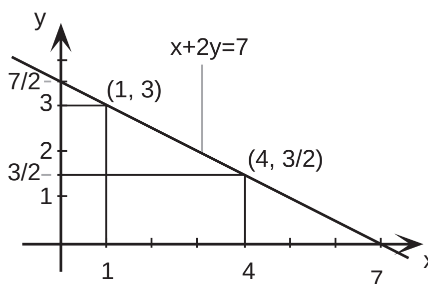
b)

$x + 2y = 7$

$2y = -x + 7$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

x	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
0	$7/2 = 3{,}5$
7	0
1	3
4	3/2



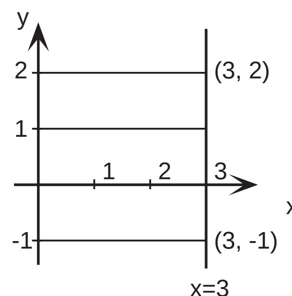
c)

$x + 0y = 3$

$x = 3$

(para todo y)

x	y
3	0
3	1
3	2
3	- 1



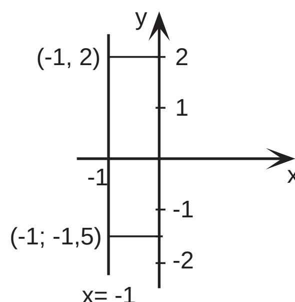
d)

$x + 0y = -1$

$x = -1$

(para todo y)

x	y
- 1	0
- 1	2
- 1	- 1, 5



Conclusão: a relação **x = c** (onde **c** é uma constante) é representada no plano cartesiano por uma reta vertical: à direita da origem se **c > 0**, e à esquerda se **c < 0**.

"E se **c = 0**?" A reta de **x = 0** é o próprio eixo **y**.

Além desta conclusão, os dois primeiros exemplos nos mostram claramente como é o gráfico da relação geral **ax + by = c**, quando **a** e **b** não são nulos: é uma reta inclinada que corta o eixo **x** no ponto $(\frac{c}{a}, 0)$ e o eixo **y** em $(0, \frac{c}{b})$. Confirme isso nos exemplos.

Sendo assim, já sabemos traçar o gráfico de qualquer reta, isto é, de qualquer relação entre **x** e **y** do tipo **ax + by = c**. Vamos praticar?

Exercícios

Atenção: Para os exercícios desta aula, é interessante você trabalhar com papel quadriculado, pois ele ajuda no traçado de gráficos.

Exercício 1

a) Para cada reta abaixo, faça uma tabela auxiliar e use-a para traçar o gráfico da reta. (Desenhe todas as retas num mesmo plano cartesiano).

a1) $y = \frac{12}{5}x$

a2) $y = \frac{12}{5}x + 2$

a3) $y = \frac{12}{5}x - \frac{2}{5}$

a4) $12x - 5y = 7$

b) Qual destas retas tem maior inclinação?

c) Em termos geométricos, o que podemos dizer destas quatro retas?

Exercício 2

a) Observando o gráfico de **e = 25t + 40**, do espaço total (em metros) percorrido pelo automóvel até o instante **t**, responda: qual o espaço total percorrido até:

a1) 2 segundos?

a2) 4 segundos?

a3) 3 segundos?

a4) 1,5 segundo?

b) Confirme suas respostas pela tabela.

Exercício 3

a) Com base no gráfico de **e = 25t + 40**, trace no mesmo plano cartesiano o gráfico de **e = 25 t + 75**.

b) O que significa esse 75 no lugar de 40, no exemplo do automóvel?

Exercício 4

a) Observe, a seguir, cada uma das relações que envolvem **x** e **y**, e faça o que se pede. Escreva ao lado de cada uma: (H) se o gráfico da relação for uma reta horizontal; (V) se for uma reta vertical; (I +) se for uma reta de inclinação positiva; e (I –) se for de inclinação negativa.

a1) $y = 2x - 1$

a2) $x = 5$

a3) $y = -3x$

a4) $x = \pi$

a5) $x = 5 - y$

a6) $y = -2$

a7) $3y - 4x = 12$

b) Usando uma tabela auxiliar, trace o gráfico de cada reta, e confirme sua resposta anterior.

Exercício 5

Aqui estão algumas retas na forma **ax + by = c**. Use o último comentário da aula para responder o que se pede em seguida (ou use as sugestões).

:

reta 1: $\rightarrow$ $7x + 2y = -14$
reta 2: $\rightarrow$ $x - 3y = 0$
reta 3: $\rightarrow$ $-12x - 31y = 1$
reta 4: $\rightarrow$ $-7x - 2y = 14$
reta 5: $\rightarrow$ $3x + 5y = 8$

a) Em que ponto a reta corta o eixo **x**? (Sugestão: Faça **y = 0** e calcule **x**)

b) E o eixo **y**? (Sugestão: Faça **x = 0** e calcule **y**).

c) Em que casos esses dois pontos bastam para traçar a reta?

AULA

10

Resolvendo sistemas

Introdução

Nas aulas anteriores aprendemos a resolver equações de 1º grau. Cada equação tinha uma incógnita, em geral representada pela letra **x**.

Vimos também que qualquer equação com duas incógnitas (**x** e **y**) não pode ser resolvida porque, para cada valor de **x**, podemos calcular um valor diferente para **y**. Por exemplo, na equação $2x + y = 20$, se fizermos $x = 3$ e $x = 6$ então teremos, respectivamente:

$$2 \cdot 3 + y = 20 \rightarrow y = 20 - 6 = 14$$

$$2 \cdot 6 + y = 20 \rightarrow y = 20 - 12 = 8$$

e assim por diante. Vemos então que, para saber os valores corretos de **x** e **y** precisamos de uma outra informação a respeito das nossas incógnitas.

Se conseguimos obter duas equações a respeito das mesmas incógnitas, temos um ***sistema***.

Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

é um sistema de duas equações nas incógnitas **x** e **y**. É possivel resolver esse sistema, ou seja, é possivel descobrir quais são os valores de **x** e **y** que satisfazem às duas equações simultaneamente.

Você pode verificar que $x = 6$ e $y = 8$ é a solução do nosso sistema, substituindo esses valores nas duas equações, temos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 6 + 8 = 20 \\ 3 \cdot 6 - 8 = 10 \end{cases}$$

Nesta aula vamos aprender a resolver sistemas de duas equações com duas incógnitas.

Mas, antes, vamos perceber que, para serem resolvidos, muitos problemas dependem dos sistemas.

Sistemas aparecem em problemas

Para que você perceba que os sistemas aparecem em problemas simples, imagine a situação a seguir.

Pedro e Paulo conversam despreocupadamente quando chega José, um amigo comum, que está para se aposentar. José fala sobre as idades das pessoas que se aposentam e percebe que os dois amigos aindam estão longe da aposentadoria. Então, ele pergunta:

- Que idade vocês têm?

Pedro, o mais velho, percebendo um pequeno erro na pergunta, responde:

- Nós temos 72 anos.

A conversa, então, segue assim:

***José** - Como? Você está brincando comigo. Esse aí não passa de um garoto e você certamente não chegou aos 50.*

***Pedro** - Da maneira que você perguntou, eu respondi. Nós, eu e Paulo, temos juntos 72 anos.*

***José** - Está bem, eu errei. Eu devia ter perguntado que **idades** vocês têm. Mas, pela sua resposta, eu não consigo saber as idades de cada um.*

***Pedro** - É claro que não. Você tem duas coisas desconhecidas e apenas uma informação sobre elas. É preciso que eu lhe diga mais alguma coisa e, aí sim, você determina nossas idades.*

***José** - Diga.*

***Pedro** - Vou lhe dizer o seguinte. A minha idade é o dobro da de Paulo. Agora, José, você tem duas coisas desconhecidas, mas tem também duas informações sobre elas. Com a ajuda da matemática, você poderá saber nossas idades.*

Vamos pensar um pouco na situação apresentada. José tem duas coisas a descobrir: a idade de Pedro e a idade de Paulo. Essas são suas incógnitas. Podemos então dar nomes a essas incógnitas:

idade de Pedro = x

idade de Paulo = y

A primeira informação que temos é que os dois juntos possuem 72 anos. Então, nossa primeira equação é:

$$x + y = 72$$

A outra informação que temos é que a idade de Pedro é o dobro da idade de Paulo. Com isso, podemos escrever a nossa segunda equação:

$$x = 2y$$

Essas duas equações formam o nosso sistema:

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ x = 2y \end{cases}$$

Esse sistema, por simplicidade, pode ser resolvido sem necessidade de nenhuma técnica especial. Se a segunda equação nos diz que **x** é igual a **2y**, então substituiremos a letra **x** da primeira equação por **2y**. Veja.

$$x+y = 72$$
$$2y+y = 72$$
$$3y = 72$$
$$\frac{3y}{3} = \frac{72}{3}$$
$$y = 24$$

Como $x = 2y$, então $x = 2 \cdot 24 = 48$. Assim, concluimos que Pedro tem 48 anos e que Paulo tem 24.

Nem sempre os sistemas são tão simples assim. Nesta aula, vamos aprender dois métodos que você pode usar na solução dos sistemas.

O método da substituição

O sistema do problema que vimos foi resolvido pelo método da substituição. Vamos nos deter um pouco mais no estudo desse método prestando atenção na técnica de resolução.

Agora, vamos apresentar um sistema já pronto, sem a preocupação de saber de onde ele veio. Vamos, então, resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$$

Para começar, devemos isolar uma das letra em qualquer uma das equações. Observando o sistema, vemos que o mais fácil é isolar a incógnita **y** na segunda equação; assim:

$$4x - y = 11$$
$$-y = 11 - 4x$$
$$y = -11 + 4x$$

Isso mostra que o valor de **y** é igual a **4x - 11**. Assim, podemos trocar um pelo outro, pois são iguais. Vamos então substituir **y** por **4x - 11** na primeira equação.

$$3x + 2y = 22$$
$$3x + 2(4x - 11) = 22$$

Temos agora uma equação com uma só incógnita, e sabemos o que temos de fazer para resolvê-la:

$$3x + 2(4x - 11) = 22$$
$$3x + 2 \cdot 4x - 2 \cdot 11 = 22$$
$$3x + 8x = 22 + 22$$
$$11x = 44$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{44}{11}$$
$$x = 4$$

Já temos o valor de **x**. Repare que logo no inicio da solução tínhamos concluido que $\mathbf{y = -11 + 4x}$. Então, para obter **y**, basta substituir **x** por **4**.

$$y = -11 + 4x$$
$$y = -11 + 4 \cdot 4$$
$$y = -11 + 16$$
$$y = 5$$

A solução do nosso sistema é, portanto, $\mathbf{x = 4}$ e $\mathbf{y = 5}$.

Observações - Ao resolver um sistema, é sempre aconselhável conferir a resposta encontrada para ver se não erramos na solução. Os valores de **x** e de **y** encontrados estarão certos se eles transformarem as duas equações em igualdades verdadeiras.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 4x - \ \ y = 11 \end{cases} \qquad x = 4, y = 5$$

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 22 \rightarrow \text{certo}$$
$$4 \cdot 4 - 5 = 11 \rightarrow \text{certo}$$

Tudo confere. Os valores encontrados estão corretos.

Outra coisa que desejamos esclarecer é que isolamos a incógnita **y** na segunda equação porque isso nos pareceu mais simples.

No método da substituição, você pode isolar qualquer uma das duas incógnitas em qualquer das equações e, depois, substituir a expressão encontrada na outra equação.

O método da adição

Para compreender o método da adição, vamos recordar inicialmente o que significa somar duas igualdades membro a membro. Se temos:

$$A = B$$
e
$$C = D$$

podemos somar os dois lados esquerdos e os dois lados direitos, para concluir:

$$A + C = B + D$$

Considere agora o seguinte problema.

" Encontrar 2 números, sabendo que sua soma é 27 e que sua diferença é 3."

Para resolvê-lo, vamos chamar nossos números desconhecidos de **x** e **y**. De acordo com o enunciado, temos as equações:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Veja o que acontece quando somamos membro a membro as duas equações:

$$\begin{array}{r} x + y = 27 \\ x - y = \ \ 3 \quad + \\ \hline x + x + y - y = 27 + 3 \end{array}$$

$$2x = 30$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{30}{2}$$

$$x = 15$$

Encontramos o valor de **x**. Para encontrar o valor de **y** vamos substituir **x** por **15** em qualquer uma das equações. Por exemplo, na segunda:

$$\begin{aligned} 15 - y &= 3 \\ -y &= 3 - 15 \\ -y &= -12 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

A solução do nosso problema é, portanto, **x = 15** e **y = 12**.

O método da adição consiste em somar membro a membro as duas equações, com o objetivo de eliminar uma das incógnitas. No sistema que resolvemos, a incógnita **y** foi eliminada quando somamos membro a membro as duas equações. Mas isso freqüentemente não acontece dessa forma tão simples. Em geral, devemos ajeitar o sistema antes de somar.

Vamos mostrar a técnica que usamos resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 8x + 3y = 21 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$$

Para começar, devemos escolher qual das duas incógnitas vamos eliminar. Por exemplo, o **y** será eliminado.

Observe que, multiplicando toda a primeira equação por **2** e toda a segunda equação por **3**, conseguimos tornar os coeficientes de **y** iguais.

$$\begin{cases} 8x + 3y = 21 & (\times 2) \\ 5x + 2y = 13 & (\times 3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 16x + 6y = 42 \\ 15x + 6y = 39 \end{cases}$$

Para que o **y** seja eliminado, devemos trocar os sinais de uma das equações e depois somá-las membro a membro.

Veja:

$$\begin{array}{r} 16x + 6y = 42 \\ -15x - 6y = -39 \quad + \\ \hline 16x - 15x + \cancel{6y} - \cancel{6y} = 42 - 39 \end{array}$$

$$x = 3$$

Em seguida, substituimos esse valor em qualquer uma das equações do sistema. Por exemplo, na primeira.

$$8 \cdot 3 + 3y = 21$$
$$24 + 3y = 21$$
$$3y = 21 - 24$$
$$3y = -3$$
$$\frac{3y}{3} = -\frac{3}{3}$$
$$y = -1$$

A solução do nosso sistema é, portanto, **x = 3** e **y = -1**

Exercícios

Você agora deve praticar fazendo os exercícios propostos. Procure resolver cada sistema pelos dois métodos para que, depois, você possa decidir qual deles é o de sua preferência. Não se esqueça também de conferir as respostas.

Exercício 1

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$$

Exercício 2

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$$

Exercício 3

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$$

Exercício 4

$$\begin{cases} 2x + 7y = 17 \\ 5x - y = -13 \end{cases}$$

Exercício 5

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$$

Exercício 6

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

Exercício 7

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

AULA

11

Sistemas resolvem problemas

Introdução

Na aula anterior, mostramos como resolver sistemas de duas equações de 1º grau com duas incógnitas. Agora vamos usar essa importante ferramenta da matemática na solução de problemas.

Em geral, os problemas são apresentados em linguagem comum, ou seja, com palavras. A primeira parte da solução (que é a mais importante) consiste em traduzir o enunciado do problema da linguagem comum para a ***linguagem matemática***. Nessa linguagem, usamos os números, as operações, as letras que representam números ou quantidades desconhecidas, e as nossas sentenças são chamadas de ***equações***.

Para dar um exemplo, considere a seguinte situação: uma costureira de uma pequena confecção ganha R$ 7,00 por dia mais uma determinada quantia por cada camisa que faz. Certo dia, ela fez 3 camisas e ganhou R$ 19,00.

Se quisermos saber quanto essa costureira ganha por cada camisa que faz devemos traduzir em linguagem matemática a situação apresentada. Vamos então representar por **x** a quantia que ela recebe por cada camisa. Ela faz 3 camisas e ganha R$ 7,00 por dia, independentemente do número de camisas que faz. Se nesse dia ela ganhou R$ 19,00, a equação que traduz o problema é:

$$7 + 3x = 19$$

Como já sabemos resolver equações e sistemas, daremos mais importância, nesta aula, à tradução do enunciado dos problemas para linguagem matemática.

Nossa aula

Agora vamos apresentar alguns problemas e suas soluções. Entretanto, procure resolver cada um antes de ver a solução. Para ajudar, incluímos algumas orientações entre o enunciado e a solução.

EXEMPLO 1

Em uma festa havia 40 pessoas. Quando 7 homens saíram, o número de mulheres passou a ser o dobro do número de homens. Quantas mulheres estavam na festa?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações - A quantidade de homens e mulheres serão as nossas incógnitas. Então:

o número de homens = x

o número de mulheres = y

- Traduza em linguagem matemática a frase: "havia 40 pessoas na festa".
- Se 7 homens saíram, quantos ficaram na festa?
- Traduza em linguagem matemática a frase: "o número de mulheres é o dobro do número de homens que ficaram na festa".

Solução - Seguindo as nossas orientações, temos como primeira equação $x + y = 40$. Depois, se tínhamos **x** homens e **7** saíram, então ficaram na festa $x - 7$ homens. E, se o número de mulheres é o dobro do número de homens, podemos escrever $y = 2 (x - 7)$.

O problema dado é traduzido em linguagem matemática pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = 2(x - 7) \end{cases}$$

Agora, vamos resolvê-lo. Como a incógnita **y** está isolada na segunda equação, podemos usar o método da substituição. Temos, então:

$$x + y = 40$$
$$x + 2(x - 7) = 40$$
$$x + 2x - 14 = 40$$
$$3x = 40 + 14$$
$$3x = 54$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{54}{3}$$
$$x = 18$$

Substituindo esse valor na primeira equação, temos:

$$18 + y = 40$$
$$y = 40 - 18$$
$$y = 22$$

Na festa havia então 22 mulheres.

EXEMPLO 2

Uma omelete feita com 2 ovos e 30 gramas de queijo contém 280 calorias. Uma omelete feita com 3 ovos e 10 gramas de queijo contém também 280 calorias. Quantas calorias possui um ovo?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações - A ***caloria*** é uma unidade de energia. Todos os alimentos nos fornecem energia em maior ou menor quantidade. Neste problema, vamos chamar de **x** a quantidade de calorias contida em um ovo. Para diversos alimentos, a quantidade de calorias é dada ***por grama***. Isso ocorre porque um queijo pode ter diversos tamanhos, assim como uma abóbora pode também ter os mais variados pesos. Então, no nosso problema, vamos chamar de **y** a quantidade de calorias contidas em cada grama de queijo.

- Se cada grama de queijo possui y calorias, quantas calorias estão contidas em 30 gramas de queijo?

- Quantas calorias possuem dois ovos?

- Escreva em linguagem matemática a frase: "dois ovos mais 30 gramas de queijo possuem 280 calorias".

- Escreva em linguagem matemática a outra informação contida no enunciado.

Solução - Vamos novamente seguir as orientações para resolver o problema. Se as nossas incógnitas estão bem definidas, não teremos dificuldade em traduzir o enunciado do problema em linguagem matemática. Temos que:

número de calorias contidas em um ovo = x
número de calorias contidas em um grama de queijo = y

Portanto, se dois ovos e 30 gramas de queijo possuem 280 calorias temos a equação:

$$2x + 30y = 280$$

Da mesma forma, se três ovos e 10 gramas de queijos possuem 280 calorias podemos escrever:

$$3x + 10\,y = 280$$

O sistema que dará a solução do nosso problema é

$$\begin{array}{l} 2x + 30\,y = 280 \\ 3x + 10\,y = 280 \end{array}$$

Repare que o problema pergunta qual é o número de calorias contidas em um ovo. Portanto, se a resposta do problema é o valor de **x**, podemos usar o método da adição e eliminar a incógnita **y**.

Observe que, multiplicando a segunda equação por 3, tornamos iguais os coeficientes de **y**.

Se, em seguida, mudamos todos os sinais da primeira equação, estamos prontos para eliminar a incógnita **y**.

$$\left\{\begin{array}{lll} 2x + 30y = 280 & \times\ (-1) & -\ 2x - 30y = -\ 280 \\ & \longrightarrow & \\ 3x + 10y = 280 & \times\ (3) & \underline{\ \ 9x + 30y = \ \ 840\ \ +} \\ & & 9x - \ 2x = \ 840 - 280 \end{array}\right.$$

$$7x = 560$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{560}{7}$$

$$x = 80$$

Concluímos, então, que cada ovo contém 80 calorias.

Para saber mais

O corpo humano é uma máquina que necessita de combustível para funcionar bem. Quando comemos, a energia contida nos alimentos é transferida para nosso corpo. Muita energia é também gasta em todas as nossas atividades diárias, e o ideal é conseguir um equilíbrio entre o que comemos e o que gastamos. Há pessoas que comem demais. Comendo mais que o necessário, as pessoas acumulam energia em forma de gordura - o que não é bom para a saúde.

Para as atividades normais, o homem necessita de cerca de 2.200 calorias por dia, ou um pouco mais, dependendo de sua atividade. Para que você tenha uma idéia da quantidade de calorias contidas nas coisas que comemos, saiba que um pão francês de 100 gramas contém 270 calorias; um prato de arroz, feijão, bife e batatas fritas contém 900 calorias e uma feijoada completa, mais duas cervejas e sobremesa de goiabada e queijo, contém o incrível número de 2.180 calorias.

Procure, portanto, incluir sempre legumes e verduras nas refeições. Eles têm vitaminas, são bons para o processo digestivo e possuem poucas calorias.

EXEMPLO 3

Para ir de sua casa na cidade até seu sítio, João percorre 105 km com seu automóvel. A primeira parte do percurso é feita em estrada asfaltada, com velocidade de 60 km por hora. A segunda parte é feita em estrada de terra, com velocidade de 30 km por hora. Se João leva duas horas para ir de sua casa até o sítio, quantos quilômetros possui a estrada de terra?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

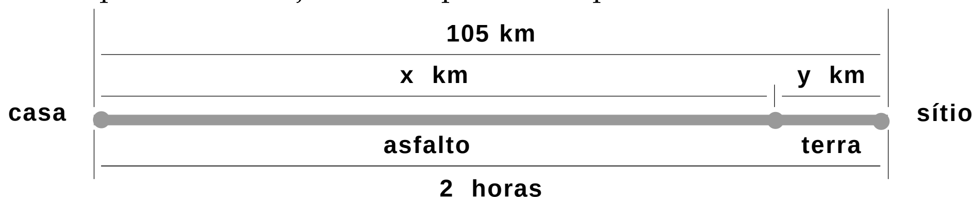
Orientações - A velocidade de um automóvel é o número de quilômetros que ele percorre em uma hora. De uma forma geral, a distância percorrida é igual ao produto da velocidade pelo tempo de percurso.

$$\textit{distância} = \textit{velocidade} \times \textit{tempo}$$

- Estabeleça as incógnitas:

x = distância percorrida na estrada asfaltada
y = distância percorrida na estrada de terra

O esquema abaixo ajuda a compreender o problema.



- Escreva uma equação com as distâncias.
- Procure escrever uma equação com o seguinte significado: "o ***tempo*** em que João andou na estrada asfaltada mais o ***tempo*** em que ele andou na de terra é igual a duas horas".

Solução - Mais uma vez, vamos resolver o problema seguindo as orientações. Se João andou x km na estrada asfaltada e y km na estrada de terra, então a nossa primeira equação é x + y = 105.

Observe novamente a relação:

$$\textbf{(distância)} = \textbf{(velocidade)} \times \textbf{(tempo)}$$

Na primeira parte do percurso, a distância foi **x**, a velocidade foi **60** e o tempo gasto será chamado de t_1. Temos, então:

$$x = 60 \cdot t_1 \qquad \text{ou}$$

$$\frac{x}{60} = t_1$$

Na segunda parte do percurso a distância foi **y**, a velocidade foi **30** e o tempo gasto será chamado de t_2. Temos, então:

$$y = 30 \cdot t_2 \qquad \text{ou}$$

$$\frac{y}{30} = t_2$$

Como a soma dos dois tempos é igual a **2** horas, conseguimos a segunda equação:

$$\frac{x}{60} + \frac{y}{30} = 2$$

Vamos melhorar o aspecto dessa equação antes de formarmos o sistema. Multiplicando todos os termos por 60, temos:

$$\overset{1}{\cancel{60}} \cdot \frac{x}{\underset{1}{\cancel{60}}} + \overset{2}{\cancel{60}} \cdot \frac{y}{\underset{1}{\cancel{30}}} = 60 \cdot 2$$

$$x + 2y = 120$$

Temos, agora, o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x + y = 105 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$$

O valor de **y** nesse sistema é calculado imediatamente pelo método da adição:

$$\begin{array}{rcl} -x - y & = & -105 \\ x + 2y & = & 120 \quad + \\ \hline 2y - y & = & 120 - 105 \end{array}$$

$$y = 15$$

Concluímos, então, que a estrada de terra tem 15 km.

Nesta aula você viu a força da álgebra na solução de problemas. Entretanto, para adquirir segurança é preciso praticar. Para cada um dos exercícios, procure "matematizar" as situações descritas usando o método algébrico. Escolha suas incógnitas e arme as equações. Depois, resolva os sistemas e verifique se os valores encontrados estão corretos.

Exercício 1

Determine dois números, sabendo que sua soma é 43 e que sua diferença é 7.

Exercício 2

Um marceneiro recebeu 74 tábuas de compensado. Algumas com 6 mm de espessura e outras com 8 mm de espessura. Quando foram empilhadas, atingiram a altura de 50 cm. Quantas tábuas de 8mm ele recebeu?

Exercício 3

Em um estacionamento havia carros e motocicletas num total de 43 veículos e 150 rodas. Calcule o número de carros e de motocicletas estacionados.

Exercício 4

Uma empresa desejava contratar técnicos e, para isso, aplicou uma prova com 50 perguntas a todos os candidatos. Cada candidato ganhou 4 pontos para cada resposta certa e perdeu um ponto para cada resposta errada. Se Marcelo fez 130 pontos, quantas perguntas ele acertou?

Exercício 5

Certo dia, uma doceira comprou 3 kg de açúcar e 4 kg de farinha e, no total, pagou R$ 3,20. Outro dia, ela comprou 4 kg de açúcar e 6 kg de farinha, pagando R$ 4,50 pelo total da compra. Se os preços foram os mesmos, quanto estava custando o quilo do açúcar e o quilo da farinha?

Exercício 6

Pedro e Paulo têm juntos R$ 81,00. Se Pedro der 10% do seu dinheiro a Paulo, eles ficarão com quantias iguais. Quanto cada um deles tem?

Exercício 7

A distância entre duas cidades A e B é de 66 km. Certo dia, às 8 horas da manhã, um ciclista saiu da cidade A, viajando a 10 km por hora em direção à cidade B. No mesmo dia e no mesmo horário um ciclista saiu da cidade B, viajando a 12 km por hora em direção à cidade A. Pergunta-se:

a) A que distância da cidade A deu-se o encontro dos dois ciclistas?
b) A que horas deu-se o encontro?

AULA

12

A interseção de retas e a solução de sistemas

Introdução

Aqui está um problema que serve de exemplo para as questões que serão tratadas nesta aula. Pense, e veja se consegue resolvê-lo com as próximas sugestões.

A Mercearia A, uma concorrente da Mercearia B, estava cobrando por certa mercadoria o dobro do preço que a outra pedia. Percebendo que isso impressionava mal a clientela, o dono da Mercearia A decidiu dar um desconto de R$ 10,00 no seu preço. Seu concorrente rebateu, então, dando o mesmo desconto na mercadoria. Desse modo, o preço na Mercearia A ficou agora o triplo do preço na Mercearia B! Quanto cada Mercearia estava pedindo pela mercadoria?

As sugestões que damos são as seguintes:

1. Experimente resolver o problema pelo método algébrico. (É um problema de procura do valor de incógnitas, daquele tipo que já aprendemos).

2. Primeiro, organize suas idéias: pense se vale a pena fazer uma tabela com as informações dadas.

3. Siga aqueles passos conhecidos, vistos nas aulas anteriores. Comece por equacionar o problema, escrevendo-o em linguagem matemática.

4. Depois, resolva as equações e responda o que se pede.

Vamos, então, resolver o problema acima.

Nossa aula

Resolvendo o problema pelo método algébrico

Vamos fazer uma tabela, ou um quadro, para organizar o raciocínio:

MERCADORIA	MERCEARIA B	MERCEARIA A
PREÇO ONTEM		
PREÇO HOJE		

Aí colocaremos os dados do problema. Quais são eles ?

É simples. Queremos saber quanto cada mercearia estava cobrando ("ontem") pela mercadoria. Logo, vamos chamar assim:

preço de ontem na Mercearia B = x (reais)
preço de ontem na Mercearia A = y (reais)

Com isso, a tabela fica deste jeito:

MERCADORIA	MERCEARIA B	MERCEARIA A
PREÇO ONTEM	x	y
PREÇO HOJE	x - 10	y - 10

pois cada mercearia passou a dar um desconto de 10 reais no preço que cobrava.

Agora, vamos escrever as equações que relacionam esses dados. Temos um sistema de duas equações a duas incógnitas, **x** e **y**, já que, relendo o enunciado do problema, concluímos que:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y - 10 = 3(x - 10) \end{cases}$$

Para resolver o sistema, observamos que a incógnita **y** está isolada na primeira equação. Isso nos sugere fazer a substituição de **y** por **3x** na segunda equação. Daí, temos:

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 3x - 30 \\ 2x - 3x &= -30 + 10 \\ -x &= -20 \\ x &= 20; \text{ logo, } y = 2 \cdot (20) = 40 \end{aligned}$$

Então, a Mercearia B estava cobrando R$ 20,00 pela mercadoria, enquanto a Mercearia A cobrava R$ 40,00 (o dobro). Os preços caíram, hoje, para R$ 10,00 e R$ 30,00 (o triplo).

Um fato curioso é que, a primeira vista, a diferença entre os preços parece agora maior. Mas não é. É a mesma de antes, pois as duas baixaram do preço o mesmo valor (R$ 10,00). O que muda de fato para os dois concorrentes é que, agora, os preços estão mais atrativos, e as vendas devem aumentar.

E quanto ao que deve a Mercearia A fazer para conquistar uma fatia maior de consumidores? Fica para você refletir, se quiser aprofundar na questão.

Uma das conclusões que podem ser tiradas da resolução do problema é que, para evitar que a concorrente continue anulando sempre seu desconto, a Mercearia A pode, por exemplo, aproximar seu preço do de seu concorrente. Isso evita que seu preço seja um múltiplo - como o dobro ou o triplo - do preço da concorrente.

Será possível visualizarmos todas essas informações e confirmarmos nossas respostas? Claro que sim. As aulas anteriores mostraram como obter isso no plano cartesiano, quando se tratava de problemas de uma só incognita. Como será isso com duas incógnitas ?

Visualizando o problema

O plano cartesiano é usado em problemas que envolvem no máximo duas grandezas. Por exemplo: tempo e espaço, no caso do automóvel; ou aqui, reais e reais.

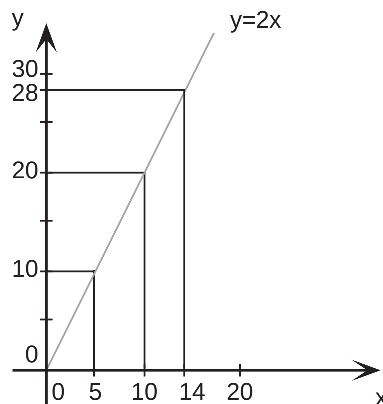
Nele, essas grandezas podem ser interpretadas como duas ***variáveis***, **x** e **y**, cada qual sendo representada em um dos eixos. O que fazemos, em cada problema, então, é representar graficamente as relações existentes entre **x** e **y**, para daí procurar no gráfico a solução que o problema pede.

Vamos lá. No nosso problema, encontramos essas relações entre **x** e **y**, expressas num sistema de duas equações.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y - 10 = 3(x - 10) \end{cases}$$

O gráfico de **y = 2x** é uma reta. Nela estão contidos pontos (x, y) como os encontrados por esta tabela, e que estão assinalados no gráfico:

x	y = 2x
0	0
5	10
10	20
14	28



O gráfico, no nosso caso, é uma ***semi-reta***, já que **x** e **y** representam preços de mercadoria e não podem ser negativos.

Nessa semi-reta estão contidos não apenas os pontos encontrados pela tabela, mas ***todos*** os infinitos pontos (x, y) tais que a relação **y = 2x** é verdadeira. Assim, por exemplo: (14, 28) está na reta, pois $28 = 2 \cdot (14)$; já (14, 25) não está, pois $25 \neq 2 \cdot (14)$. Confirme no gráfico.

Portanto, se o valor de **x** e o valor de **y** que procuramos devem satisfazer primeiramente a **y = 2x**, então o ponto (x, y) que os representa no plano cartesiano é algum ponto dessa reta, com certeza.

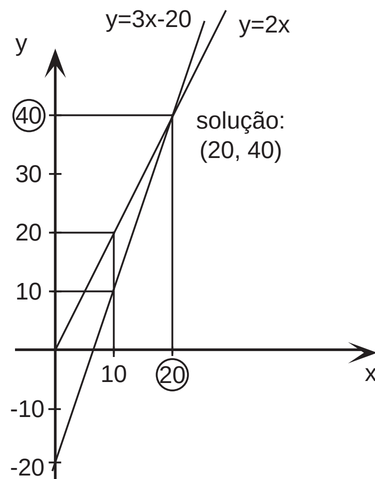
Mas esse mesmo **x** e esse mesmo **y** devem também satisfazer a outra condição do problema: **y - 10 = 3 (x - 10)**. Simplificando, temos:

$$\begin{aligned} y - 10 &= 3(x - 10) \\ y - 10 &= 3x - 30 \\ y &= 3x - 30 + 10 \\ y &= 3x - 20 \end{aligned}$$ $\longrightarrow$ que também representa uma reta

Retomando nosso raciocínio para visualizar o problema, concluímos que o ponto (x, y), que representa o valor de nossas incógnitas **x** e **y**, deve também estar

sobre a reta **y = 3x - 20**. Conclusão: o ponto (x, y) procurado deve estar sobre as ***duas*** retas. Logo, deve ser o ponto de interseção das retas!

Veja no gráfico:



O gráfico nos mostra claramente que só quando o valor de **x** é 20 o valor de **y** (40) satisfará tanto a **y = 2x** quanto a **y = 3x - 20**. Pois **40 = 2 · (20)** e **40 = 3 · (20) - 20**. Confira as contas.

Qualquer outro valor de **x** produz resultado diferente em **y = 2x** e em **y = 3x - 20**.

Por exemplo: **x = 10** nos dá **y = 2 · (10) = 20** e **y = 3 · (10) - 20 = 10 ≠ 20**. Confirme no gráfico. Tudo fica bem claro no gráfico, concorda?

Visualizando o Exemplo 1 da aula 11

Agora, vamos voltar ao Exemplo 1 da aula 11.

Numa festa havia 40 pessoas. Quando 7 homens saíram, o número de mulheres passou a ser o dobro do número de homens. Quantas mulheres estavam na festa?

Na aula passada, o problema foi equacionado e resolvido. Vamos tentar confirmar graficamente o que foi encontrado. Chegou-se a um sistema de duas equações em duas incógnitas, **x** (o número de homens) e **y** (o número de mulheres)

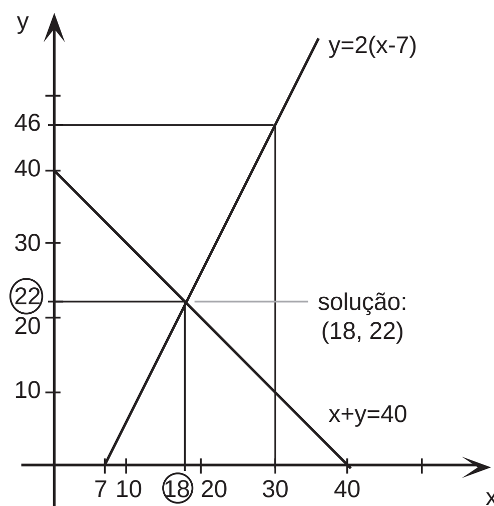
$$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = 2(x - 7) \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y = 40 - x \\ y = 2x - 14 \end{cases}$$

Cada equação representa uma reta e nesta reta estão contidos todos os pontos (x, y) que satisfazem a equação. O único ponto que satisfaz as duas equações é, deste modo, o ponto procurado. Esse ponto é o ponto comum às duas retas, o seu ponto de interseção.

Vejamos no gráfico:

x	y = 40 - x
0	40
40	0

x	y = 2 (x - 7)
7	0
30	46



Um gráfico cuidadoso nos mostra que, de fato, os únicos valores de **x** e **y** que satisfazem as duas equações são **x = 18** e **y = 22**.

Ou seja, a solução é esta: **x = 18** homens e **y = 22** mulheres estavam na festa, como se encontrou resolvendo-se as equações.

Visualizando o Exemplo 2 da aula 11

Vamos fazer a mesma coisa com o Exemplo 2 da aula 11.

Um omelete feito com 2 ovos e 30 gramas de queijo contém 280 calorias. Um omelete feito com 3 ovos e 10 gramas de queijo contém também 280 calorias. Quantas calorias possui um ovo?

O problema já foi equacionado naquela aula. Chamando de **x** o número de calorias em um ovo e de **y** o número de calorias em um grama de queijo, chegou-se a este sistema de duas equações:

$$\begin{cases} 2x + 30y = 280 \\ 3x + 10y = 280 \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x + 15y = 140 \\ 3x + 10y = 280 \end{cases} \quad \text{ou,} \quad \begin{cases} y = \frac{140 - x}{15} \\ y = \frac{280 - 3x}{10} \end{cases}$$

Cada equação representa uma reta no plano cartesiano.

De novo, o ponto (x, y) procurado deve ser a interseção das retas, pois esse é o ponto tal que **x** e **y** satisfazem as duas equações. Que ponto é esse?

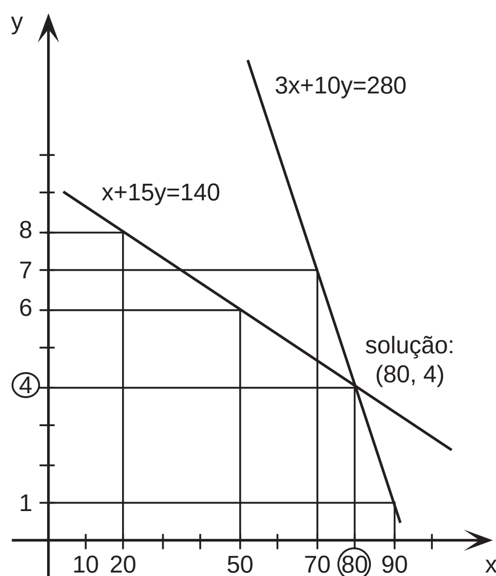
Na aula passada, encontramos **x = 80** e **y = 4** para o número de calorias em um ovo e em um grama de queijo, respectivamente.

Como esses números são muito distantes entre si, vamos usar o recurso de trabalhar com unidades de medida diferentes nos dois eixos.

Outra vez, um gráfico cuidadoso nos revela que, realmente, a interseção das retas que representam as equações do problema é o ponto (80, 4). Veja:

x	$y = \frac{140 - x}{15}$
20	8
50	6

x	$y = \frac{280 - 3x}{10}$
70	7
90	1



Como você pode ver, o plano cartesiano nos ajuda muito a visualizar a solução do problema, quando ele recai num sistema de duas equações em **x** e **y**.

Exercícios

Aqui estão alguns exercícios para você praticar essa visualização. Nesta lista de exercícios, vamos visualizar as soluções que encontramos para alguns dos problemas passados na aula anterior.

Sendo assim, para cada um dos problemas abaixo, já apresentamos o seu sistema de duas equações em **x** e **y**. Cada equação representa uma reta no plano cartesiano. Proceda assim:

a) Faça uma tabela para cada equação, com alguns valores de **x** e de **y** que a satisfazem.
b) Com essa tabela, desenhe o gráfico de cada reta, como fizemos há pouco.
c) Assinale o ponto que corresponde à solução do problema.

Exercício 1

Para ir de sua casa na cidade até seu sítio, João percorre 105 km com seu automóvel. A primeira parte do percurso é feita em estrada asfaltada com velocidade de 60 km por hora. A segunda parte é feita em estrada de terra com velocidade de 30 km por hora. Se João leva duas horas para ir de sua casa ao sítio, quantos quilômetros possui a estrada de terra ?

Incógnitas: número de quilômetros no asfalto = x
número de quilômetros em terra = y

Sistema: $\begin{cases} x + y = 105 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$

Exercício 2

Determine dois números, sabendo que sua soma é 43 e que sua diferença é 7.

Incógnitas: um número = x
outro número = y

Sistema: $\begin{cases} x + y = 43 \\ x - y = 7 \end{cases}$

Exercício 3

Em um estacionamento havia carros e motocicletas num total de 43 veículos e 150 rodas. Calcule o número de carros e de motocicletas estacionados.

Incógnitas: número de carros = x
número de motocicletas = y

Sistema: $\begin{cases} x + y = 43 \\ 4x + 2y = 150 \end{cases}$

Exercício 4

Uma empresa deseja contratar técnicos e para isso aplicou uma prova com 50 perguntas a todos os candidatos. Cada candidato ganhou 4 pontos para cada resposta certa e perdeu 1 ponto para cada resposta errada. Se Marcelo fez 130 pontos, quantas perguntas ele acertou?

Incógnitas: número de respostas certas = x
número de respostas erradas = y

Sistema: $\begin{cases} x + y = 50 \\ 4x - y = 130 \end{cases}$

Exercício 5

Pedro e Paulo têm juntos R$ 81,00. Se Pedro der 10% do seu dinheiro a Paulo, eles ficarão com quantias iguais. Quanto cada um deles tem?

Incógnitas: quantia de Pedro = x
quantia de Paulo = y

Sistema: $\begin{cases} x + y = 81 \\ 0{,}9\,x = y + 0{,}1x \end{cases}$

AULA

13

Recordando produtos notáveis

Introdução

Desde a aula 3 estamos usando letras para representar números desconhecidos. Hoje você sabe, por exemplo, que a solução da equação **2x + 3 = 19** é **x = 8**, ou seja, o número 8 é o ***único*** valor que, colocado no lugar de **x**, torna a igualdade verdadeira.

Vamos agora ampliar o uso das letras. Passaremos a empregar as letras **a**, **b**, **c** etc. para representar ***números quaisquer***. Assim, **a + b** representa a soma de dois números quaisquer, **ab** representa o produto de dois números quaisquer, e assim por diante.

A igualdade

$$2 + 5 = 5 + 2$$

é correta? É claro que sim. Mas o fato de que a ordem das parcelas não altera a soma não vale somente para os números 2 e 5. Isso vale para números quaisquer. É a propriedade comutativa da adição e escreve-se assim:

$$a + b = b + a$$

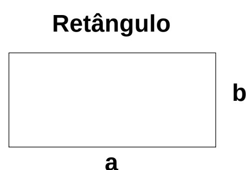
Temos aí um exemplo de uma **identidade**. Em matemática, uma identidade é uma igualdade que permanece verdadeira quaisquer que sejam os valores que sejam atribuídos às letras. Nesta aula, vamos rever algumas propriedades da aula 1 (agora usando letras) e também vamos conhecer algumas identidades muito famosas da matemática.

Comutar quer dizer "trocar". Uma propriedade se chama *comutativa* quando permite que dois números quaisquer troquem de posição.

Nossa aula

Para ilustrar as propriedades que veremos é preciso recordar como se calcula a área de um retângulo.

A área de uma figura é a medida de sua superfice. No caso do retângulo, a área é o produto de suas duas dimensões. Então, chamando de **A** a área de um retângulo de dimensões **a** e **b,** temos:

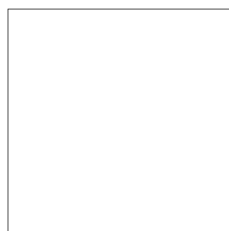
Retângulo	Área
	A = ab

Observe que **ab** representa o produto de dois números quaisquer. Entretanto, quando as letras forem substituídas por números, é preciso colocar um ponto (ou sinal de ×) entre eles para evitar confusões. Assim, se as medidas de certo retângulo forem **a = 5** e **b = 2**, sua área será:

$$A = ab = 5 \cdot 2 = 10$$

É claro que se as medidas **a** e **b** forem iguais, o retângulo transforma-se num quadrado, mas a forma de calcular sua área continua igual.

Quadrado | **Área**



a

$A = aa = a^2$

O simbolo **a** lê-se "**a** ao quadrado" e significa o produto de um número por ele mesmo. Por exemplo: **4 = 4 · 4 = 16**.

Por enquanto, necessitamos apenas disso. O conceito de área, as unidades e as fórmulas que calculam as áreas das diversas figuras serão vistas na aula 15.

A multiplicação e a propriedade distributiva

A figura a seguir mostra dois retângulos colados. Ambos têm base **a** e as alturas são **b** e **c**.



O retângulo total tem base **a** e altura **b + c**. Então sua área é **a(b + c)**.

Por outro lado, a área do retângulo de baixo é **ab** e a área do de cima é **ac**. Somando essas duas áreas temos a área total. Logo:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Esta é a propriedade ***distributiva*** da multiplicação. Ela tem esse nome por que a letra **a** foi distribuída pelas outras que estavam dentro do parênteses.

Vamos agora calcular algo ligeiramente mais complicado.

EXEMPLO 1

Desenvolver $(a + b)(c + d)$.

Vamos dar uma sugestão para que você tente fazer essa conta sozinho antes de ver a resposta: represente **a + b** com uma nova letra e use a propriedade que acabamos de ver.

Representaremos a soma **a + b** pela letra **m**.

$$\underbrace{(a + b)}_{m}(c + d) = m(c + d) = mc + md$$

Agora, substituímos a letra **m** pela soma **a** + b:

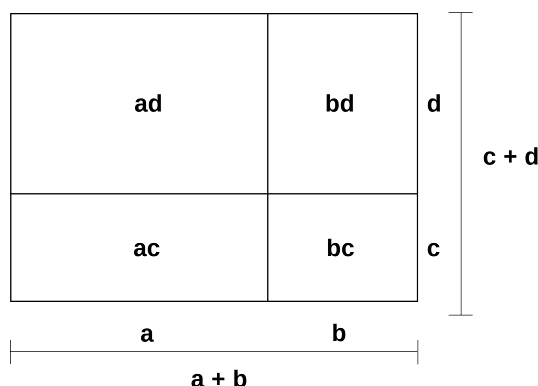
$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= mc + md\\ &= (a + b)c + (a + b)d\\ &= ac + bc + ad + bd\end{aligned}$$

Concluímos, então, que:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Observe a figura a seguir para visualizar o que foi demonstrado. O lado esquerdo de nossa igualdade representa a área de um retângulo cujas medidas são **a + b** e **c + d**.

Repare que este retângulo é a soma de quatro retângulos menores cujas áreas são as quatro parcelas que aparecem no lado direito da igualdade.



O quadrado de uma soma e de uma diferença

O exemplo que acabamos de ver é a base para a demonstração de uma das mais úteis identidades da matemática:

$$(a + b) \;= a \; + 2ab + b$$

(*fórmula 1*)

AULA

13

Essa fórmula quer dizer que o quadrado de uma soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo. Veja a demonstração.

$$\begin{aligned}(a + b) &= (a + b)(a + b)\\ &= aa + ab + ba + bb\\ &= a \;\; + ab + ba + b\\ &= a \;\; + 2ab + b\end{aligned}$$

A interpretação desse resultado utilizando as áreas dos retângulos poder ser vista na figura a seguir.

a^2	ab
ab	b^2
a	b

A outra identidade, irmã da que acabamos de ver é a seguinte :

$$(a - b) = a \;\; - 2ab + b$$

(*fórmula 2*)

Ela nos diz que o quadrado de uma diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Uma das formas de demonstrar esse resultado é escrever **a - b** como **a + (-b)** e aplicar o quadrado da soma. Veja:

$$\begin{aligned}(a-b) &= (a + -(b)) =\\ &= a \;\; + 2a(-b) + (-b)\\ &= a \;\; - 2ab + b\end{aligned}$$

EXEMPLO 2

Calcule 29 .

Ora, se temos uma máquina de calcular, não tem graça.

Se não, é claro que sabemos calcular 29 · 29 com lápis e papel. Faça a conta.

Vamos dar o resultado de maneira bem rápida e simples. Escrevemos 29 como 30 - 1 e usamos a *fórmula 2*. Veja:

$$\begin{aligned}29 &= (30-1)\\ &= 30 \;\; - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1\\ &= 900 - 60 + 1\\ &= 841\end{aligned}$$

A diferença de quadrados

A terceira identidade que vamos aprender é a seguinte:

$$a \;\; - b \;\; = (a + b)(a \;\; - b)$$

(*fórmula 3*)

Ela nos diz que a diferença entre os quadrados de dois números é igual ao produto da soma pela diferença desses números. Para demonstrar isso, basta desenvolver o lado direito da igualdade. Veja:

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= aa + \cancel{ab} - \cancel{ba} - bb \\ &= a \;\; - b\end{aligned}$$

Esta identidade nos será útil em diversos momentos do nosso curso. Por ora, veja como ela pode simplificar certos cálculos.

EXEMPLO 3 

Em um loteamento, cada quadra de terreno é um quadrado com 61 metros de lado. O autor do projeto resolveu então aumentar a largura da calçada e, com isso, cada quadra passou a ser um quadrado de 59 metros de lado. Que área os terrenos perderam?

Pense um pouco antes de ver a solução.

Uma forma simples de responder a esta questão é calcular a área antiga, a área nova e depois subtrair. Inicialmente a área da quadra era 61 .
Depois a área da quadra passou a ser 59 . Então a área perdida foi

$$61 \;\; - \;\; 59$$

É claro que sabemos fazer estas contas. Mas, veja como fica simples o cálculo se utilizamos a fórmula 3.

$$61 \;\; - 59 \;\; = (61 + 59)(61 - 59) = 120 \cdot 2 = 240$$

Os terrenos perderam, então, 240 metros quadrados.

Exercícios

Exercício 1
Desenvolva:
a) x (a + b - c)
b) (x + a)(x + b)

Exercício 2
Resolva a equação: 2(x - 5) + 3(x + 1) = 23

Exercício 3

Desenvolva: $(x + 3)$

Exercício 4

Desenvolva: $(x - 1)$

Exercício 5

Resolva a equação: $(x - 3) = x - 33$

Exercício 6

Calcule: $173 - 172$

Exercício 7

Simplifique a expressão: $(a + 2)(a - 2) - (a - 3)$

Exercício 8

Resolva a equação: $(x - 5)(x + 5) = (x - 1)$

Exercício 9

Calcule:

a) 82 usando a fórmula 1
b) 99 usando a fórmula 2
c) $42 \cdot 38$ usando a fórmula 3

AULA

14

Operações com potências

Introdução

Quando um número é multiplicado por ele mesmo, dizemos que ele está **elevado ao quadrado**, e escrevemos assim:

$$a \cdot a = a$$

Se um número é multiplicado por ele mesmo várias vezes, temos uma **potência**.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\text{3 fatores}} = a \quad \textbf{(a elevado a 3 ou a ao cubo)}$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{4 fatores}} = a^4 \quad \textbf{(a elevado a 4)}$$

De uma forma geral, se o fator **a** aparece **n** vezes escrevemos $\mathbf{a^n}$ (a elevado a n). O número a é a **base** da potência e **n** é o **expoente**.

Nas ciências, para escrever números muitos grandes ou muito pequenos usamos potências. Por exemplo, um bilhão é o número 1.000.000.000, que é igual a:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^9$$

Os astrônomos medem as distâncias entre as estrelas em uma unidade chamada **ano-luz,** que é a distância percorrida pela luz durante um ano. Essa imensa distância vale, aproximadamente, 9.500.000.000.000 km, ou seja, nove trilhões e quinhentos bilhões de quilômetros. Para facilitar, escrevemos esse número assim:

$$\textbf{1 ano-luz} = 9{,}5 \cdot 10^{12}\ \textbf{km}$$

Acontece que essa distância é ainda pequena se olharmos para o universo conhecido. A estrela mais próxima de nós (que está na constelação do Centauro) fica a 4 anos-luz de distância. Mas, existem estrelas que estão a bilhões de anos-luz de distância de nós. Imagine que número gigantesco deve representar essa distância em quilômetros. Podemos então perceber que só é prático representar números desse tamanho usando potências e, além disso, é preciso saber fazer cálculos com elas.

Nossa aula

O produto de potências de mesma base

Começamos com um exemplo. Vamos multiplicar $\mathbf{a^4}$ por $\mathbf{a^3}$

$$a^4 \cdot a^3 = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{4 fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\text{3 fatores}}}_{\text{7 fatores}} = a^{4+3} = a^7$$

Como cada expoente representa o número de fatores então o número total de fatores é a soma dos expoentes. Concluímos então que para **multiplicar** potências de mesma base devemos **conservar a base e somar os expoentes**. Esse resultado, escrito de forma geral, fica assim:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

EXEMPLO 1

Certa estrela está a 1,2 milhões de anos-luz do sol. Sabendo que 1 ano-luz é igual a 9,5 trilhões de quilômetros, determine, em quilômetros, a distância entre essa estrela e o sol. Pense um pouco antes de ver a solução. Procure exprimir os números dados usando potências de 10.

Vamos exprimir os números dados usando números decimais e potências de 10. Observe que:

mil	=	$1.000 = 10^3$
milhão	=	$1.000.000 = 10^6$
bilhão	=	$1.000.000.000 = 10^9$
trilhão	=	$1.000.000.000.000 = 10^{12}$

Então,

$$1{,}2 \text{ milhões} = 1{,}2 \cdot 10^6$$
$$9{,}5 \text{ trilhões} = 9{,}5 \cdot 10^{12}$$

Para calcular a distância entre o sol e a outra estrela, devemos multiplicar esses dois números. Observe que vamos multiplicar os números decimais e as potências de 10. Veja:

$$1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{12} = 1{,}2 \cdot 9{,}5 \cdot 10^6 \cdot 10^{12} = 11{,}4 \cdot 10^{6+12} =$$
$$= 11{,}4 \cdot 10^{18} \text{ km}$$

Quando representamos um número por um decimal seguido de uma potência de 10, estamos usando o que se chama de **notação científica**. É assim que os cientistas representam números muito grandes. Entretanto, eles também combinaram o seguinte: para que todos escrevam da mesma forma nunca escreverão mais de um dígito na parte inteira do número decimal. Assim, um verdadeiro cientista não escreveria a distância $\mathbf{11{,}4 \cdot 10^{18}}$ **km**. Ele faria assim:

$$11{,}4 \,.\, 10^{18} = \frac{11{,}4}{10} \times 10 \times 10^{18} = 1{,}14 \times 10^{19} \text{ km}$$

Observe que $10 = 10^1$. Por isso, $\mathbf{10 \cdot 10^{18}}$ é igual a $\mathbf{10^{1+18}}$, ou seja, $\mathbf{10^{19}}$.

Vamos então recordar as outras operações.

A divisão de potências de mesma base

Começamos também com um exemplo para descobrir o caso geral. Vamos dividir $\mathbf{a^6}$ por $\mathbf{a^2}$.

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{\overbrace{a.a.a.a.a.a}^{\text{6 fatores}}}{\underbrace{a.a}_{\text{2 fatores}}} = a^{6-2} = a^4$$

Cada fator do denominador é cancelado com um fator do numerador. Então o número de fatores do resultado é a diferença entre o número de fatores do numerador e o número de fatores do denominador. Concluímos então que, para dividir potências de mesma base, devemos conservar a base e subtrair os expoentes. Esse resultado, escrito de forma geral fica assim:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Observação: Nesta identidade existe uma restrição para a letra **a**: ela pode representar qualquer número, **exceto** o **zero**. Isso acontece porque é impossível a divisão por zero.

A potência do produto e do quociente

Observe as seguintes sequências de cálculos:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Estes resultados podem ser generalizados para um expoente qualquer

$$\boxed{(ab)^n = a^n . b^n} \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

$$b \neq 0$$

A potência de uma potência

Vamos, mais uma vez, descobrir o caso geral a partir do raciocínio usado em um exemplo. Calculemos então $\mathbf{(a^3)^4}$.

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$$

É claro que a letra **a** apareceu como fator 12 vezes, que é o produto dos expoentes. Concluimos então que quando uma potência está elevada a algum expoente, devemos manter a base e multiplicar os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Observação: O que acontece se o expoente for zero? Essa é uma pergunta freqüente, e a resposta é a seguinte. Quando definimos a^n, o expoente **n** é o número de vezes que a letra **a** aparece como fator. Então, **n** pode ser 1, 2, 3, 4 etc, e o caso $n = 0$ não está incluído na nossa definição. Portanto, a expressão a^0 precisa ser definida, ou seja, precisamos dar um significado para ela.

Definimos, então:

$$a^0 = 1 \quad \text{para todo } a \neq 0$$

Por que isso? Porque, com essa definição, as propriedades anteriores continuam válidas. Observe.

$$1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$$

Inicialmente os nossos expoentes eram inteiros positivos, e agora o zero foi incluído. O leitor curioso poderá então perguntar o que acontece se o expoente for negativo. Realmente, expoentes negativos existem; mas, como eles não estão incluídos na definição original de potência, precisamos criar um significado para eles. Isso é o que veremos a seguir.

O expoente negativo

Devemos definir potências de expoentes negativos, de forma que as propriedades anteriores permaneçam válidas. A definição conveniente é a seguinte:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Observe que, com essa definição, as propriedades que vimos continuam a ser usadas. Veja:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} \\ \\ \dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \dfrac{1}{a^2} \end{cases}$$

Nas ciências, potências de base 10 com expoente negativo são usadas para representar números muito pequenos.

Observe:

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

$$0,001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

$$0,0001 = \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

Então, para representar, por exemplo, o número **0,0003** na nossa já conhecida notação científica, fazemos assim:

$$0,0003 = \frac{0,0003 \times 10^4}{10^4} = \frac{3}{10^4} = 3 \times 10^{-4}$$

EXEMPLO 2

Para tratar a água consumida pela população e diminuir a incidência de cáries dentárias, muitos países acrescentam flúor à água que será distribuida. A proporção recomendada é de 700g de flúor para 1 milhão de litros de àgua. Calcular:

a) a quantidade de flúor em cada litro de água;
b) se você tem uma cisterna com 12.000 litros de água não tratada, que quantidade de flúor você deve acrescentar?
Pense um pouco antes de ver a solução.

Este problema se resolve com regra de três mas, é conveniente escrever os números usando potências de 10. Isso vai facilitar os cálculos.

Solução:
a) Sabemos que 1 milhão é igual a 10^6. Se **x** é a quantidade de flúor contida em um litro de água, temos a regra de três abaixo:

700g	———	**10^6 litros**
x g	———	**1 litro**

Portanto, $\mathbf{x} = \frac{1.700}{10^6} = \frac{7.10^2}{10^6} = 7.10^{2-6} = 7.10^{-4}$

Temos, então, em cada litro de água tratada, $\mathbf{7 \cdot 10^{-4}}$ gramas de flúor.

b) Para saber a quantidade de flúor que deve ser colocada na cisternad e - vemos multiplicar $7 \cdot 10^{-4}$ por 12.000 litros.
Observe o cálculo:

$$7 \cdot 10^{-4} \cdot 12.000 = 7 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^4 = 7 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4+4} = 7 \cdot 1,2 = 8,4$$

Então, devemos acrescentar 8,4 gramas de flúor para tratar a água dessa cisterna.

Exercícios

Exercício 1

Escreva cada uma das expressões a seguir na forma de uma única potência de base 2.

a) $2^5 \cdot 2^3$ **b)** $\dfrac{2^9}{2^3}$ **c)** $(2^3)^5$ **d)** $\dfrac{2 \times 2^5}{2^9}$

Exercício 2

Escreva os números a seguir utilizando um número decimal (ou inteiro) multiplicado por uma potência de 10.

a) 23.000 **b)**2.000.000 **c)**0,04 **d)**0,000.015

Exercício 3

Simplifique $\dfrac{2^3 \times 4^5}{8^6}$

Atenção: observe que $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$

Exercício 4

Simplifique $100^5 \cdot 1000^7 \cdot (100^2)^{-4} \cdot 10000^{-3}$

Exercício 5

Escreva cada uma das expressões a seguir usando uma única potência de base 3.

a)$3^{-2} \cdot 3^{-5}$ **b)** $\dfrac{3^6}{3^{-4}}$ **c)** $\dfrac{1}{(3^{-2})^5}$ **d)** $\dfrac{3 \times 9^5}{27^6}$

Exercício 6

Calcule $2{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-3}$

Exercício 7

O planeta Plutão, o mais afastado do sistema solar, está a 5900 milhões de quilômetros de distância do Sol. Escreva essa distância:

a) em quilômetros usando um número decimal com 1 dígito na parte inteira e uma potência de 10;

b) em anos-luz.

Exercício 8

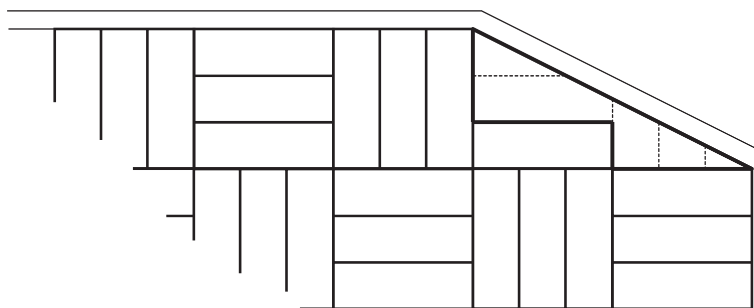
Muitas fábricas lançam na atmosfera uma substância chamada dióxido de enxofre. A Organização Mundial de Saúde estabeleceu que a quantidade máxima dessa substância no ar que respiramos deve ser de $4 \cdot 10^{-5}$ gramas em cada metro cúbico de ar. Acima desse valor o ar é considerado poluído. Certo dia, em uma amostra de $2{,}5 m^3$ de ar de Sorocaba (SP) havia $0{,}135 \cdot 10^{-3}$ gramas de dióxido de enxofre. O ar de Sorocaba estava poluído ou não?

AULA
15

Áreas de polígonos

Introdução

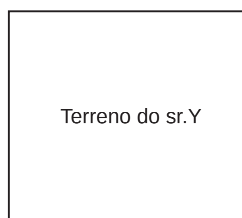
Seu Raimundo é pedreiro. Assim, freqüentemente ele se vê tendo que resolver verdadeiros quebra-cabeças na hora de encaixar os últimos pedaços de lajota no piso de uma sala torta. Também podem ser tacos ou azulejos. Agora mesmo ele está se perguntando: "De quantos tacos preciso para completar a parte que está faltando?" Como você poderia ajudá-lo?

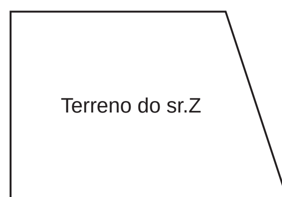


Está vendo por que dissemos que seu Raimundo enfrenta verdadeiros quebra-cabeças no seu ofício de pedreiro? Problemas desse tipo são comuns também em outras áreas profissionais, como na carpintaria, na costura, na agronomia e em muitas outras áreas.

Se você cursou o ***Telecurso 2000 - 1º grau*** talvez ainda se lembre daquele problema de comparação dos terrenos do sr. Y e do sr. Z (aula 15).

Lá, a resposta à pergunta sobre qual dos terrenos é maior também veio quando encaramos o problema como um quebra-cabeças: exatamente como o do seu Raimundo. Os terrenos têm esta forma:





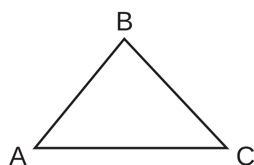
Você sabe avaliar qual das áreas é a maior? A sugestão é esta: Pense no terreno do Sr. Z como um quebra-cabeça de papel. Onde devemos cortar para que as peças se reagrupem formando um outro retângulo? (A área do retângulo é mais fácil de ser calculada!)

Nossa aula

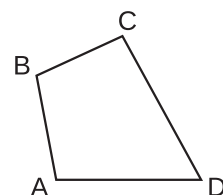
Área de polígonos

A grande maioria dos problemas práticos em que podemos aplicar nossos conhecimentos geométricos fala de figuras tais como retângulos, quadrados, triângulos, hexágonos e outros polígonos.

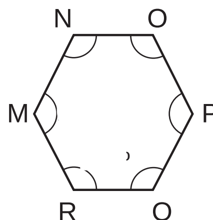
Polígonos são figuras formadas por segmentos de reta (seus ***lados***) dispostos numa linha poligonal fechada. Aqui estão alguns exemplos de polígonos:



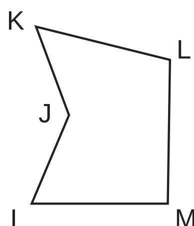
Triângulo ABC
(tri=3; 3 lados)
lados: AB,BC, AC



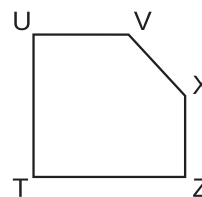
Quadrilátero ABCD
(quadri=4; 4 lados)
lados: AB,BC, AC, AD



Hexágono de lados iguais
(hexa = 6; 6 lados)
lados: MN,NO, OP, PQ, QR, RM



Pentágono IJKLM
lados: IJ, JK, KL, LM, MN



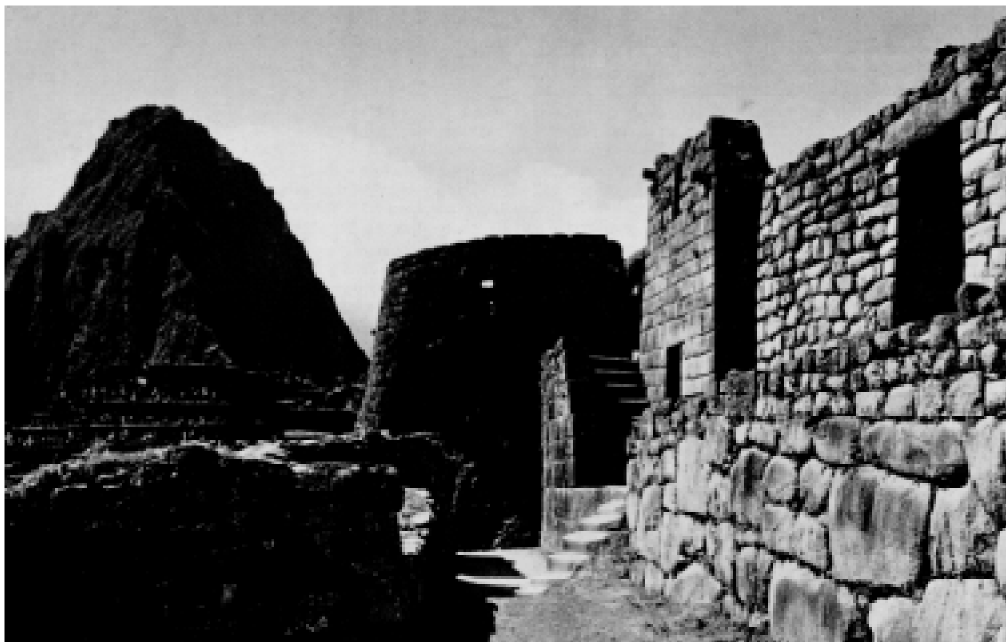
Pentágono TUVXZ
(penta=5; 5 lados)
lados:TU, UV, VX, XZ, ZT

Há também octógonos (8 lados), decágonos (10 lados), dodecágonos (12 lados) etc. Você não precisa decorar estes nomes agora. A prática talvez o conduza a usá-los, talvez não. Os nomes não são tão importantes quanto os fatos geométricos que estão por trás de nossas situações cotidianas. Nesta aula, o que estamos fazendo é resolver quebra-cabeças: há muito o que aprender com eles, além de ser divertido estudar este assunto desta maneira!

É claro que os polígonos acima são apenas cinco exemplos de polígonos entre a infinidade de formas de triângulos, quadriláteros etc, que existem. Mas já podemos perceber que todo polígono ocupa uma certa quantidade de superfície, uma certa ***área***.

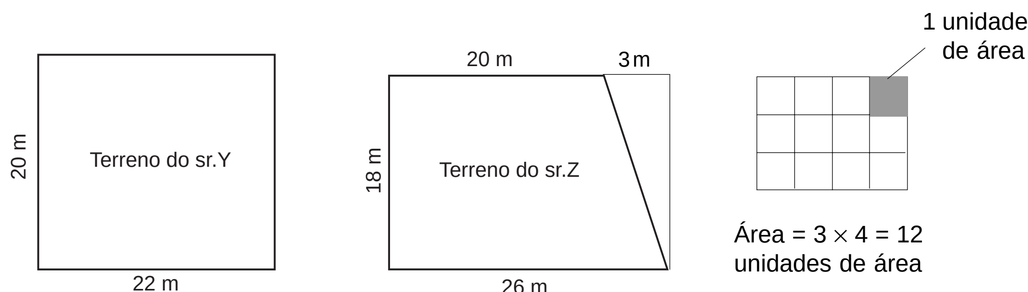
Na vida prática, conhecer essa área pode me ajudar a calcular o que preciso - seja o tamanho do meu terreno, ou a quantidade de tacos para ocupar um espaço de piso, seja a quantidade de tecido para um vestido, seja o gasto de papel para imprimir um folheto, ou muitas outras coisas.

Os incas da América do Sul foram habilidosos construtores em pedra. Observe como são variados os polígonos empregados em suas construções.



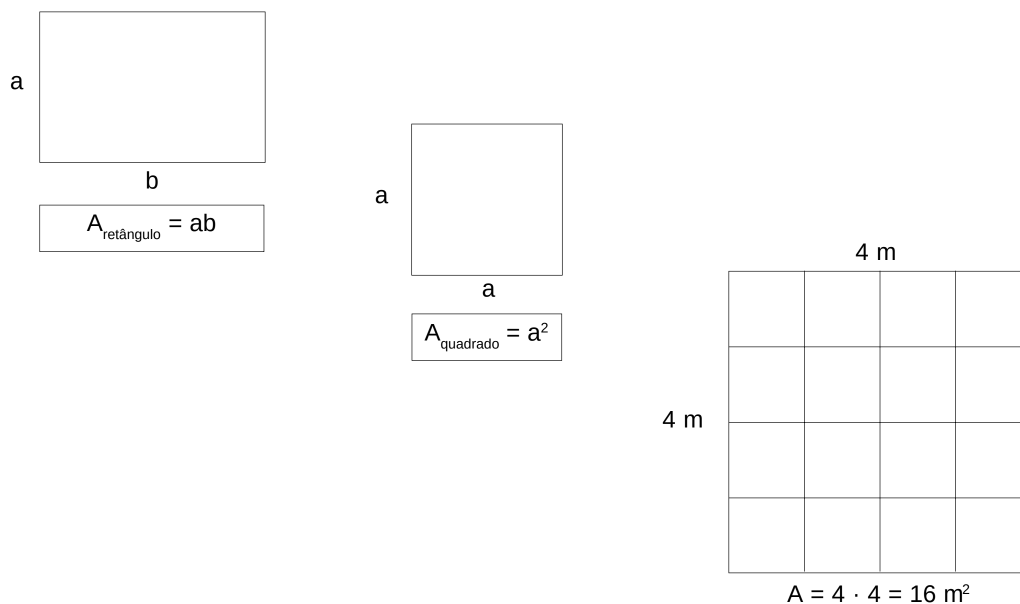
Área de retângulos e quadrados

O retângulo é uma das figuras geométricas mais comuns que encontramos na vida diária, como podemos constatar em nossas casas, móveis e utensílios. Sua área é muito fácil de ser calculada, como vimos ao calcularmos a área dos terrenos do srs. Y e Z.



O terreno do sr. Y mede 20 × 22 = 440 m , e o do sr. Z mede 18 × 23 = 414 m , sendo maior, portanto, o terreno do sr. Y. Isso porque, como a figura da direita mostra, um retângulo de 3 por 4 (unidades de comprimento) tem 3 × 4 = 12 unidades de área. Assim, do mesmo modo, um retângulo de altura **a** e largura **b** tem área **A = ab**. Se **a** e **b** forem expressos em centímetros, então **A** será dada em **cm** . Se estiverem em metros, **A** será dada em **m** , e assim por diante.

Quanto ao quadrado, que é um retângulo especial, onde **a = b**, sua área é igualmente simples de ser calculada. Chamando de **a** o lado do quadrado, temos: **A = a · a = a** .



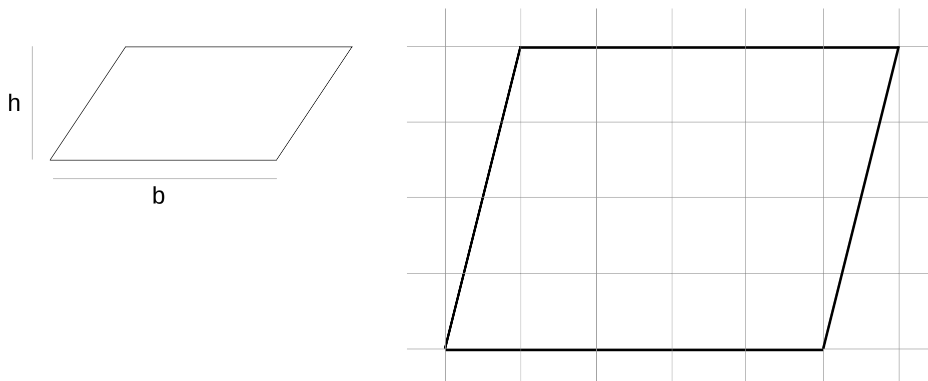
Continuaremos agora estudando outro quadrilátero muito comum: o paralelogramo. Para calcular a área de um paralelogramo vamos aplicar novamente um raciocínio do tipo quebra-cabeça.

EXEMPLO 1

As questões que você verá neste exemplo serão solucionadas no decorrer da aula. Preste atenção!

a) Como devemos cortar o quadrilátero da esquerda, abaixo, (um paralelogramo,como veremos) em duas partes, de modo a reagrupá-las depois formando um retângulo?
Sugestão: papel e tesoura!

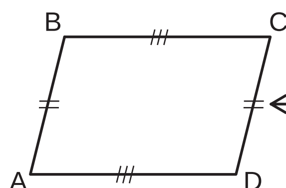
b) Se dissermos que esse retângulo tem largura **b** e altura **h**, quanto medirá a área do paralelogramo?



c) O paralelogramo à direita foi desenhado sobre papel quadriculado. Quantos quadradinhos unitários o formam, isto é, qual é sua área?

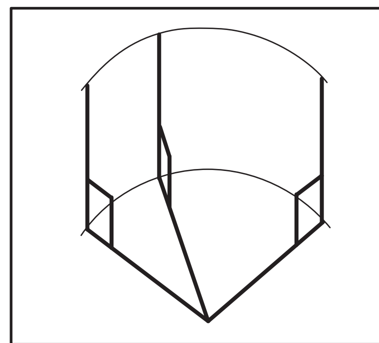
Área de paralelogramos e losangos

Retângulos são um caso particular de um tipo de quadrilátero que talvez você já conheça: o paralelogramo. O ***paralelogramo*** é um quadrilátero de lados opostos paralelos dois a dois. Ocorre, então, que esses lados opostos são também iguais dois a dois, como mostra o desenho abaixo:



Este sinal significa "igual ao outro lado"

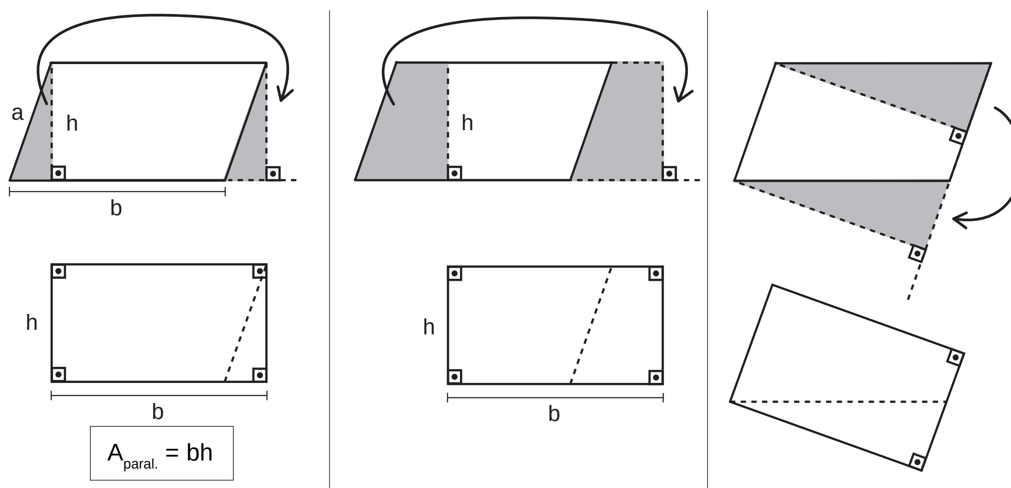
Paralelogramo ABCD
onde AB = CD
e AD = BC



Limpador de p‡ra-brisa

Uma aplicação interessante do paralelogramo é o limpador de pára-brisa, que se mantém sempre na vertical. Quando encontrá-lo, nos ônibus e automóveis, procure observar as hastes: elas formam um paralelogramo. Outras aplicações do paralelogramo pordem ser, por exemplo, o mecanismo que liga a roda da frente à de trás, na locomotiva do trem e o mecanismo que abre janelas basculantes.

Paralelogramos também são conhecidos como ***retângulos tombados***, sendo o retângulo, então, um paralelogramo cujos ângulos são todos retos. No **Exemplo 1** foi pedido que você, cortando adequadamente o paralelogramo, o transformasse depois num retângulo. Isso pode ser feito de muitas maneiras:

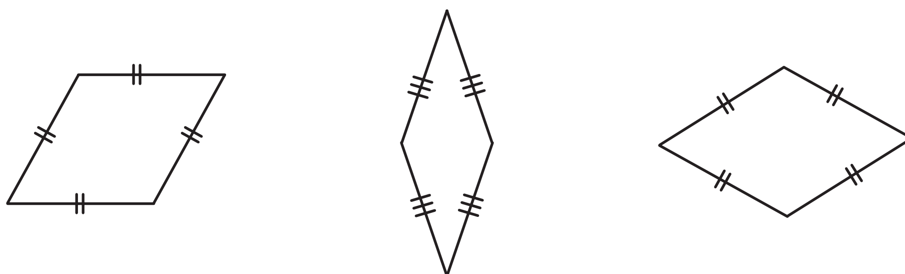


Observamos em todos os exemplos que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo em que foi transformado.

Na figura, tal área é dada por **A = bh**, onde **b** é um dos lados do paralelogramo e **h** é sua altura perpendicular a esse lado. Assim temos: **b = 2,5** e **h = 1,2** (cm); logo, a área desse paralelogramo é 3,0 cm .

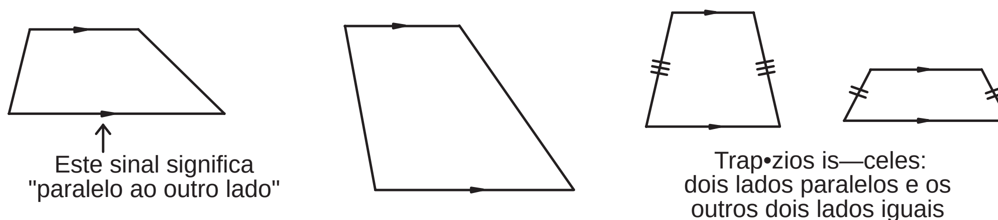
Quanto aos ***losangos*** (ou "balões"), são uma classe especial de paralelogramo Sua área é calculada do mesmo jeito: multiplica-se um dos lados pela altura. ***Losangos*** são paralelogramos de quatro lados iguais e paralelos dois a dois.

Aqui estão alguns exemplos de losangos:



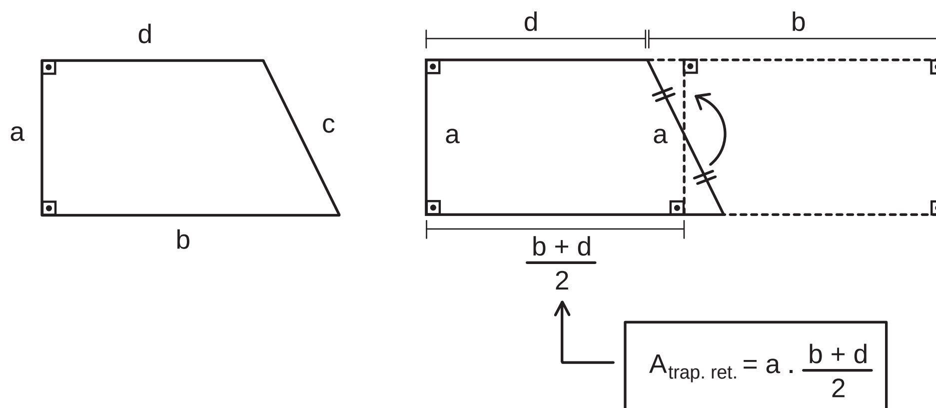
Área de trapézios

Os quadriláteros que têm apenas dois lados opostos paralelos são chamados de ***trapézios***. Os mais comuns no nosso cotidiano são os ***trapézios isósceles,*** que têm os dois lados não-paralelos com a mesma medida.



E, como veremos depois, os ***trapézios retângulos***, que têm dois ângulos retos vizinhos. Aqui mesmo nesta aula já encontramos alguns trapézios retângulos: tanto o terreno do sr. Z quanto algumas das peças que seu Raimundo tem que preencher com os pedaços de tacos são trapézios retângulos. (Identifique-os na figura da introdução da aula.) Você se lembra de já ter encontrado alguma situação prática envolvendo um trapézio?

Já vimos aqui, inclusive, como um trapézio retângulo se transforma num retângulo. Qual é, então, a área de um trapézio retângulo cujos lados paralelos (suas ***bases***) medem **b** e **d**, e cuja altura (medida sobre o lado perpendicular a estes) é **a**? A figura mostra que:

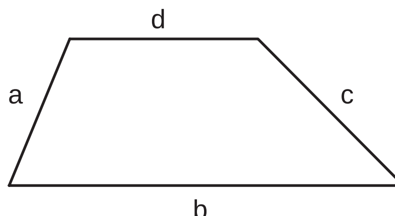


E quanto aos trapézios que não são retângulos: como calcular suas áreas? Como transformá-los em retângulos?

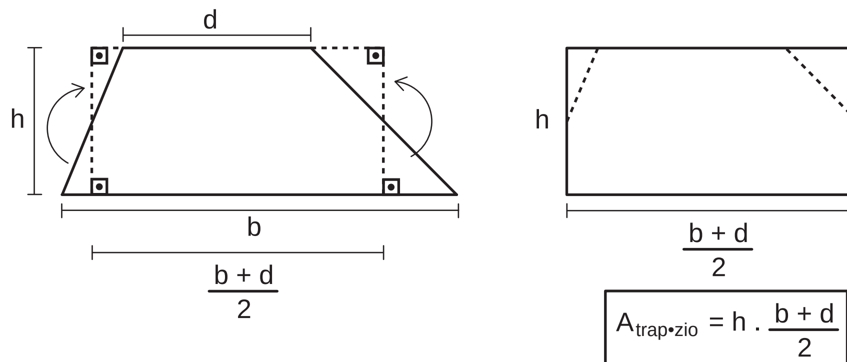
EXEMPLO 2

Faça cortes precisos neste trapézio, de modo que possamos reagrupar suas peças num retângulo.

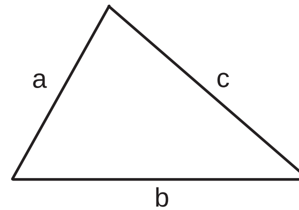
Sugestão: Que tal transformar o trapézio em dois trapézios retângulos? Deste ponto você já sabe como continuar sozinho.



Você constatará que a mesma fórmula vale também aqui: a área do trapézio é o produto de sua ***base média*** (isto é, o segmento que liga os pontos médios dos lados não-paralelos) pela altura (**h**, na figura):



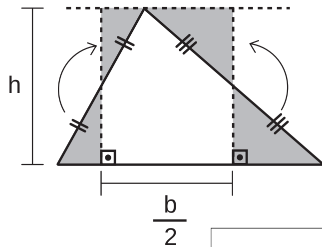
Área de triângulos



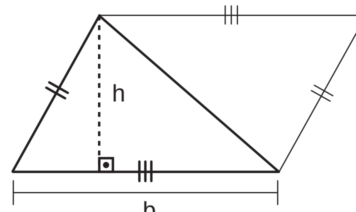
Como fazer para transformar um triângulo qualquer num retângulo, de forma que aprendamos a calcular sua área? Experimente com este triângulo: transforme-o em retângulo.

A solução pode ser inspirada na resposta que demos para o trapézio: basta anularmos o lado **d** que teremos um triângulo; assim, fazemos **d = 0**. Portanto, a área de um triângulo de base **b** e altura (relativa a essa base) **h** é $A = h \cdot \frac{b}{2} = \frac{b\ h}{2}$

De fato, ela é a metade da área do paralelogramo de onde tiramos dois triângulos desses.



$A_{\text{triângulo}} = \frac{bh}{2}$



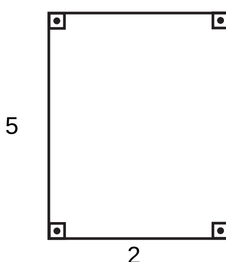
Lembre: $A_{\text{paral.}} = bh$

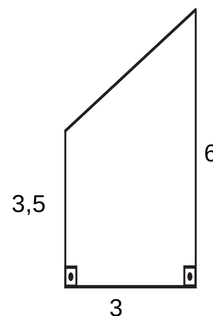
EXEMPLO 3

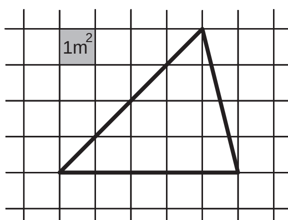
As questões que você verá neste exemplo também serão solucionadas no decorrer da aula. Atenção!

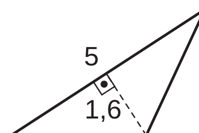
a) Calcule a área dos terrenos abaixo, considerando a medida de seus lados em metros (m).

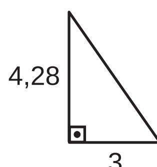
Sugestão: Quanto ao pentágono ABCDE: que tal dividi-lo em triângulos?

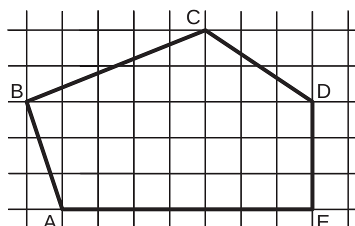




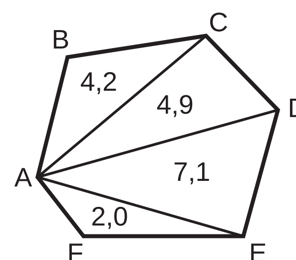




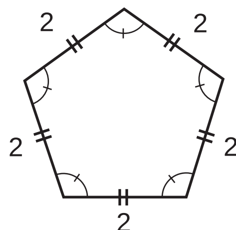




b) Dentro deste hexágono ABCDEF foram desenhados os triângulos ABC, ACD, ADE e AEF.
A área de cada triângulo (em cm) foi calculada pela fórmula dada anteriormente e está escrita no desenho. É apenas o rascunho da situação, sem as medidas reais. Qual é a área do hexágono ABCDEF?



c) Calcule a área deste pentágono regular (5 lados iguais e 5 ângulos iguais) cujo lado mede 2 cm. (Meça o que for preciso.)



Pent‡gono regular

EXEMPLO 4

Atenção: para a solução deste problema, acompanhe o desenrolar da aula. Seu Raimundo recebeu uma importante encomenda de trabalho: cobrir de mármore o piso de um salão. Acontece que o piso não tem a forma retangular; ele é um pentágono regular ("igual em todo canto", como diz seu Raimundo), onde cada lado mede 4 m. Como resolver este problema?

Área de outros polígonos

Dado um polígono de vértices ABCDE, representamos sua área por $\mathbf{A_{AB...E}}$. Usando essa notação, vamos à solução para o último terreno do **Exemplo 3a**. A área do pentágono ABCDE mede:

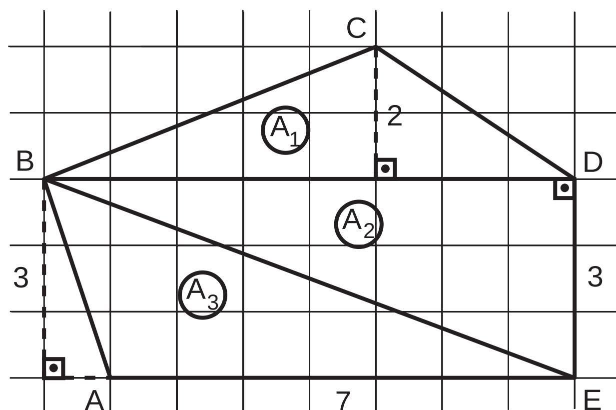
$$A_{ABCDE} = A_{BCD} + A_{BDE} + A_{ABE} \text{; ou}$$

$$= A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \frac{8 \times 2}{2} + \frac{8 \times 3}{2} + \frac{7 \times 3}{2}$$

$$= 8 + 12 + 10{,}5$$

$$= 30{,}5 \ (m^2)$$



Da mesma forma, a área do hexágono do **Exemplo 3b** é facilmente calculada, pois:

$$A_{ABCDEF} = A_{ABC} + A_{ACD} + A_{ADE} + A_{AEF}$$

$$= 4{,}2 + 4{,}9 + 7{,}1 + 2{,}0 = 18{,}2 \ (cm\ )$$

Repare que, com esses dois exemplos, estamos constatando dois fatos muito importantes no cálculo de áreas de polígonos. O primeiro é:

Qualquer polígono pode ser dividido num certo número de triângulos, número esse que depende do número de lados do polígono.

O segundo fato nós temos usado desde o começo da aula assumindo sua validade, mas sem comentá-lo. Trata-se do que veremos a seguir.

Soma e diferença de áreas

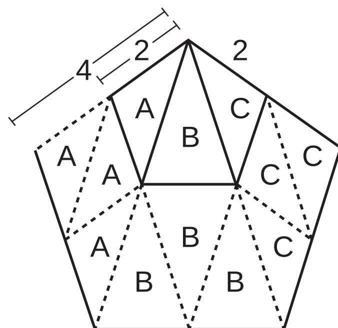
Quando reunimos duas figuras (sem superpô-las), a área da figura total é a soma das áreas de cada figura que a forma.

Por exemplo, trabalhando ainda com o **Exemplo 3**, a área do pentágono ABCDE (30,5 m) é a soma das áreas dos três triângulos (8 + 12 + 10,5).

"*E quanto ao problema do seu Raimundo?*", você poderia perguntar. Bem, veja que fica fácil resolvê-lo comparando a sala de 4 m de lado com o pentágono do **Exemplo 3c**).

Exercícios

Dividindo este último em três triângulos de áreas A, B e C e continuando esta divisão no pentágono do seu Raimundo (não importa que, aqui, **A = C**), vemos



uma coisa curiosa: existem exatamente quatro triângulos do tipo A, quatro do tipo B e quatro do tipo C. (Confira com papel e tesoura!). Logo, a área daquele salão é:

$$A_{\text{pentágono sr. Raimundo}} = 4\,A + 4\,B + 4\,C = 4\,(A + B + C)$$

$$= 4\,A_{\text{pentágono Exemplo 3c}}$$

$$= 4\,(6{,}8) = 27{,}2\ (\text{m}\ )$$

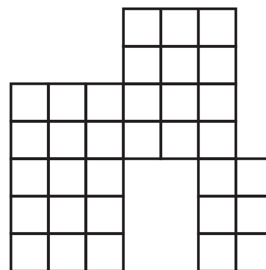
Quando multiplicamos por 2 cada lado do pentágono, sua área também fica multiplicada por 2? Não: a área fica multiplicada por 4! (E se cada lado é multiplicado por 3?) Isso diz respeito à soma de áreas: nós somamos as áreas quando reunimos figuras numa figura maior. Da mesma forma, quando retiramos uma figura de outra as áreas se subtraem.

Bem, isso encerra nossa aula de hoje. Talvez você devesse revê-la com cuidado emuma outra hora. É uma aula com muitos resultados importantes e úteis em nossa vida prática, no trato com tecidos, papel, madeira, terra etc.

Exercícios

Exercício 1

Calcule a área deste terreno desenhado em papel quadriculado:



a) Contando os quadradinhos de área unitária.

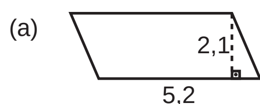
b) Separando-o em retângulos e calculando as respectivas áreas.

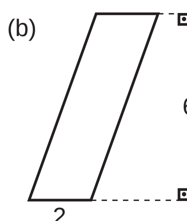
Exercício 2

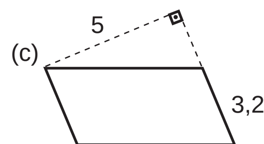
Tome 36 quadrados iguais, de papel, e forme retângulos usando, para cada retângulo, todos os quadrados. Se cada retângulo tem, portanto, 36 unidades de área, responda: Caso se tratasse de terrenos retangulares, qual deles gastaria menos cerca para cercá-lo completamente? (Qual deles tem menor perímetro?)

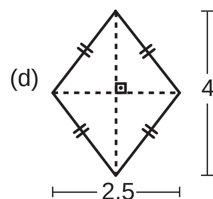
Exercício 3

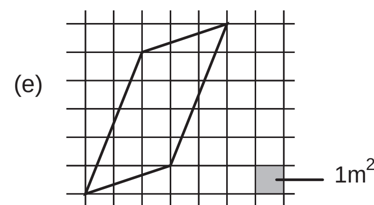
Calcule a área destes paralelogramos:

(a)


(b)


(c)


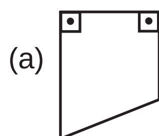
(d)


(e)


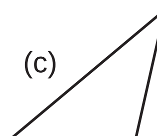
Exercício 4

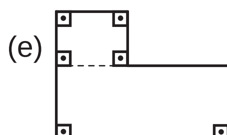
Transforme cada polígono abaixo num retângulo, recortando-o em pedaços e reagrupando-os:

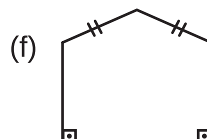
(Sugestão: Use tesoura e papel. No item (e), transforme primeiro os dois retângulos empilhados em um trapézio retângulo).

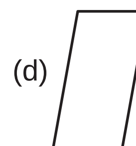
(a)


(b)


(c)


(e)


(f)


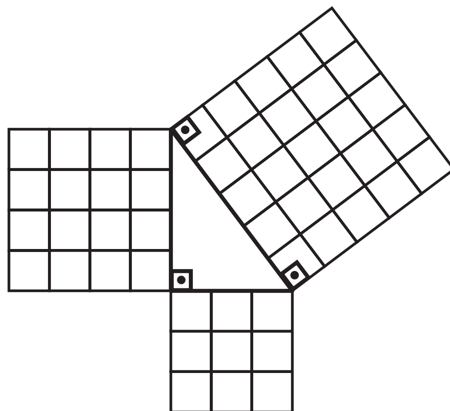
(d)


Exercício 5

É um fato da geometria que o triângulo construído com lados iguais a 3, 4 e 5 é um triângulo retângulo. Com cada um dos lados, construímos um quadrado, como mostra a figura.

a) O que podemos afirmar sobre as áreas dos três quadrados?

b) Para comprovar que essa afirmação é válida para qualquer triângulo retângulo, faça a mesma construção com qualquer outro triângulo retângulo, chamando os lados de **a**, **b** e **c**.



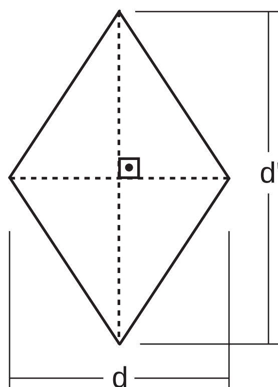
Exercício 6

a) Qual o número mínimo de triângulos em que pode ser dividido um pentágono? E um hexágono? (Antes de responder desenhe vários pentágonos, e para cada um deles, dê várias soluções. Faça o mesmo com hexágonos).

b) Qual o número mínimo de triângulos em que pode ser dividido um polígono de n lados? Reflita baseado no item a).

Exercício 7

Baseado em sua resposta para o Exercício 7d), "invente" uma fórmula que calcule a área de um losango cujas diagonais (que são perpendiculares) medem **d** e **d'** (lê-se: "**d** linha").



AULA

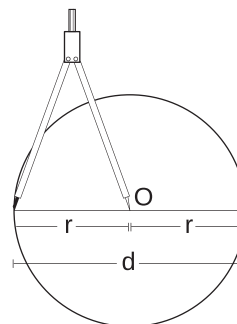
16

Comprimento e área do círculo

Introdução

Nesta aula vamos aprender um pouco mais sobre o círculo, que começou a ser estudado há aproximadamente 4000 anos. Os círculos fazem parte do seu dia-a-dia. A superfície de uma moeda e de um disco são exemplos de círculos.

Para desenhar um círculo utilizamos o ***compasso*** como você pode observar na ilustração ao lado.



A linha desenhada pelo compasso é conhecida como ***circunferência***. Ela é o contorno do círculo.

A medida da abertura do compasso é o ***raio*** do círculo ou da circunferência. A distância entre os dois pontos diametralmente opostos da circunferência é o ***diâmetro***, que vale o dobro do raio. Ainda hoje os astrônomos têm grande interesse em estudar os fenômenos da natureza que envolvem o círculo e suas partes. Observe esta matéria publicada no jornal *O Globo* em novembro de 1994.

Brasil terá no dia 3 imagem espetacular do eclipse solar

Astrônomos de todo o mundo têm encontro marcado na próxima quinta-feira, dia 3 de novembro, em Santa Catarina, quando estará ocorrendo um eclipse total do Sol.

A Lua se alinhará entre o Sol e a Terra e o disco solar ficará completamente encoberto pela Lua. A importância do fenômeno estará na possibilidade de estudar a física da coroa solar, a física da atmosfera e a calibração das órbitas (detalhes sobre a posição da Lua e da Terra).

Fenômeno será visto por poucos

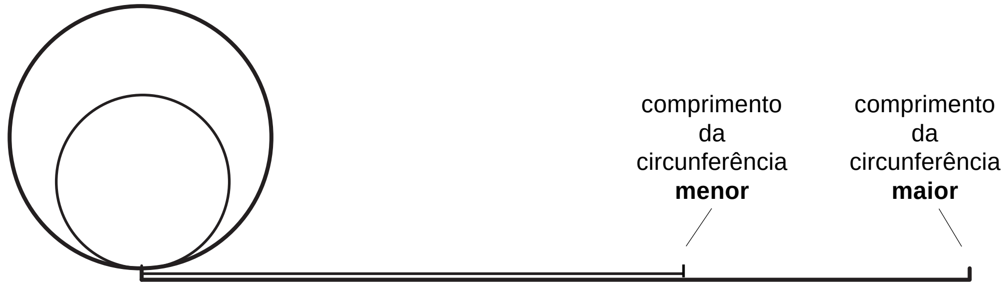
Eclipses ocorrem quando, do ponto de vista do observador, um astro se interpõe na frente de outro. Quando a Lua se alinha entre o Sol e a Terra, ocorre um eclipse do Sol. O eclipse só é total se o disco solar ficar completamente encoberto pela Lua. Esse fenômeno ocorre numa região relativamente pequena, de poucas centenas de quilômetros, se comparada aos 12.742 km de diâmetro médio da Terra.



Comprimento da circunferência

Medir o comprimento desta curva chamada circunferência é o nosso problema. Uma das maneiras de resolver um problema matemático é tentar compreendê-lo, observando suas propriedades e fazendo experiências. É desta forma que vamos encontrar uma expressão matemática para o cálculo do comprimento de qualquer circunferência.

Uma primeira olhada em várias circunferências nos leva a concluir que seu comprimento depende da medida do raio. É fácil notar que quanto maior o raio maior é o comprimento da circunferência.



Podemos partir desta observação para descobrir qual a relação matemática existente entre estas duas medidas.

No quadro abaixo foram anotadas algumas medidas dos comprimentos e diâmetros de várias circunferências. Na última coluna dividimos cada medida obtida do comprimento (**C**) pela medida do diâmetro correspondente (**d**).

OBJETO MEDIDO	C	d	$\frac{C}{d}$
FICHA TELEFÔNICA	6,9cm	2,2cm	3,13
FUNDO DE UM COPO	15,5cm	4,9cm	3,16
MESA DE JANTAR	4,40m	1,40m	3,14

Faça você mesmo mais algumas medidas e verifique se o resultado da divisão $\frac{C}{d}$ é sempre um número um pouco maior do que 3. Quanto mais precisas forem nossas medidas, mais próximo estaremos de um número constante conhecido como ***número pi***, cujo símbolo é π.

O número π é um número irracional cujo valor aproximado é 3,14. Na verdade este número possui infinitas casas decimais, mas na prática utilizamos apenas uma aproximação de seu valor.

π = 3,14159265358979323846264...
π @3,14

A partir deste resultado obtemos uma expressão geral:

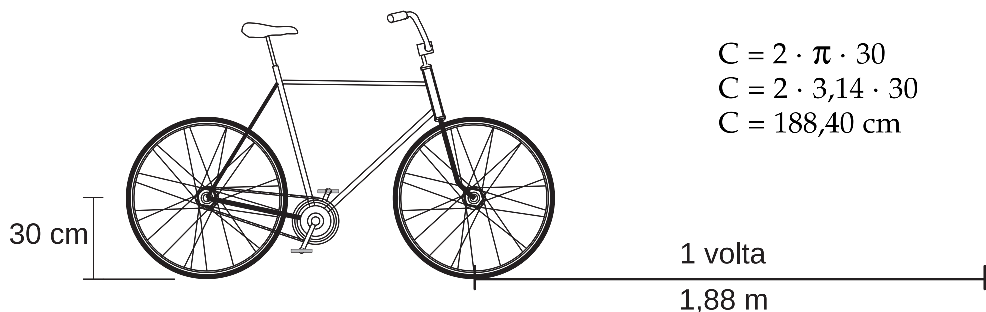
$$\frac{C}{d} = \pi$$

$$C = \pi d$$
$$C = \pi 2 r$$
$$\boxed{C = 2 \pi r}$$

EXEMPLO 1

Qual o comprimento da roda de uma bicicleta de aro 26?

Uma bicicleta aro 26 tem o raio de sua roda medindo 30 cm. Substituindo r = 30 cm na fórmula **C = 2 π r** temos:



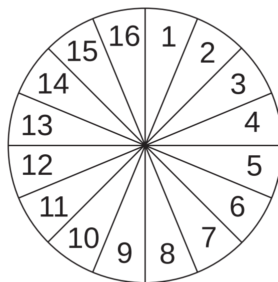
$C = 2 \cdot \pi \cdot 30$
$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30$
$C = 188{,}40$ cm

Observe este resultado: 188,40 cm = 1,884 m. Isso significa que uma volta completa da roda desta bicicleta equivale a uma distância de aproximadamente 1 metro e 88 centímetros.

Área do círculo

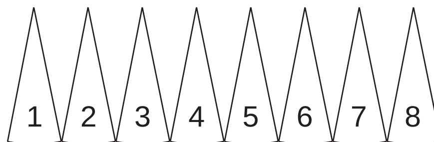
Da mesma forma que o comprimento da circunferência, a área do círculo depende da medida de seu raio.

Na aula 15 você aprendeu a fazer o cálculo da área de várias figuras planas. Para obter aquelas expressões, muitas vezes nós recortamos figuras e movemos suas partes para transformá-la em outra figura mais simples. Nós sempre podemos proceder desta maneira para encontrarmos a área de qualquer figura. É o que faremos também com o círculo.

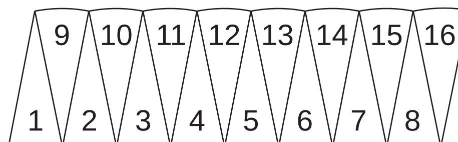


Dividimos o círculo ao lado em 16 partes iguais. Cada uma destas partes é denominada ***setor circular***.

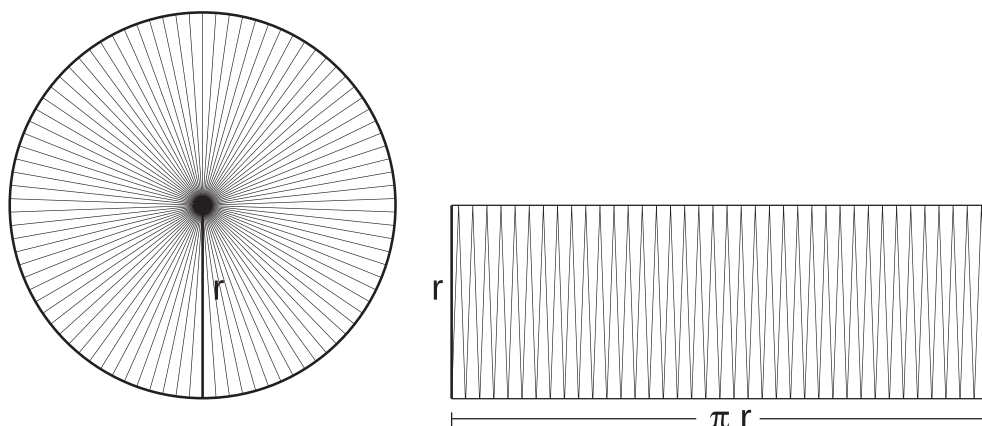
Podemos pegar a metade destes setores e rearrumá-los como na figura abaixo.



A outra metade pode ser encaixada sobre esta, de forma a não deixar espaços vazios.



Essa figura ainda não é um quadrilátero, pois dois de seus lados são formados por arcos sucessivos e não por segmentos de reta. No entanto, usando um pouco a imaginação, podemos dividir nosso círculo em setores circulares cada vez menores:



çrea do c’rculo ≅ çrea do ret‰ngulo

Repetindo o que fizemos com as 16 partes vamos pegar a metade dos setores em uma certa posição e encaixarmos sobre estes a outra metade. Note que nos aproximamos muito mais de um retângulo de altura igual ao raio e comprimento igual a metade do comprimento da circunferência deste círculo.

$$A = \pi r \cdot r$$

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

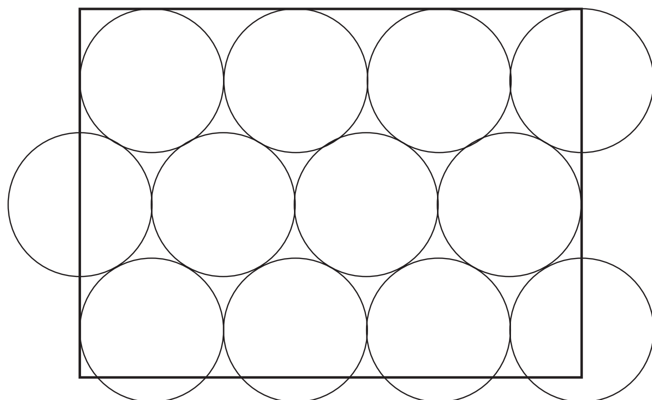
EXEMPLO 2

Quantos círculos de raio igual a 10 cm poderão ser cortados em uma cartolina de 70 cm por 50 cm?

- Área da cartolina = 70 × 50 = 3500 cm
- Área do círculo = 3,14 × 10 = 3,14 × 100 = 314 cm

Para calcular quantos círculos de 314 cm de área cabem num retângulo de 3500 cm de área dividimos 3500 por 314, o que equivale a aproximadamente 11,15. Isto significa que cabem 11 círculos e, como era de esperar, sobra cartolina.

No entanto, este problema nos faz relacioná-lo com um outro. Como devo desenhar estes círculos para aproveitar a cartolina ao máximo?

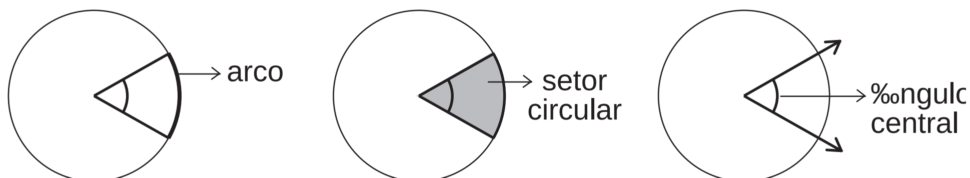


Para você pensar:

O que se pode concluir desmembrando a figura ao lado? É realmente possível desenhar 11 círculos de 10 cm de raio nesta cartolina? Por quê?

Comprimento do arco e área do setor circular

Muitas vezes estamos interessados em calcular apenas o comprimento de uma parte da circunferência (arco) ou a área de uma "fatia" do círculo (setor circular).



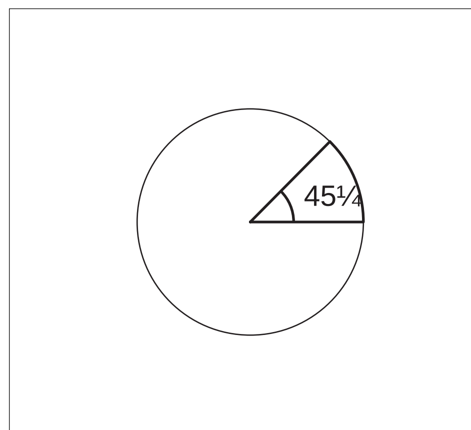
A todo arco está associado um ângulo central e a todo setor também corresponde um ângulo central. O ângulo central é aquele que tem o vértice no centro da circunferência.

O ângulo central máximo, que corresponde a uma volta completa e está associado à circunferência toda, mede 360º.

Sabendo disto, utilizamos o método de cálculo conhecido por ***regra de três*** para calcular o comprimento de um arco ou a área de um setor. Para tanto basta conhecer a medida do ângulo central correspondente.

EXEMPLO 3

O círculo ao lado tem raio medindo 2 cm. Vamos calcular a área de um setor circular de 45º.



Área do círculo = π (1,5) $\cong$ 7,065 cm

Área do setor = S = ?

7,065cm ——— 360º
S ——— 45º

$$S = \frac{7,065 \text{ x } 45°}{360°} @ 0,883\text{cm}^2$$

Usando novamente a regra de três podemos calcular o comprimento do arco, que corresponde ao ângulo de 45º nesta circunferência.

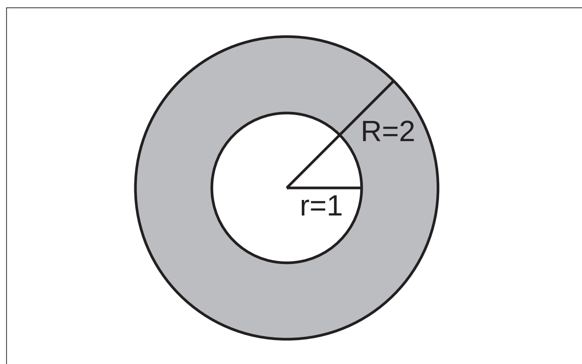
Comprimento da circunferência = $2 \cdot \pi \cdot 1,5 \cong 9,42$ cm
Comprimento do arco = c

9,42 ——— 360º
c ——— 45º

$$c = \frac{9,42 \text{ x } 45°}{360°} @ 1,1775\text{cm}^2$$

Área da coroa circular

Como você leu na reportagem do início desta aula, coroa circular é a parte compreendida entre as circunferências de dois círculos de mesmo centro.



Na figura ao lado, a parte pintada é uma coroa circular. A área da coroa circular é calculada subtraindo-se as áreas dos dois círculos que a formam.

Nesta figura temos :
Área do círculo maior = $\pi \cdot 2$ ≅ 12,56 cm
Área do círculo menor = $\pi \cdot 1$ ≅ 3,14 cm
Área da coroa circular = 12,56 - 3,14 = 9,42 cm

Podemos escrever, de uma forma geral, que a área A de uma coroa circular é **$A = \pi R - \pi r$** ou **$A = \pi (R - r)$**, onde **R** é o raio do círculo maior e **r** é o raio do círculo menor.

Razão entre áreas

Uma pizza com 20 cm de diâmetro custa R$ 4,80. Quanto você espera pagar por uma outra do mesmo sabor com 30 cm de diâmetro ?

Observe que o diâmetro da pizza maior é igual a 3/2 do diâmetro da menor:

$\frac{3}{2}$ de 20 = (20 : 2) × 3 = 30

No entanto, se você respondeu R$ 7,20 = (3/2) · 4,80 sua resposta está errada, pois, para o cálculo do preço, o que interessa é a razão entre as áreas das pizzas:

Área da pizza menor = 3,14 · (20) = 1256 cm
Área da pizza maior = 3,14 · (30) = 2826 cm

Razão entre as áreas = $\frac{2826}{1256} = \frac{9}{4}$

Vemos então que a área da pizza maior é 9/4 da área da menor. Portanto, o preço da maior deve ser 9/4 do preço da pizza menor.

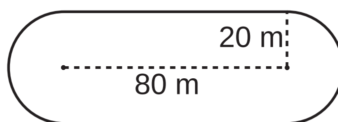
$$\frac{9}{4} \cdot \text{R\$ } 4{,}80 = \text{R\$ } 10{,}80$$

Conclusão: a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os comprimentos (diâmetro ou raio). Neste exemplo, $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Exercícios

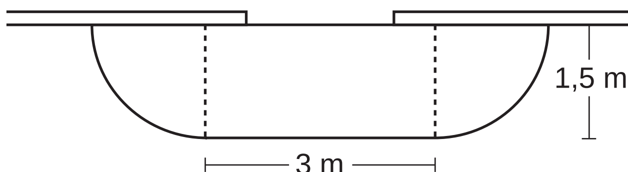
Exercício 1

Calcule o comprimento da pista de atletismo representada na figura abaixo.



Exercício 2

Calcule a área da varanda representada na figura abaixo



Exercício 3

O comprimento da linha do equador da Terra tem aproximadamente 40.000 km. Qual é o raio da Terra?

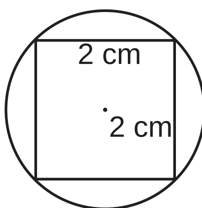
Exercício 4

Se o raio de um círculo é o triplo do outro, quantas vezes a área do primeiro é maior que a do segundo?

Exercício 5

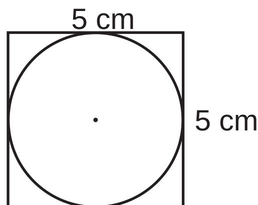
Calcule a área do círculo nas figuras abaixo.

a)



circunferência circunscrita

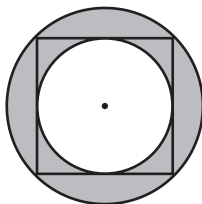
b)



circunferência inscrita

Exercício 6

Determine a área da coroa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita num mesmo quadrado de lado $\ell = 4$ cm



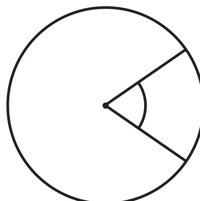
Exercício 7

Num círculo de raio r = 10 cm, calcule :

a) o comprimento de um arco com $\alpha = 45^o$

b) a área de um setor circular com $\alpha = 60^o$

c) a área de um setor circular com $\alpha = 120^o$



Exercício 8

Uma pizza tem raio igual a 15 cm e está dividida em 6 fatias. Calcule a área de cada fatia.

Exercício 9

Uma praça circular tem 200 m de raio. Quantos metros de grade serão necessários para cerca-lá?

Exercício 10

Numa bicicleta de aro 26 (como no exemplo desta aula), quantas voltas completas as rodas precisam dar para um percurso de 3,76 km?

AULA

17

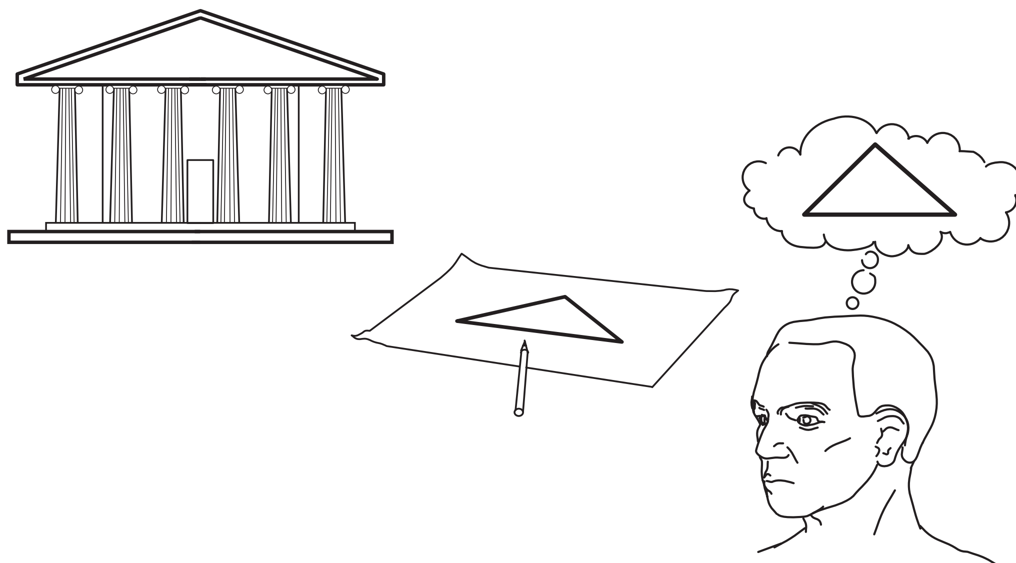
O Teorema de Tales

Introdução

A ciência, tão fundamental na era moderna, teve seu início por volta do ano 600 a.C. na cidade de Mileto, Grécia, especialmente com de Tales de Mileto. Tales era filósofo, geômetra, astrônomo, físico, político e comerciante, e acredita-se que tenha nascido no ano 625 a.C. Não se sabe ao certo em que ano morreu.

Foi ele quem primeiro chamou a atenção para o aspecto abstrato dos objetos geométricos, ao considerar um triângulo ou uma pirâmide, por exemplo, não como coisas concretas, feitas de madeira ou pedra, mas como objetos do nosso pensamento. Uma de suas descobertas no campo filosófico foi a de que "não apenas os homens estão sujeitos a leis, mas também a Natureza". E apontando para a sombra dos degraus de um estádio desportivo, teria dito: "Os ângulos dos degraus obedecem a uma lei: são todos iguais". (Depois veremos esse exemplo com maiores detalhes.)

Assim, uma das idéias deste grande filósofo e matemático é esta: uma lei que se aplique a triângulos vale tanto para triângulos de construção (por exemplo, a construção de uma casa) como para aqueles desenhados (a planta da casa) e mesmo para triângulos..."imaginários", como ele se referia aos triângulos abstratos, os do nosso pensamento, aqueles com que de fato lida a geometria.

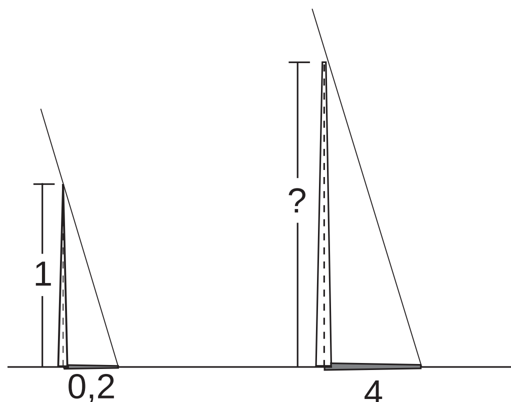


Outra importantíssima característica do pensamento de Tales é que estas leis matemáticas - ou ***teoremas***, como são chamadas - devem ser provadas (ou demonstradas) por um raciocíonio lógico. (E não apenas explicadas com argumentos religiosos ou míticos, como se fazia até então em lugares antes mais desenvolvidos, como o Egito e a Babilônia.) Desse modo, Tales procurava sempre demonstrar cada uma de suas afirmações novas baseando-se em outras afirmações já demonstradas, outros teoremas, formando assim cadeias de raciocínio.

Nesta aula você terá a oportunidade de redescobrir alguns desses teoremas bastante interessantes e úteis na vida prática que são atribuídos a Tales, especialmente aquele que ficou conhecido com seu nome: o Teorema de Tales.

Você ficará surpreso ao ver quantas aplicações diferentes existem destes teoremas: desde o cálculo da altura de prédios e outras distâncias inacessíveis (veja a aula 20) até o modo certo de aumentar a feijoada! Como veremos, tudo isso trata de proporcionalidade de números (ou ***regra de três***). Na realidade, o Teorema de Tales é "a figura da regra de três". Mas... cada coisa a seu tempo!

Conta-se que, numa viagem ao Egito, Tales foi desafiado pelos sacerdotes egípcios a explicar como "adivinhara" a altura de uma das pirâmides. Os sacerdotes acreditavam que essa informação era sagrada e havia sido inadvertidamente fornecida a ele, que, por esse motivo deveria ser preso. Tales explicou seu raciocínio exemplificando-o com o cálculo da altura de um obelisco cuja sombra era mais fácil de ser medida. Aqui está o problema para você tentar responder: Em certo momento do dia, uma vareta de 1 m, espetada verticalmente no chão, faz uma sombra que mede 20 cm. No mesmo instante, um obelisco de pedra, ali perto, faz uma sombra de 4 m. Qual a altura do obelisco?

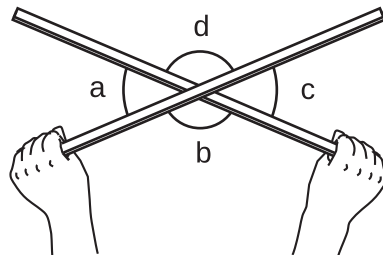


Atenção: como o Sol está muito longe de nós, podemos considerar seus raios como retas paralelas. Tente encontrar o que se pede trabalhando com papel quadriculado e régua.

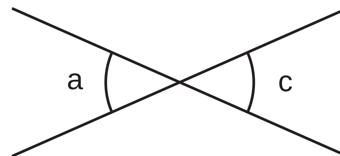
Nossa aula

Ângulos opostos pelo vértice

Um dos teoremas atribuídos a Tales é muito simples de ser entendido concretamente: quando seguramos uma vareta de madeira em cada mão e cruzamos essas varetas estamos representando retas concorrentes. Independentemente da abertura que você dá às varetas, elas sempre formam, à sua esquerda e à direita, dois ângulos (opostos pelo vértice) iguais.



Duas varetas formam
4 ângulos, opostos
dois a dois

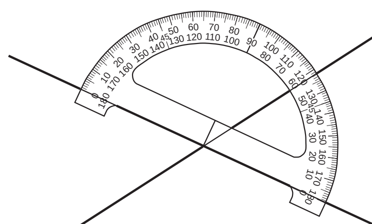


Quanto mede cada
um destes dois ângulos
opostos pelo vértice?

$\hat{a}$ =....

$\hat{c}$ =....

Lembre: Como se mede um ângulo com transferidor:



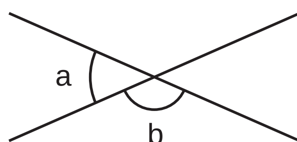
Exemplo: O menor dos ângulos que estas retas formam mede 58º. O maior mede 180º - 58º=122º.

"Por que ângulos opostos pelo vértice são sempre iguais?", Tales se perguntou. Podemos explicar isso do seguinte modo, baseando-se na figura do transferidor: os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ formam juntos um ângulo de 180º (ângulo raso), que chamamos de ângulos suplementares (veja a figura abaixo); da mesma forma, também $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são ângulos suplementares. Ou seja:

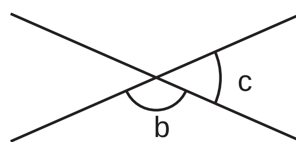
$\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ$; então $\hat{a} = 180^\circ - \hat{b}$

$\hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$; então $\hat{c} = 180^\circ - \hat{b}$

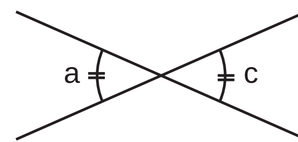
Conclusão : $\hat{a} = \hat{c}$ (C.Q.D.!)



$\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ$



$\hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$

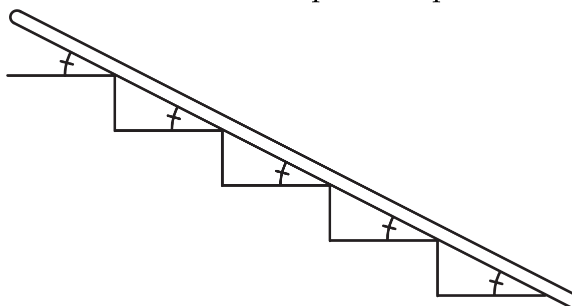


Logo: $\hat{a} = \hat{c}$

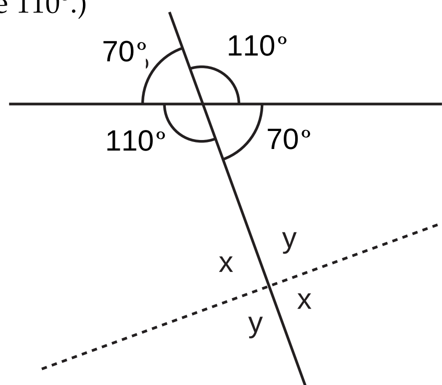
Sobre duas retas concorrentes não há muito mais o que dizer: dos quatro ângulos que se formam, quaisquer dos ângulos vizinhos são suplementares e quaisquer dos ângulos opostos pelo vértice são iguais. Assim, vamos estudar agora o que ocorre quando acrescentamos uma terceira reta a estas duas, paralela a uma delas.

Retas paralelas cortadas por uma transversal

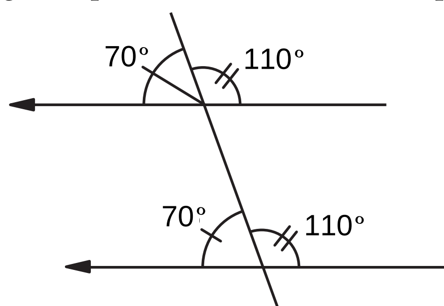
Júnior é um garoto esperto. Outro dia, no "velho Maracanã", ele mostrava ao tio (com quem conversa muito sobre seus estudos) os ângulos formados nos degraus do estádio. Ele ilustrou seu raciocínio deitando o pau da bandeira de seu clube atravessado em relação aos degraus. Visto de lado, o pau da bandeira forma ângulos iguais com todos os degraus. Vemos também que isso só acontece porque os degraus são todos horizontais, e portanto paralelos.

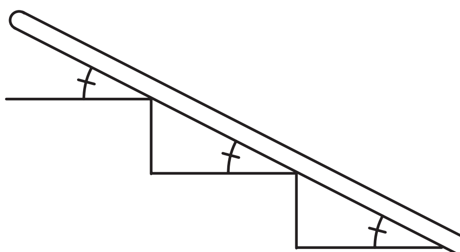


Voltemos, então, ao que acontece quando acrescentamos uma terceira reta às duas retas concorrentes do início da aula. De modo geral, a terceira reta formará quatro novos ângulos (dois pares), diferentes dos ângulos das retas iniciais... (Meça os ângulos **x** e **y** da figura abaixo, e compare-os com os ângulos iniciais, que medem 70º e 110º.)



Mas há uma posição especial na terceira reta em que **x** e **y** medem precisamente 70º e 110º: quando a terceira reta é paralela a uma das retas. (Como os degraus que Júnior viu no estádio, que são paralelos).





Esta experiência do garoto pode ter sido vivida também por Tales de Mileto, que há 2600 anos enunciou:

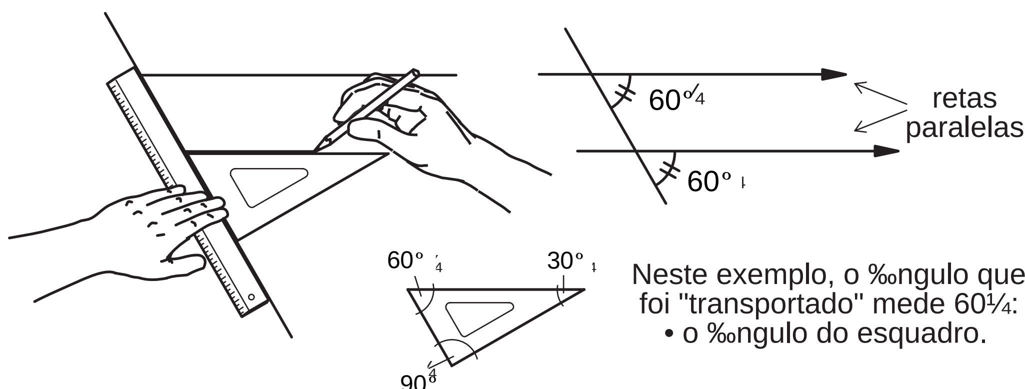
Quando retas paralelas são cortadas por uma reta transversal, os ângulos formados numa das retas paralelas são correspondentes e iguais aos ângulos da outra.

É fácil verificar isso concretamente. A seguir, o item sobre a aplicação prática no desenho técnico mostra como o ângulo de uma das retas paralelas é "transportado" pela reta transversal até encaixar-se no ângulo da outra reta. Por isso os ângulos são correspondentes e iguais.

Uma aplicação prática no desenho técnico

Na verdade, você pode verificar experimentalmente (como fez acima, ao medir os ângulos) que a ***recíproca*** desta afirmação também é verdadeira. Ou seja: quando os ângulos são correspondentes e iguais, então as retas são paralelas. Desenhe ângulos correspondentes e constate o paralelismo das retas.

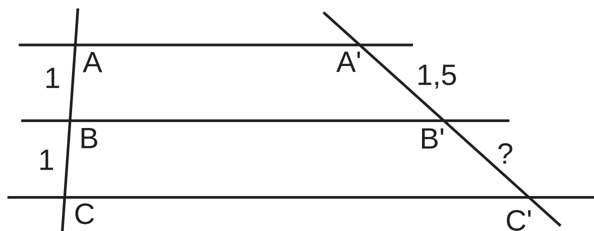
Este novo fato tem uma aplicação prática muito usada no desenho técnico, como, por exemplo, no desenho da planta de uma casa. Para traçar retas paralelas seguramos a régua e o esquadro e riscamos as retas, como mostra a figura:



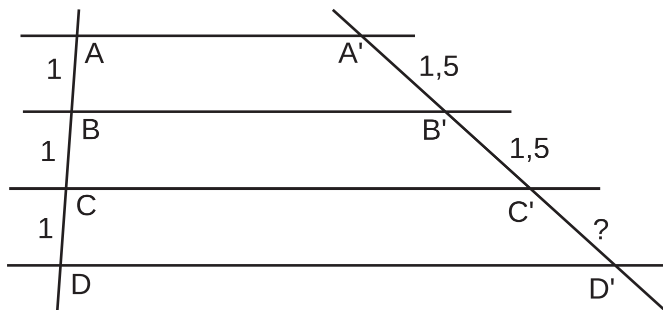
Segmentos proporcionais

Vimos o que acontece com os ângulos quando duas retas parelelas são cortadas por uma reta transversal: eles são transportados de uma das retas paralelas à outra. Vejamos o que ocorre quando não duas mas três retas são paralelas: como você já sabe, os ângulos formados em todas as três são iguais. Mas não apenas isso; agora também formam-se segmentos.

Na figura a seguir, eles estão representados por AB e BC. Algo muito interessante aconteceu. Se AB e BC forem iguais (no exemplo AB = BC = 1 cm) e traçarmos qualquer outra reta transversal, então os dois novos segmentos A'B' (lê-se: "A linha, B linha") e B'C'-serão.... (meça B'C'; e compare-o com A'B', que neste exemplo mede 1,5 cm. Então conclua a frase anterior.)

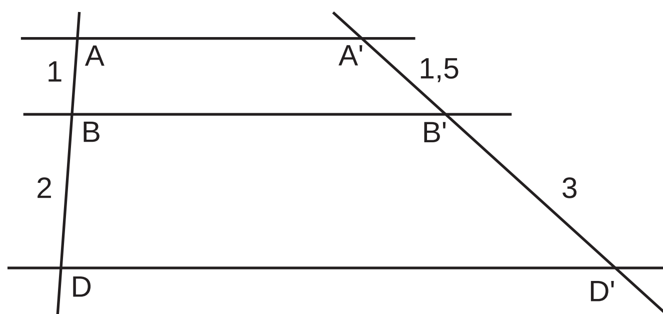


A′B′ e B′C′ também serão iguais isto é, B′C′ = 1,5 = A′B′. Da mesma forma, se traçássemos uma quarta reta paralela passando pelo ponto D tal que também CD = 1, então quanto mediria C′D′? É claro que, pelo mesmo motivo, C′D′ = 1,5 = B′C′=A′B′.



Podemos enunciar isto da seguinte maneira: quando um feixe (isto é, um conjunto de três ou mais retas) de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, se os segmentos numa das retas forem iguais, (no exemplo, AB = BC = CD = 1), então os segmentos na outra reta também o serão (A′B′=B′C′=C′D′=1,5).

"Mas, e se os segmentos na primeira reta não forem iguais? Como no exemplo acima, onde AB = 1 cm e BD = 2 cm o que podemos dizer sobre A′B′ e B′D′ (além do fato de que também não são iguais)? Veja a figura abaixo: se A′B′ = 3 cm, temos B′D′ = 6 cm. Olhe para estes quatro números da figura: 1; 2; 1,5 e 3. Tomados nesta ordem, formam duas frações iguais: $\frac{1}{2} = \frac{1,5}{3}$.

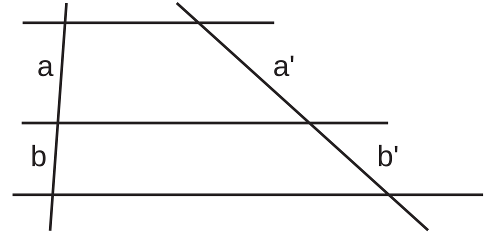


Dizemos que estes quatro números são ***números proporcionais***, e escrevemos : "1:2 :: 1,5:3". (Lê-se: "1 está para 2, assim como 1,5 está para 3). Assim, os segmentos que têm estas medidas, na figura representados respectivamente por AB, BC, A′B′ e B′C′, são segmentos proporcionais. De um modo geral, definimos: AB e BC são ***segmentos proporcionais*** a A′B′ e B′C′ (nesta ordem), se $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

O Teorema de Tales

Como se pôde ver na última figura da página anterior, o feixe de retas paralelas "transporta" uma razão de segmentos: ali, a razão dos segmentos AB e BC (no caso, $\frac{1}{2}$) é igual à razão dos segmentos A'B' e B'C' ($\frac{3}{6}$). O Teorema de Tales fala exatamente isso:

Quando três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, os segmentos determinados numa das retas transversais são proporcionais aos segmentos determinados na outra.



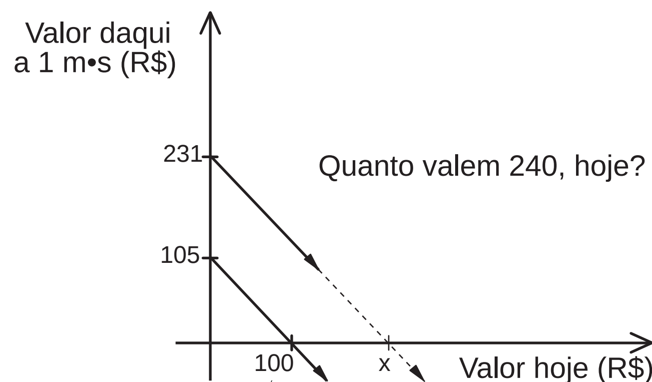
Teorema de Tales: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

(se as três retas forem paralelas.)

Uma "aplicação rendosa" do Teorema de Tales

Dona Tetê quer saber qual entre dois crediários é o mais vantajoso. Na Loja X um aparelho de som custa R$ 410,00 à vista. Já na Loja Y, o mesmo aparelho de som sai por duas parcelas a primeira de R$ 200,00 e a segunda, no próximo mês, de R$ 231,00. Considerando que a inflação prevista é de 5% no próximo mês, qual dos dois crediários sai mais "em conta" para dona Tetê?

Dona Tetê pode resolver este problema com um gráfico, se quiser visualizar os números com que está trabalhando. Veja como:



Os valores em reais no próximo mês serão proporcionais aos valores de hoje devido à inflação. Assim se chamamos de **x** o valor correspondente hoje aos R$ 231,00 do próximo mês, podemos escrever: $\frac{100}{x} = \frac{105}{231}$

Temos uma regra de três. Portanto, para achar **x** podemos usar a fórmula "o produto dos meios (**x** e **105**) é igual ao produto dos extremos (**100** e **231**)".

Logo, 105 x = 23.100, e então x = 220. Se dona Tetê traçar, pelo valor 240 do gráfico, uma reta paralela à que liga o 105 (daqui a um mês) ao 100 (hoje), encontrará precisamente 220 no eixo do hoje. Isso significa que, em valores de hoje, os R$ 231,00 que dona Tetê pagaria no próximo mês equivalem a R$ 220,00. Assim, o crediário Y está pedindo 200 + 220 = R$ 420,00 pelo aparelho de som, enquanto no crediário X o compramos por R$ 410,00 que é, portanto, o mais vantajoso dos dois para o bolso do consumidor. É, dona Tetê: mais R$ 10,00 para o nosso "crédito de gratidão" ao mestre Tales de Mileto, não é mesmo?

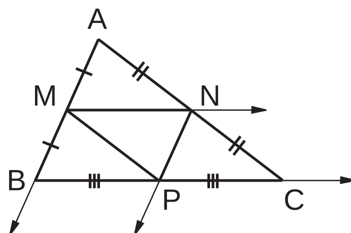
Semelhança de Triângulos

Se aplicarmos o Teorema de Tales num triângulo qualquer vamor obter resultados bastante interessantes e reveladores sobre os triângulos. Sendo ABC um triângulo, traçamos por M, ponto médio de AB, uma reta paralela ao lado BC e encontramos N. Então:

$\underbrace{\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}}_{1}$; logo, AN = NC, e N é o ponto médio do segmento.

Analogamente, uma reta passando por N paralela a AB nos indica P, ponto médio de BC: BP = PC = $\frac{BC}{2}$. Mas, como BMNP é um paralelogramo,

$$MN = \frac{BC}{2} = BP = PC$$



Pelo mesmo raciocínio vemos que NP = AM = MB e MP = AN = NC. Isso significa que se você desenhar o triângulo, cujos vértices são os pontos médios do triângulo maior, verá que são formados quatro triângulos... Todos iguais! (Lembre-se que ABC é um triângulo qualquer.)

É comum dizer "triângulos congruentes" (bem como "segmentos congruentes") no lugar de "iguais". Mas alguns professores hoje estão abandonando este termo.

Estes quatro triângulos são iguais, pois têm os três lados e os ângulos respectivamente iguais, conforme nos garante o teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal. (Assinale esses ângulos iguais na figura anterior e depois nesta abaixo.)



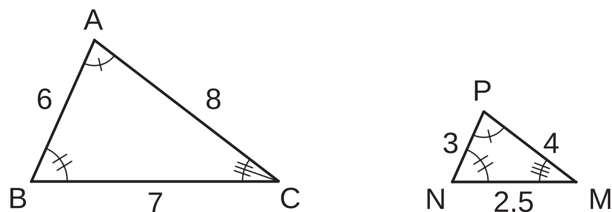
Exercícios

Exercício 1

No triângulo ABC da figura acima, temos AB = 6 cm, AC = 8 cm e BC = 7 cm. Quanto medem os lados PNM (nas mesmas unidades)?

MN = ...
NP = ...
PM = ...

Cada lado de PNM é a metade de um dos lados de ABC, conforme as figuras acima nos mostraram. Assim, cada novo lado de PNM é obtido tomando-se a mesma razão ($\frac{1}{2}$) em relação a um lado do triângulo incial ABC. Observe que apesar dos dois triângulos ABC e PNM não serem iguais eles têm os mesmos ângulos.



Quanto aos ângulos:

$\hat{P} = \hat{A}$

$\hat{N} = \hat{B}$

$\hat{M} = \hat{C}$

Quando aos lados:

$$\frac{PN}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{PM}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{NM}{BC} = \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2}$$

Neste caso, dizemos que ABC e PNM são triângulos semelhantes e a razão da semelhança do segundo triângulo em relação ao primeiro é $\frac{1}{2}$.

De um modo geral, dizemos que dois triângulos - vamos chamá-los de A’B’C’ e ABC, para dizer que A’ corresponde a A, B’ corresponde a B, e C’ a C - são ***triângulos semelhantes***, quando:

- os ângulos de A’B’C’ e ABC são correspondentes e iguais: $\hat{A}' = \hat{A}$, $\hat{B}' = \hat{B}$, $\hat{C}' = \hat{C}$ ou
- os lados de A’B’C’ e ABC são correspondentes e proporcionais:

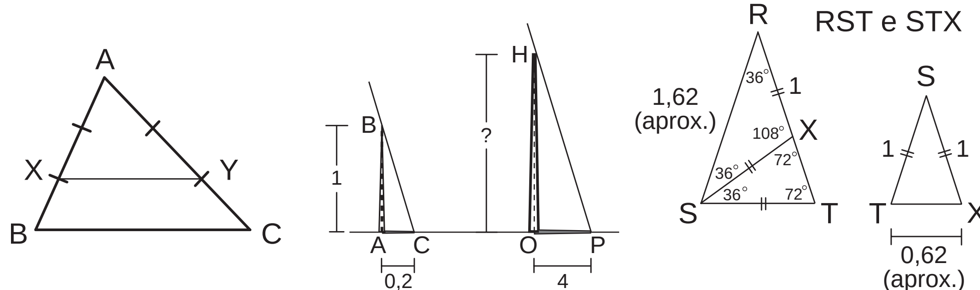
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Esta razão constante é a ***razão de semelhança*** de A’B’C’ para ABC.

Dá para perceber que dois triângulos semelhantes têm sempre a mesma forma, sendo um deles uma ampliação ou uma redução do outro. No exemplo acima, PNM é metade de ABC. Que tal agora reler a aula e fazer os exercícios?

Exercício 2

Estes pares de triângulos são triângulos semelhantes. Encontre a razão de semelhança do segundo triângulo para o primeiro:



a) ABC e AXY

$\frac{AX}{AB} = ...$

$\frac{AY}{AC} = ...$

$\frac{XY}{BC} = ...$

b) OHP e ABC

$\frac{AB}{OH} = \frac{AC}{OP} = ...$

c) RST e STX

$\frac{SX}{RT} = ...$

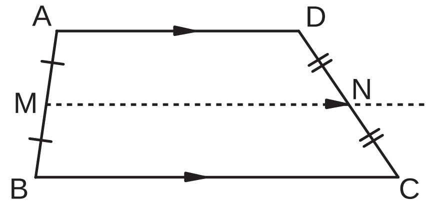
$\frac{TX}{ST} = ...$

São a mesma razão?

Sugestão: Já que os lados de ABC estão divididos em 3 partes iguais, divida ABC em 9 triângulos iguais.

Exercício 3

Seja ABCD um trapézio de bases BC e AD e M o ponto médio de AB



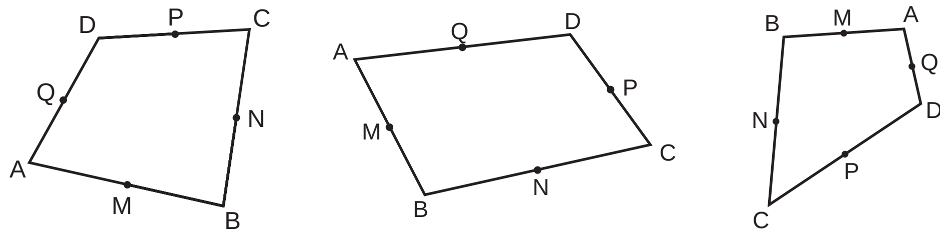
a) Qual dos teoremas desta aula nos garante que, se traçarmos por M uma reta paralela às bases do trapézio encontraremos N, também ponto médio (de CD)?

b) Por que MN é chamada de "base média" do trapézio? Como calcular MN?

c) Meça AD, BC e MN na figura, e confirme sua resposta para o item b).

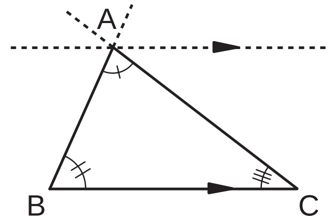
Exercício 4

Que tipo de quadrilátero é MNPQ, formado pelos pontos médios de cada lado de ABCD?



(Sugestão: Trace, nos quadriláteros as diagonais AC e BD; depois use esta aula para mostrar que os lados de MNPQ são paralelos a essas diagonais. Logo...)

Exercício 5



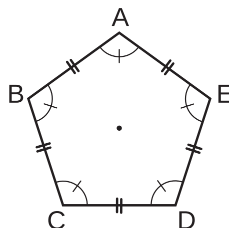
a) Seja ABC um triângulo qualquer. Trace uma reta paralela a BC passando por A. Usando os teoremas desta aula, "transporte" os ângulos B e C para junto do ângulo A e mostre que A, B e C formam um ângulo raso; isto é, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$.

b) Seja ABCD um quadrilátero qualquer. Que fórmula podemos deduzir para a soma de seus ângulos?
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} =$ .....
(Sugestão: Como aprendemos a fazer com outros polígonos: divida ABCD em triângulos.)

c) Se ABCDE é um pentágono qualquer, então $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} =$ .....
Dê exemplo.

d. Quanto mede a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados? (Sugestão: Observe os itens anteriores: triângulo (**n = 3**), quadrilátero (**n = 4**) e pentágono (**n = 5**) depois, responda o que se pede para **n** genérico, testando sua fórmula nestes três casos já respondidos.)

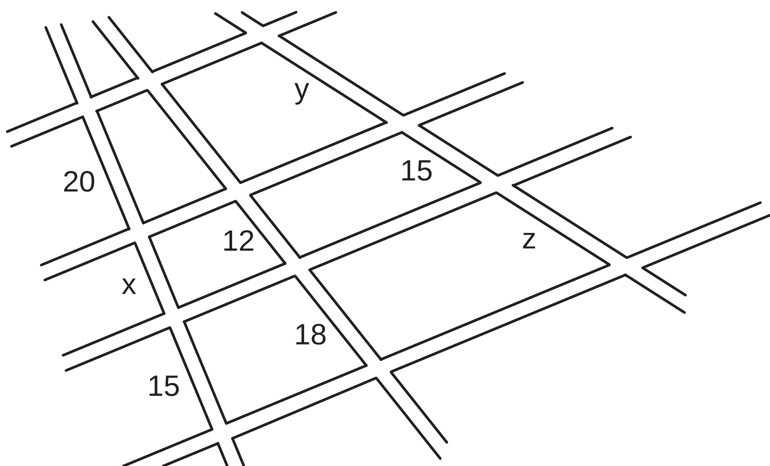
Exercício 6



a) Se ABCDE é um pentágono regular, isto é, de lados iguais e ângulos iguais, então $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} =$ .... (Rever o **Exercício 5c**.)
b) Encontre os ângulos do triângulo ACD.
c) Você já viu um triângulo semelhante a esse nesta aula?

Exercício 7

Este mapa mostra quatro estradas paralelas que são cortadas por três vias transversais. Algumas das distâncias entre os cruzamentos dessas vias e estradas estão indicadas no mapa (em km), mas as outras precisam ser calculadas. Complete o mapa com as distâncias que faltam.



Exercício 8

Dados os números **a**, **b**, **c** e **d**, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, escrevemos também **a : b :: c : d** (e lê-se: **a** está para **b**, assim como **c** está para **d**). Em cada item abaixo, escreva V ou F conforme ele seja verdadeiro ou falso. Os quatro números dados são, na ordem em que aparecem, números proporcionais?

a) 1:3 :: 2:4 ( ) (Que relação esta proporção tem com 1:2 :: 3:6?)
b) 6:2 :: 3:1 ( ) (idem.)
c) 3:1 :: 2:6 ( )
d) 10:12 :: 20:26 ( )
e) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: 3 : 2$ ( )

Exercício 9

Uma propriedade dos números proporcionais afirma que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Ilustre esta propriedade com uma figura e meça todos os segmentos que aparecem: a, b, c, d, a + c e b+d.
Sugestão: “Pegue carona” em alguma figura da aula de hoje.

AULA

18

A raiz quadrada

Introdução

Qual é o número positivo que elevado ao quadrado dá 16? Basta pensar um pouco para descobrir que esse número é 4.

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

O número 4 é então chamado ***raiz quadrada*** de 16, e essa operação, chamada de ***radiciação***, é representada assim:

$$\sqrt{16} = 4$$

Vamos agora explorar um pouco mais este exemplo pedindo ao leitor para resolver a equação

$$x^2 = 16$$

Lembre que resolver uma equação significa encontrar ***todos*** os valores que, se colocados no lugar do **x**, tornam a igualdade correta. Já sabemos que $x = 4$ é uma solução porque $4^2 = 16$. Já que, também,

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

descobrimos que a equação $x^2 = 16$ tem ***duas*** soluções: $x = 4$ e $x = -4$. Então, toda vez que tivermos uma equação desse tipo, nós a resolveremos assim:

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Observe que o símbolo **±4** (lê-se: mais ou menos 4) representa dois números: o **4** e o **- 4**, que são as duas soluções da equação dada.

Vamos então explorar a raiz quadrada e ver algumas aplicações. Em primeiro lugar, observe os exemplos a seguir:

Nossa aula

$\sqrt{9} = 3$	porque	$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
$\sqrt{100} = 10$	porque	$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
$\sqrt{5,76} = 2,4$	porque	$2,4^2 = 2,4 \cdot 2,4 = 5,76$

Repare que os dois primeiros exemplos são simples, mas o terceiro já parece difícil. Como podemos descobrir que a raiz quadrada de 5,76 é 2,4? Esta pergunta será respondida ao longo desta aula, mas antes, vamos mostrar como isso começou.

Um Pouco de História

Por volta do século VI a.C. a matemática começou a se desenvolver de forma organizada. Temos conhecimento de que, ainda antes dessa época, existiam povos, como os egípcios e os babilônios, que usavam matemática para resolver problemas que ocorriam em suas comunidades. Mas, suas fórmulas, descobertas através de experiências, nem sempre eram corretas, ou seja, davam certo em alguns casos mas em outros não.

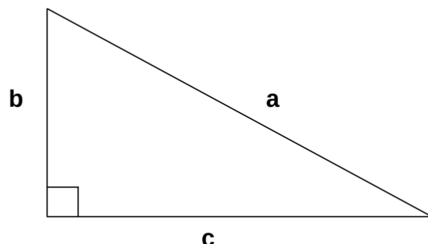
Esse desenvolvimento organizado da matemática teve início na Grécia antiga devido, principalmente, às descobertas de dois gênios chamados Tales e Pitágoras. Tudo o que sabemos desses dois primeiros grandes matemáticos que a humanidade conheceu foram relatos de outras pessoas, de forma que, hoje, é impossível saber o que é lenda e o que realmente aconteceu. De qualquer forma, o importante foram as idéias que surgiram naquela época e que permitiram o rápido e sólido desenvolvimento da matemática. Esse desenvolvimento se deu através de ***teoremas*** que são afirmações válidas em ***todas*** as situações de um mesmo tipo, e são demonstradas a partir de conhecimentos anteriores.

O Teorema de Pitágoras

No século VI a.C. foi descoberta uma propriedade válida em todos os triângulos retângulos. Ela ficou conhecida como ***Teorema de Pitágoras***.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Essa afirmação, que será demonstrada na nossa próxima aula, pode ser escrita como uma fórmula. Se em um triângulo retângulo, representamos o comprimento da hipotenusa por **a** e os comprimentos dos catetos por **b** e **c** (como na figura abaixo),



então, o Teorema de Pitágoras nos diz que

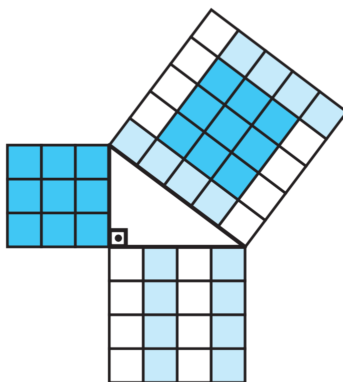
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Por exemplo, já era conhecido mesmo antes de Pitágoras que o triângulo de lados **3**, **4** e **5** é um triângulo retângulo. De fato, observe que, se na fórmula acima fizemos **a** = **5**, **b** = **4** e **c** = **3**, obtemos:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

que é uma igualdade correta. Observe ainda que 5^2 é a área de um quadrado de lado **5**; 4^2 é a área de um quadrado de lado **4** e 3^2 é a área de um triângulo de lado **3**. Veja então na figura a seguir a seguinte interpretação do Teorema de Pitágoras:

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.

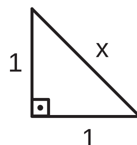


A volta da raiz quadrada

Será que todo número positivo possui uma raiz quadrada?

Esta é uma pergunta intrigante e a resposta é: sim.

Vejamos o seguinte exemplo. Consideremos um triângulo retângulo com catetos iguais a 1 e tratemos de calcular sua hipotenusa.



Esse é um triângulo conhecido. Ele já apareceu na aula 7 e esse problema foi resolvido, aproximadamente, pela medida do comprimento da hipotenusa. Agora, podemos resolvê-lo pelo teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 1 + 1$$
$$x^2 = 2$$

Já sabemos que essa equação tem duas soluções: uma positiva e outra negativa. Mas, como **x** é um comprimento, então ele é representado por um número positivo.

Daí,

$$x = \sqrt{2}$$

Temos então que x é a ***raiz quadrada*** de 2. Mas, que número é esse? Sabemos que ele existe porque estamos vendo sua representação no desenho. Vamos ver que, neste caso, ele só pode ser determinado ***aproximadamente***.

Façamos então algumas tentativas.

$1,2^2 = 1,44$	(é pouco)
$1,3^2 = 1,69$	(é pouco)
$1,4^2 = 1,96$	(é pouco mas está próximo)
$1,5^2 = 2,25$	(passou de 2)

Concluímos que 1,4 é uma ***aproximação*** de $\sqrt{2}$ por falta, ou seja, ele é próximo mas é **menor** que o valor que procuramos. Vamos então acrescentar mais uma casa decimal ao 1,4 para continuar nossas tentativas.

$1,41^2 = 1,9881$	(é pouco)
$1,42^2 = 2,0164$	(passou)

Concluímos agora que 1,41 é uma aproximação por falta de $\sqrt{2}$ melhor que a anterior. Podemos continuar tentando encontrar mais uma casa decimal.

$1,413 = 1,9966$	(é pouco)
$1,414 = 1,9994$	(é pouco)
$1,415 = 2,0022$	(passou)

Temos então que 1,414 é uma aproximação ainda melhor para $\sqrt{2}$. Esse processo pode continuar mas, infelizmente, ***nunca*** conseguiremos encontrar um número decimal cujo quadrado seja exatamente 2. Tudo o que podemos fazer é encontrar aproximações cada vez melhores.

Uma máquina de calcular comum, com tecla de raiz quadrada, faz isso muito bem. Apertando as teclas [2] e [√] encontramos no visor o número 1,4142135 que é uma excelente aproximação para a raiz quadrada de 2.

Esses números, com infinitas casas decimais e que só podemos conhecer por meio de aproximações, são chamados de números ***irracionais***.

Os números irracionais aparecerão com grande freqüência em nosso curso. Mas, felizmente, em nossos problemas práticos só necessitaremos de aproximações com poucas casas decimais.

Uma aplicação da raiz quadrada

Certo dia, um automóvel vinha em grande velocidade por uma estrada quando um transeunte distraído foi atravessá-la. O motorista pisou fundo no freio, os pneus cantaram no asfalto e felizmente o carro parou a uma pequena distância do assustado pedestre. Um guarda próximo quis logo multar o motorista por excesso de velocidade mas o motorista garantiu que vinha a menos de 80 km por hora, que era a velocidade máxima permitida naquele trecho. Como o guarda poderia saber a velocidade com que vinha o carro?

É possível saber. Em uma freada de emergência os pneus deixam uma marca no asfalto. Medindo o comprimento dessa marca é possível saber, aproximadamente a velocidade com que vinha o carro. A fórmula, obtida através da física, é a seguinte:

$$\mathbf{v = 14,6\sqrt{c}}$$

onde **c** é o comprimento da marca deixada pelos pneus em metros e **v** é a velocidade do carro em quilômetros por hora.

Na nossa história, os pneus do carro deixaram gravadas no asfalto uma marca de 43 m. Aplicando a fórmula, teremos:

$$v = 14{,}6 \cdot \sqrt{43} = 14{,}6 \cdot 6{,}56 = 95{,}78$$

ou seja, o carro vinha a aproximadamente 96 km/h e, portanto, seu motorista deveria ser multado.

Propriedades da raiz quadrada

Já sabemos que todo número positivo possui raiz quadrada. Quanto vale a raiz quadrada de zero?

Pense:

Vale zero, é claro, porque $0^2 = 0$. E quanto será a raiz quadrada de - 3?

Pense:

Essa não existe, porque quando elevamos qualquer número ao quadrado, o resultado é sempre positivo. Logo, nenhum número negativo possui raiz quadrada. A nossa primeira propriedade será, então:

$$\text{I - Se } a \geqslant 0 \text{ existe } \sqrt{a}\text{. Se } a < 0\text{, não existe } \sqrt{a}$$

A nossa segunda propriedade é uma consequência da definição de raiz quadrada:

$$\text{II - Se } a \geqslant 0\text{, então } \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

A terceira e a quarta propriedades vão nos ajudar a operar com as raízes quadradas:

$$\text{III - Se a e b são positivos, então } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\text{IV - Se a e b são positivos (e } b \neq 0\text{), então } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Observe agora o exemplo seguinte, no qual aplicaremos essas propriedades na solução de uma equação:

EXEMPLO

Use a máquina de calcular para obter aproximadamente (4 casas decimais) a solução positiva da equação.

$$3x^2 = 7$$

Solução:

A primeira coisa a fazer é dividir por 3 para isolar a incógnita.

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{7}{3} =$$

$$x^2 = \frac{7}{3}$$

Agora vamos extrair a raiz quadrada. Neste caso, não precisaremos colocar o sinal $\pm$ do lado direito porque o enunciado só nos pede para determinar a solução positiva. Temos então:

$$x = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Observe agora como usamos as propriedades para dar a resposta de outra forma. Pela propriedade IV, podemos escrever

$$x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

É sempre incômodo ter uma raiz no denominador de uma fração. Para resolver isso, multiplicamos o numerador e o denominador da fração pelo próprio denominador. Chamamos isto de **racionalizar** o denominador.

$$x = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

Pelas propriedades II e III temos que $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ e ainda, $\sqrt{7} \times \sqrt{3} = \sqrt{7 \times 3} = \sqrt{21}$. Então,

$$x = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Esta é a solução positiva da nossa equação. Usando a máquina, e digitando

[2] [1] [√] [÷] [3] [=]

encontraremos como aproximação de x o número 1,5275.

Exercícios

Exercício 1

Determine as raízes quadradas

a) $\sqrt{25}$ **b)** $\sqrt{64}$ **c)** $\sqrt{196}$

Exercício 2

Resolva as equações

a) $x^2 = 36$

b) $2x^2 = 98$

Exercício 3

Sem usar a tecla [√] de sua calculadora, determine as raízes abaixo fazendo tentativas e aproximações.

a) $\sqrt{529}$

b) $\sqrt{1156}$

c) $\sqrt{57,76}$

Exercício 4

Determine um valor aproximado para $\sqrt{3}$ com duas casas decimais.

Exercício 5

Se **a** é um número positivo, complete:

a) $\sqrt{a^2} =$

b) $\sqrt{a^4} =$

c) $\sqrt{a^6} =$

Exercício 6

Simplifique as raízes fatorando o número que está em baixo do radical.

Exemplo: $\sqrt{512} = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^8 \cdot 2} = \sqrt{2^8} \cdot \sqrt{2} = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$
(Para recordar as regras de operações com potências reveja a aula 14.)

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{144}$

c) $\sqrt{800}$

Exercício 7

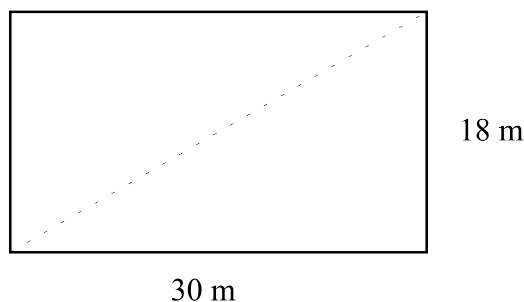
Racionalize os denominadores e dê valores aproximados (com 2 decimais) para as frações abaixo.

a) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

Exercício 8

Uma certa quadra de futebol de salão tem 30 m de comprimento e 18 m de largura. Determine um valor aproximado para o comprimento de sua diagonal.



Exercício 9

Na casa de João existe um quarto cujo chão é quadrado e tem 12 m² de área. Quanto mede, aproximadamente o lado desse quadrado?

AULA

19

O Teorema de Pitágoras

Introdução

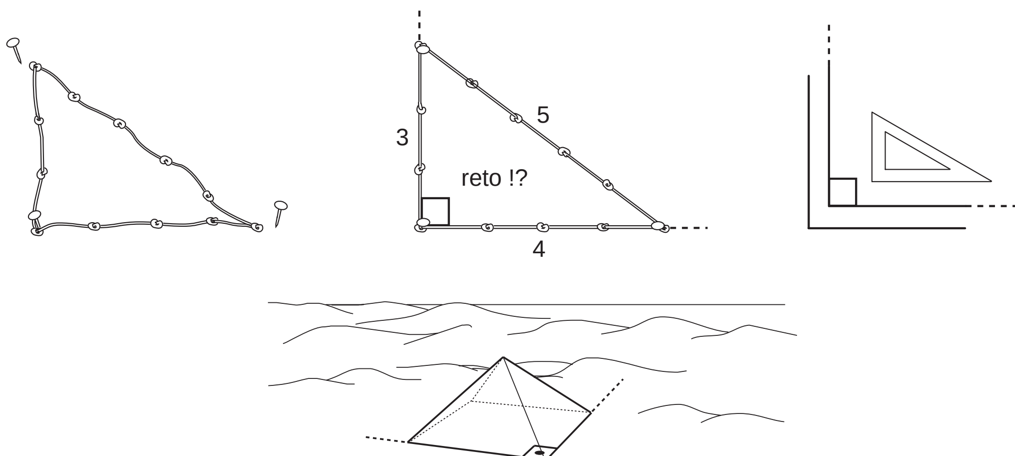
Sem dúvida, *"O Teorema de Pitágoras!"* é a resposta mais freqüente que as pessoas dão quando perguntamos do que elas se lembram das aulas de Matemática. E quando questionamos se elas sabem o que o teorema diz, muitas respondem: *"Não lembro ao certo, mas falava da hipotenusa e dos catetos... o quadrado da hipotenusa..."*

Estas palavras a gente não esquece: ***Teorema de Pitágoras, hipotenusa, catetos***. Alguns, no entanto, já não se lembram mais do enunciado do Teorema de Pitágoras. Mas nós acreditamos que, depois da aula de hoje, mesmo que você também não se lembre, ainda assim saberá como deduzi-lo novamente.

Vamos mostrar na página 143 uma figura muito simples e reveladora que os chineses já conheciam há muito tempo, antes mesmo de Pitágoras, e que nos permite deduzir o teorema. Essa figura você não esquecerá, principalmente se você a fizer com recortes de papel ou mesmo blocos de madeira. A beleza do teorema compensa o esforço desse trabalho extra.

Antes de começarmos nossa aula, aqui está uma aplicação prática e interessante deste famoso teorema para que você possa refletir a respeito.

Alguns povos antigos usavam um instrumento muito simples e prático para obter ângulos retos: uma corda. Nela faziam nós a distâncias iguais e, então, marcavam três nós a distâncias de três, quatro e cinco nós entre si, conforme mostra a ilustração, juntando depois o primeiro ao último nó. Quando esticavam esta corda, fixando-a nos três nós marcados, obtinham um triângulo... retângulo! Será mesmo reto o ângulo maior do triângulo 3, 4 e 5? (Faça o experimento e meça o ângulo maior do triângulo com seu esquadro ou transferidor. Você concorda que o ângulo é reto?)



Nossa aula

Quem foi Pitágoras de Samos

Seria impossível resumir a vida e as idéias de Pitágoras apenas em alguns parágrafos, tal é a multiplicidade de aspectos que apresenta. Sem falar no mistério que envolve sua figura. Acredita-se que tenha nascido em Samos (Grécia antiga) por volta de 558 a.C., e tenha vivido até os 99 anos, embora esses dados não sejam exatos. Desse véu de mistério o que emerge é o Pitágoras filósofo, matemático e músico. Buscou sabedoria em toda parte, até mesmo quando esteve preso na Babilônia. Um de seus mestres foi Tales de Mileto (que acabamos de conhecer na Aula 17), que o teria aconselhado a visitar o Egito, onde não só estudou geometria, como seu mestre, mas também aprendeu a ler hieróglifos (a escrita egípcia) com os próprios sacerdotes egípcios. E mais ainda: parece ter sido iniciado nos mistérios da religião egípcia.

Outros aspectos interessantes da vida de Pitágoras dizem respeito a algumas idéias bastante avançadas para sua época. Por exemplo: dizem que era vegetariano e um forte defensor da vida em geral, tendo-se declarado contrário ao sacrifício de animais, muito comum em sua época. Como seu contemporâneo distante Buda, acreditava que todos os seres humanos eram iguais e mereciam a liberdade; seria este o motivo pelo qual teria libertado seu escravo Zalmoxis. Pitágoras e os pitagóricos, alunos da escola que fundou, eram conhecidos amantes da liberdade.

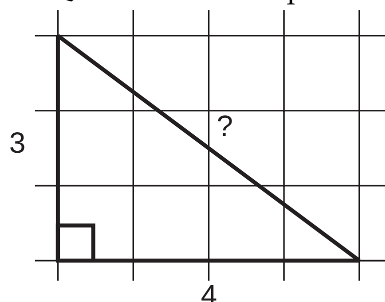
Se você está atento ao que dissemos, deve ter ficado intrigado: "*Por que chamamos Teorema de Pitágoras, se os chineses já conheciam o teorema muito antes dele?*"

Você não deixa de ter razão. Na verdade é muito comum que um teorema receba o nome de alguém que não tenha sido o primeiro a demonstrá-lo. Mas o mérito de Pitágoras não é menor, pois foi o responsável por ter aprendido a pensar a geometria de maneira abstrata, e não em relação a objetos concretos, como se fazia até então. Espírito científico, Pitágoras afirmava: "*A fórmula da hipotenusa em relação aos catetos é verdadeira não apenas em triângulos retângulos de lajotas ou aqueles desenhados na lousa, mas também para todos os triângulos retângulos que ainda não vimos, e mais ainda, para qualquer triângulo retângulo que pensemos*".

"*Mas, afinal, o que é o Teorema de Pitágoras?*", você deve estar se perguntando. Vamos a ele!

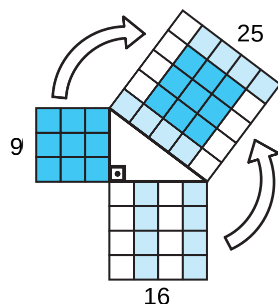
O Teorema de Pitágoras

Vamos trabalhar um pouco com as mãos. Pegue um papel quadriculado e desenhe um triângulo retângulo de 3 cm na vertical e 4 cm na horizontal. Sabemos que este triângulo é um triângulo retângulo, porque seus lados (catetos) estão em direções perpendiculares (horizontal e vertical). A pergunta para você é: "Quanto mede a hipotenusa desse triângulo?"



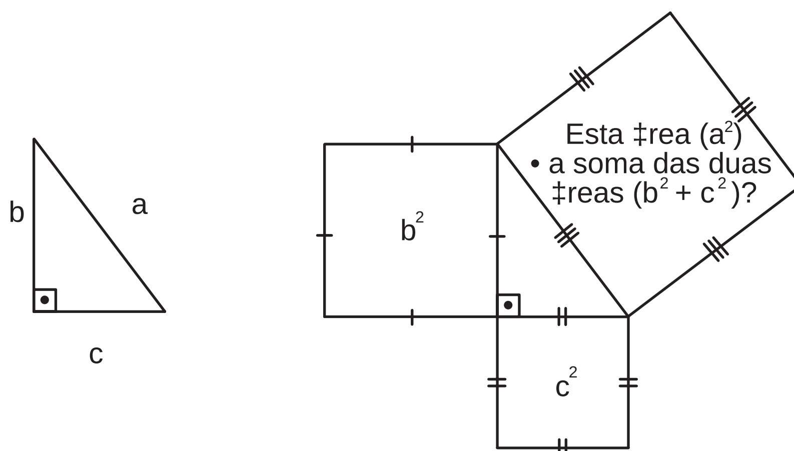
Você deve ter encontrado 5 cm para a medida da hipotenusa. Será mesmo? Será que a geometria pode provar que a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 3 e 4 cm mede 5 cm?

“ O que há de especial em medir 5 cm e não 5,1 ou 4,9?”, alguém poderia perguntar. Pois veja o que acontece se os lados forem iguais a 3, 4 e 5 cm. Se construírmos um quadrado com cada um dos três lados, então teremos o triângulo retângulo cercado por três quadrados. O que podemos dizer sobre as áreas destes três quadrados?

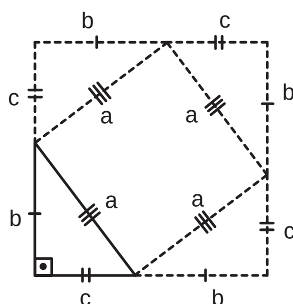


área do quadrado de um cateto		área do quadrado do outro cateto		área do quadrado da hipotenusa (se 5 estiver certo)
↓		↓		↓
3^2		4^2		5^2
↓		↓		↓
9	+	16	=	25

O que Pitágoras se perguntou foi: *“Será que não apenas neste, mas em todo triângulo retângulo* ***o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos****?”* E obteve a resposta: *“Sim, em qualquer triângulo retângulo...”*. E para que você veja logo como isso é bem simples, olhe para a figura abaixo.



O que queremos demonstrar é que, se a hipotenusa de um triângulo retângulo é **a** e seus catetos são **b** e **c**, então **a = b + c**. Vamos começar desenhando o quadrado de lado **a**. Brincando com outras peças iguais a estas em papel ou papelão, vemos algo interessante: quatro cópias do triângulo retângulo colocadas em torno do quadrado formam um novo quadrado de lado **b + c**. O que nos dizem as áreas das figuras abaixo?



área do quadrado de lado b + c	área do quadrado de lado a	4 · (área do triângulo)
↓	↓	↓
$(b + c)^2$	a^2	$4 \cdot \frac{bc}{2}$

Logo: b + 2bc + c = a + 2bc
b + c = a (C.Q.D.)

Muito engenhosa essa figura dos chineses que usamos para comprovar o teorema, não é? Assim, está provado o Teorema de Pitágoras:

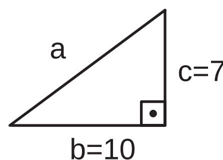
Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Exercício 1

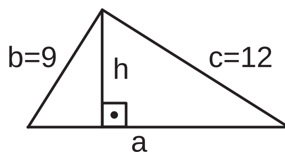
Em cada item abaixo temos um triângulo retângulo com hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**. Calcule o lado ou altura que se pede (nas mesmas unidades):

a) a = 10
b = 6
c = ? (Faça a figura. Meça e confirme com o Teorema de Pitágoras.)

b) a = ? (Use a calculadora, no teorema. Meça e confirme.)

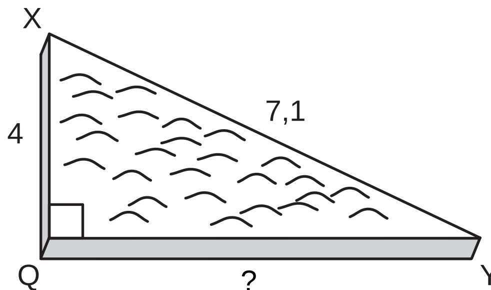


c) a = ?
h = ?
(Faça uso novamente do teorema. Depois, pense na área do triângulo para achar **h**. Meça e confirme.)



Exercício 2

Seu Raimundo precisa encomendar lajotas de mármore com o formato que está na figura abaixo. Ele observou que duas delas juntas formam um retângulo. Quanto mede o outro lado do retângulo?



Resolvendo o exercício

Em se tratando de calcular comprimentos nossa atitude natural é procurar por triângulos semelhantes e aplicar a regra de três como vimos na aula 17 e veremos novamente na aula 21. Quando esses comprimentos são lados de um triângulo retângulo, então a outra idéia que logo nos ocorre é aplicar o Teorema de Pitágoras. Temos:

a) a = b + c
10 = 6 + c ; c = 100 - 36 = 64. Logo, **c = 8 cm**.

b) a = b + c
a = 10 + 7 = 149. Logo, **a = 12,2 cm**.

c) a = b + c
a = 9 + 12 = 81 + 144 = 225. Logo, **a = 15 cm**.

E para achar **h**? Observamos que a área do triângulo pode ser calculada de dois modos (pelo menos), usando a mesma fórmula:

$$A_{triang} = \frac{base \times altura}{2}$$

- com base = c = 12 e altura = b = 9: $A_{triang} = \frac{9 \times 12}{2} = 54$

- com base = a = 15 e altura = h: $A_{triang} = \frac{ah}{2} =$ (figura anterior)

$$= \frac{15h}{2}$$

$$= \frac{15h}{2} = 54. \text{ Logo h @7,3 cm}$$

Seu Raimundo também deve usar o Teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo, a = b + c - considerando:

a = XY = 11,3	Assim:	(7,1) = 4 + QY^2
b = QY = 4		50,41 = 16 + QY^2
c = QY = ?		QY^2 = 34,41 e QY

A recíproca do Teorema de Pitágoras

Sebastião é um operário muito atento ao trabalho e um aluno igualmente atento de 2º grau. Quando o professor terminou de demonstrar o Teorema de Pitágoras e de dar exemplos sobre ele, Sebastião pediu a palavra: *"Professor, o teorema está provado e os exemplos nos mostram que ele tem inúmeras aplicações,*

tanto na Matemática quanto no aspecto que mais nos interessa da nossa vida profissional, quero dizer, como pedreiros, marceneiros etc" .

E prosseguiu ele: *"Mas nós ainda não resolvemos o problema. O Teorema de Pitágoras nos afirma que:* ***se*** *o ângulo entre os lados* ***b*** *e* ***c*** *for reto, então* ***a = b + c*** *. Agora, nossa questão é precisamente demonstrar que o ângulo é reto, sabendo que* ***a = b + c*** *para* ***a = 5, b = 3*** *e* ***c = 4****. Isto é exatamente a recíproca do Teorema de Pitágoras?"*

De fato, é muito freqüente, na vida cotidiana, encontrarmos uma pessoa confundindo as afirmações com suas recíprocas. Você se lembra de algum caso assim?

Uma prova da recíproca do teorema

O professor de Sebastião precisou então de mais alguns argumentos para concluir com exatidão que, de fato, o triângulo de lados que medem 3, 4 e 5 cm, tão usado pelos antigos e tão prático até hoje tem mesmo um ângulo reto. A demonstração a princípio intrigou o nosso amigo Sebastião, mas depois de refletir em casa ele a aceitou. O professor usou o que se chama de ***método socrático***. Ele fez perguntas ao aluno que o levaram à conclusão verdadeira. O professor e o aluno tiveram o seguinte diálogo:

Método socrático
Em homenagem ao grande sábio grego Sócrates (469 a.C., 399 a.C).

Professor - O que estamos querendo provar, Sebastião?

Sebastião - Que se os lados do triângulo medem **3**, **4** e **5** cm, ***então*** o ângulo entre os lados de **3** e **4** cm é um ângulo reto.

P - Muito bem; você inclusive separou a parte da afirmação que começa com "se" (a ***hipótese***) da parte que começa com "então" (a ***tese***). Excelente. Diga-me agora: você já viu algum triângulo com lados 3, 4 e 5 cm?

S - Vi, no início da aula nós o desenhamos em papel quadriculado para ajudar a resolver o roblema.

P - Isso mesmo. Mas não havia uma dúvida lá a respeito da medida, se seria mesmo 5 ou 5,1 cm...

S - Sim, mas depois o senhor nos ensinou o Teorema de Pitágoras; se o ângulo é reto, então **a = b + c** . Logo, para **b = 3** e **c = 4** vimos que **a = 5**.

P - Então você viu mesmo um triângulo de lados **3**, **4** e **5** cm: onde de fato, os lados que medem **3** e **4** cm fazem um ângulo reto. Agora diga-me: Quantos triângulos de lados **3**, **4** e **5** cm podemos ter?

S - Ora, professor, isso eu vi quando desenhei o triângulo **ABC** de lados **a = BC = 5**, **b = AC = 3** e **c = AB = 4** (cm). Comecei pelos pontos A e B. (Figura) Então pensei: se **AC = 3**, então **C** dista 3 cm de A e tracei com o compasso um círculo de centro **A** e raio 3 cm. E como **C** dista 5 cm de **B**, então **C** também deve estar sobre um círculo de centro **B** e raio 5 cm.

P - Portanto, quantos triângulos de lados **3**, **4** e **5** cm existem?

S - Dois, mas que de fato são iguais; um é o reflexo do outro num "espelho horizontal", o lado **AB**.

P - E quanto mede o ângulo entre os lados de **3** e **4** cm, nesse triângulo?

S - Bem, o triângulo que vimos antes...

P - É o único que vimos com estas medidas, não é? Continue.

S - Sim, ele tem ângulo reto.

P - Pode haver algum triângulo com estes lados cujo ângulo não seja reto?

S - Não, professor: se um triângulo tem lados **3**, **4** e **5** cm, então ele é um triângulo retângulo, pois só há um triângulo com estes lados e ele é retângulo!

Na aula seguinte, Sebastião foi direto ao professor: "A recíproca do Teorema de Pitágoras que o senhor me provou ser verdadeira, no caso do triângulo de lados **3**, **4** e **5** cm, é verdadeira não só para este, mas para qualquer triângulo de lados **a**, **b** e **c** em que **a = b + c**!"

E Sebastião exibiu, então, seu raciocínio abstrato, herança de mestres como Tales e Pitágoras: "A mesma figura que nos ajudou a raciocinar anteriormente também nos mostra que há apenas um triângulo (a menos de reflexão no espelho) em que os lados medem **a**, **b** e **c**. Suponha que em nosso triângulo **a = b + c**, qual é, então, o ângulo entre **b** e **c**?

E concluiu em seguida: "Como no triângulo retângulo **a = b + c** e só existe um triângulo de lados **a**, **b** e **c** em que **a = b + c**, então indiretamente concluímos que o ângulo entre **b** e **c** só pode ser um ângulo reto!"

"Raciocínio perfeito, Sebastião! Continue a desenvolvê-lo. Às vezes a mais preciosa lição de uma aula de matemática não se refere a números ou triângulos, mas a uma maneira criativa de pensar."

Nós concordamos. E esperamos que você, aluno ou aluna deste Telecurso, esteja também atento à precisão e à pureza do raciocínio matemático. Hora de praticá-lo, então, nos exercícios de hoje!

Exercícios finais

Exercício 3

Em cada um destes itens, calcule o terceiro lado do triângulo; desenhe o triângulo e confirme. Todas as medidas estão em cm:

a) a = 17
b = 15

b) b = 10
c = 10

c) a = 12, 1
c = 6

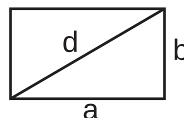
AULA 19

Exercício 4

a) Quanto mede a diagonal do piso de uma sala retangular de 3×4 m?

b) Qual o tamanho máximo que pode ter um pau de cortina que se quer guardar deitado no chão de uma sala de 3×4 m?

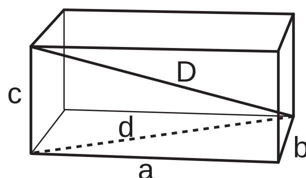
c) Seja **d** a diagonal de um retângulo de lados **a** e **b**, encontre uma fórmula que calcule **d** a partir de **a** e **b**.



Exercício 5

a) Qual o tamanho máximo que pode ter um pau de cortina que se deseja guardar provisoriamente num quarto de 3 x 4 m e altura 3 m?

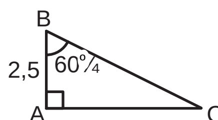
b) Seja **D** a diagonal interna de um paralelepípedo de lados **a**, **b** e **c**, calcule **D**.



Sugestão: Traçando a diagonal **d** da base retangular vemos que **c** e **d** são perpendiculares pois **c** é vertical e **d** é horizontal. Logo, o triângulo de lados **c**, **d** e **D** é retângulo.

Exercício 6

Um triângulo retângulo **ABC** tem $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ e **AB = 2,5 cm**:



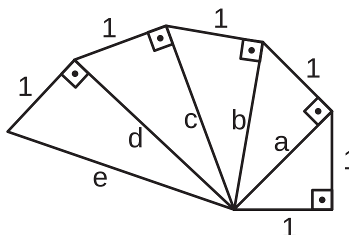
a) Calcule a hipotenusa **BC**.
Sugestão: Desenhe um triângulo igual a **ABC**, chame-o **AB'C**, resultado de **ABC** refletido no "espelho" **AC**. Quanto medem os ângulos de **BB'C**? Que tipo de triângulo é **BB'C**? Quanto mede, então, **BC**?

b) Calcule o outro cateto.

Exercício 7

a) Encontre **a**, **b**, **c**, **d** e **e**.

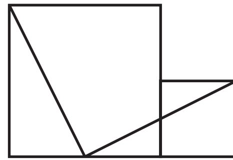
b) Complete a figura. Observe que os vértices dos ângulos retos formam uma espiral.



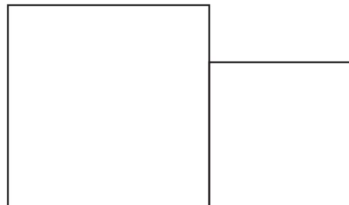
Exercício 8

Quebra-cabeça

Quaisquer dois quadrados, não importa seus tamanhos relativos, podem ser cortados em cinco peças que se juntarão novamente para formar um só quadrado maior. Os cortes estão ilustrados nos quadrados do exemplo abaixo.



Exemplo: Trace estes outros dois quadrados. Você sabe onde fazer os cortes de modo que depois sejamos capazes de remontar as peças num outro quadrado?



Exercício 9

O triângulo retângulo de lados com **3**, **4** e **5** cm, que conhecemos nesta aula, se tornou famoso devido ao fato de que seus lados são medidos por números naturais (i.e, inteiros positivos) pequenos. Este exercício apresenta outros triângulos desse tipo. Faça uma tabela como esta contendo na horizontal e na vertical os quadrados dos números naturais. Observe que cada número na tabela é soma de dois quadrados. Por exemplo **5 = 1 + 4**. Chamemo-los **b** e **c** .

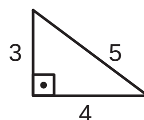
a) Procure pelos **b + c** que são eles próprios também quadrados, estando então na sequência **1 - 4 - 9 - 16 -** etc. Por exemplo, **9 + 16 = 25 = 5**

	n →	1	2	3	4	5
n ↓	n^2 → ↓	1	4	9	16	25
1	1	2	3	10	17	26
2	4		8	13	20	29
3	9			18	25	34
4	16				32	

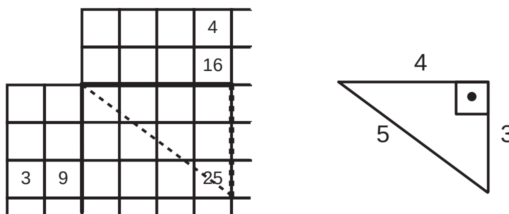
Sugestão: Para facilitar, use esta tabela de quadrados:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	215

b) Desenhe os triângulos que você encontrou
Exemplo:



Sugestão: Faça sua tabela em papel quadriculado. Voce perceberá que a própria tabela lhe dá o triângulo desenhado.
Exemplo:



c) Existem triângulos semelhantes entres os encontrados? Isto é, de mesmo formato mas de tamanhos diferentes?

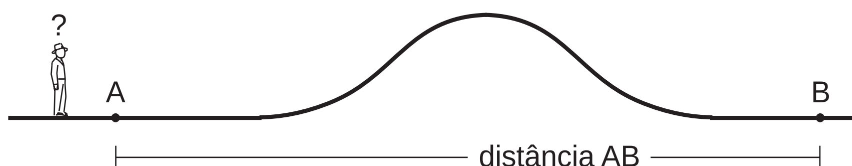
Exercício 10

Inspirando-se no exercício da aula, prove que num triângulo retângulo de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, a altura relativa à hipotenusa mede $h = \frac{bc}{a}$

Calculando distâncias sem medir

Introdução

No campo ocorrem freqüentemente problemas com medidas que não podemos resolver diretamente com ajuda da trena. Por exemplo: em uma fazenda, como podemos calcular a distância entre dois pontos se existe um morro no meio?



- É claro que, observando o desenho acima, se esticarmos uma trena de A até B, subindo e descendo o morro, encontraremos um valor maior que o correto. Lembre-se de que quando falamos de ***distância*** entre dois pontos estamos considerando que a medida foi feita sobre a ***reta*** que une esses dois pontos. No nosso exemplo essa medida não pode ser calculada diretamente.

- Também na cidade, a altura de um edifício ou mesmo de um poste são medidas difíceis de serem calculadas diretamente. Vamos mostrar, então, que com o auxílio da semelhança de triângulos e do Teorema de Pitágoras podemos descobrir distâncias sem fazer o cálculo direto das medidas.

Nossa aula

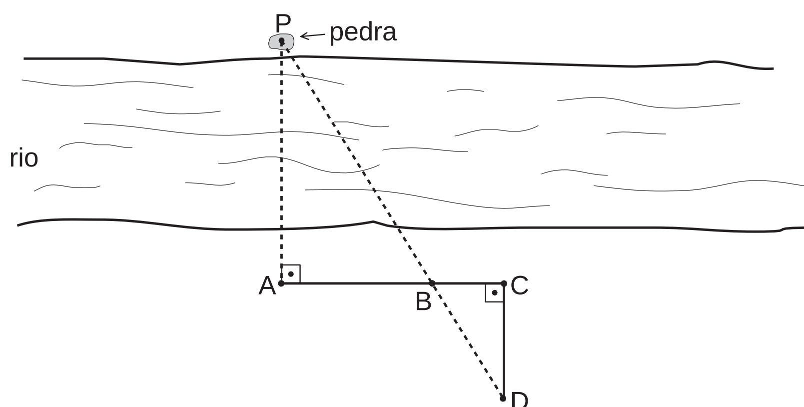
Para determinarmos medidas no campo precisamos de uma trena, algumas estacas, um rolo de barbante e, para algumas situações, um esquadro. As estacas e o barbante formam triângulos; a trena mede os comprimentos, enquanto o esquadro formará ângulos retos.

Acompanhe então os problemas desta aula e suas criativas soluções.

EXEMPLO 1

A largura de um rio

Estamos em uma fazenda cortada por um rio bastante largo. Temos uma trena de 20 m e a largura do rio parece ser muito maior que isso. O que podemos fazer para determinar a largura desse rio? Observe o desenho.

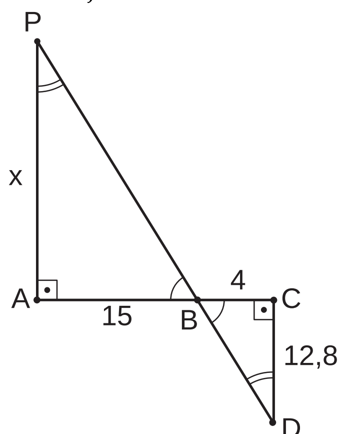


As pessoas que vão fazer as medidas estão na parte de baixo do desenho. Elas procuram na outra margem algum objeto para fixar a atenção. Imagine então que uma das pessoas, estando no ponto **A**, veja uma pedra **P** do outro lado do rio. Para determinar a distância **AP** fazemos o seguinte.

- Fixamos uma estaca no ponto **A** e amarramos nela um barbante. O barbante é esticado até um ponto **C** qualquer, de forma que o ângulo **PÂC** seja reto;
- Fixamos uma estaca em **C**. Sobre o barbante esticado **AC** devemos agora escolher um ponto **B** qualquer, que, de preferência, esteja mais próximo de **C** que de **A**.
- Fixamos então uma estaca em **B**.
- Riscamos agora no chão uma reta que parte de **C** e faz ângulo reto com o barbante, como mostra o desenho. Vamos caminhando sobre essa reta até que a estaca **B** esconda atrás de si a pedra **P** que está do outro lado do rio. Isto faz com que os pontos **P**, **B** e **D** do desenho fiquem em linha reta. Ora, na margem de baixo todas as distâncias podem ser medidas. Suponha então que os valores encontrados tenham sido os seguintes:

AB = 15 m
BC = 4 m
CD = 12,80 m

Observe o próximo desenho já com as medidas encontradas e os ***ângulos iguais*** assinalados.

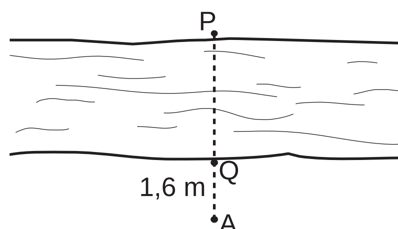


Os triângulos **ABP** e **CBD** são semelhantes porque possuem os mesmos ângulos. Logo, seus lados são ***proporcionais***. Fazendo a distância **AP** igual a **x** temos a proporção:

$$\frac{x}{12,8} = \frac{15}{4}$$

$$x = \frac{12,8 \times 15}{4} = 48m$$

Falta pouco agora. Medimos então a distância da estaca **A** ao rio.



Suponha que encontramos **PQ = 1,60 m** (Veja o desenho.) Então, a largura do rio é

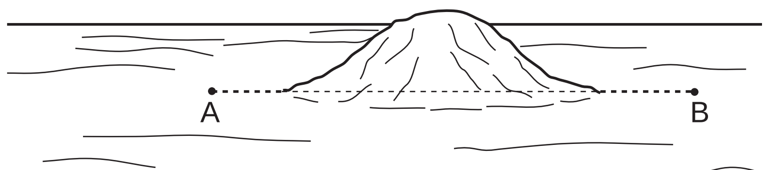
$$PQ = 48 - 1,6 = 46,4 \text{ m}$$

Tendo resolvido o problema da largura do rio, vamos ver agora como se resolve o problema da distância entre dois pontos com o obstáculo no meio.

EXEMPLO 2

A distância entre dois pontos com um obstáculo no meio

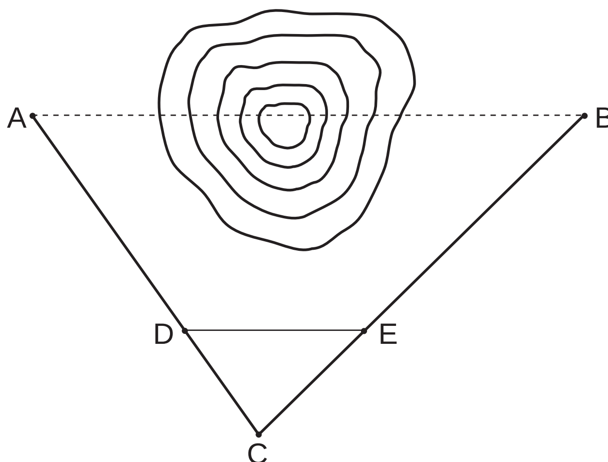
Estamos ainda fazendo medições em nossa fazenda. Temos agora que calcular a distância entre dois pontos **A** e **B** situados de tal maneira que, se você estiver em um deles, não aviste o outro.



No nosso caso, o terreno em volta do morro é razoavelmente plano, mas os pontos **A** e **B** estão de tal forma localizados que medir diretamente a distância entre eles em linha reta é impossível. O que podemos fazer?

Como do ponto **A** não podemos ver o ponto **B**, a solução não pode ser feita da mesma forma que no problema anterior. Procuramos então encontrar um ponto **C** de onde se possa avistar os pontos **A** e **B**.

A figura a seguir mostra a nossa situação vista de cima.



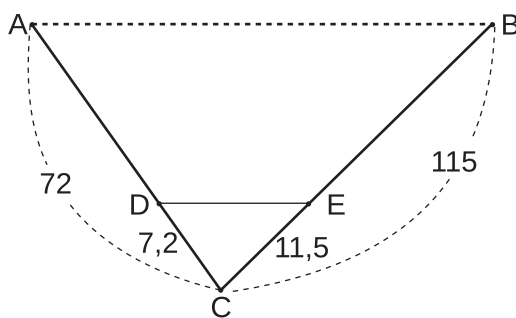
Fixamos então uma estaca em **C** e medimos com a trena (aplicada várias vezes) as distâncias **AC** e **BC**. Os valores encontrados foram os seguintes:

AC = 72 m
BC = 115 m

Agora, vamos dividir essas distâncias por um número qualquer. Por exemplo:

$$\frac{\mathbf{72}}{\mathbf{10}} = \mathbf{7{,}2} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{115}}{\mathbf{10}} = \mathbf{11{,}5}$$

Sobre a reta **AC** fixamos uma estaca no ponto **D**, onde **DC = 7,2 m**. Sobre a reta **BC** fixamos uma estaca no ponto **E**, onde **EC = 11,5 m**. O que temos então?



Criamos o triângulo **CDE** que é ***semelhante e dez vezes menor*** que o triângulo **CAB**. Podemos medir agora a distância **DE**.

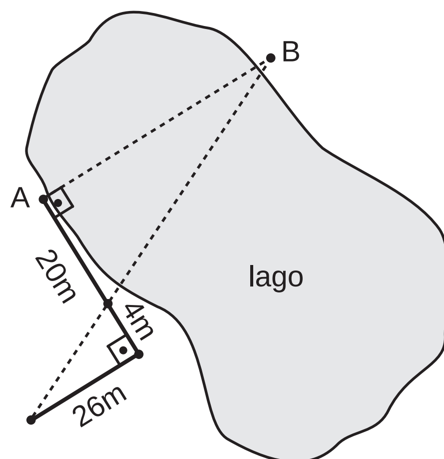
Se encontramos **DE = 12,3 m**, como sabemos que **AB** é ***dez vezes maior*** que **DE**, temos que **AB = 123 m.** O problema está resolvido.

Resumindo, para calcular uma distância que não pode ser medida diretamente devemos formar com ela um triângulo e, em seguida, um outro semelhante bem menor.

Medindo os lados desse triângulo menor e utilizando a semelhança dos triângulos, podemos calcular o lado desconhecido no triângulo maior.

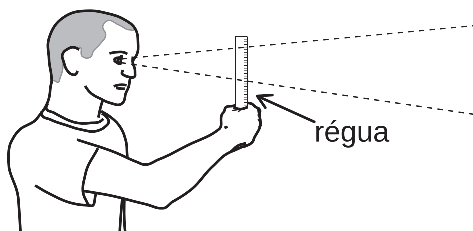
Exercício 1

Para calcular a distância entre os pontos **A** e **B** situados próximos a um lago foi utilizada a mesma técnica vista no problema da largura do rio. Com as medidas que estão no desenho, determine a distância.

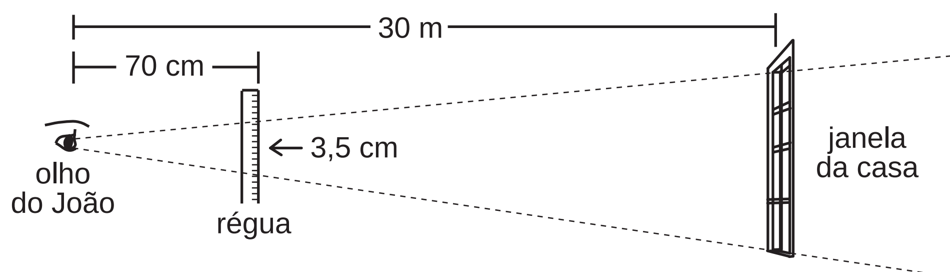


Exercício 2

João está em sua varanda desenhando a casa que está do outro lado da rua. Ele sabe que sua distância até esta casa é de 30 m. Para conhecer as medidas da casa ele usa o seguinte artifício: segurando com o braço esticado uma régua e fechando um olho ele "mede" os detalhes da casa (tamanho das janelas, portas, altura do telhado etc.).

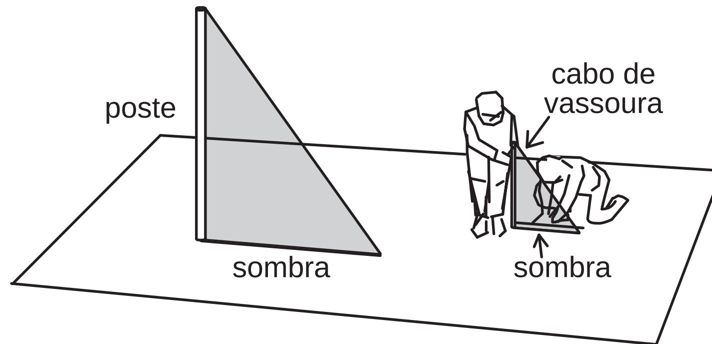


Sabe-se que a distância do olho de João até a régua é de 70 cm. Observando uma das janelas da casa, João verificou que sua altura, medida na régua, era de 3,5 cm. Qual é a medida real dessa janela?
(Sugestão: Observe o desenho a seguir e use semelhança de triângulos. Nos cálculos use todas as distâncias na mesma unidade.)



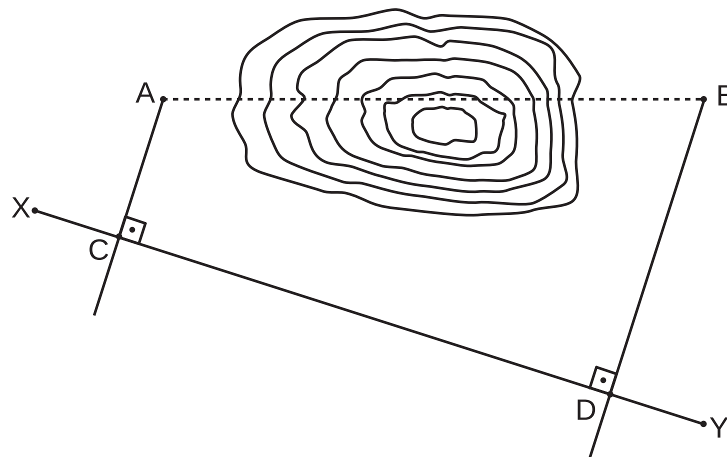
Exercício 3

Para medir a altura de um poste, João observou que em certo momento ele fazia uma sombra no chão de 3,40 m de comprimento. Ele colocou então na vertical, um cabo de vassoura com 110 cm de comprimento e verificou que sua sombra era de 44 cm. Qual é a altura do poste?
(Sugestão: Levando em conta que os raios do sol são paralelos, observe que os dois triângulos formados pelo poste e pelo cabo de vassoura com suas respectivas sombras são semelhantes.)



Exercício 4

Para calcular a distância entre dois pontos **A** e **B** com um obstáculo no meio podemos usar um outro método:



Estique um barbante no chão, e prenda-o nas estacas **X** e **Y**. Amarre um outro barbante em **A** e encontre uma posição para que ele esticado faça ângulo reto com **XY**. Fixe então uma estaca no ponto **C**. Faça o mesmo com outro barbante amarrado em **B**, encontre o ponto **D**, e fixe uma estaca nesse lugar. Sabendo que foram encontradas as seguintes medidas **AC = 22 m**, **CD = 68 m** e **DB = 56 m**, calcule a distância **AB**.
Sugestão: No desenho, trace por **A** uma paralela a **CD** até formar um triângulo. Observe que esse triângulo é retângulo e que os dois catetos são conhecidos. Use então o Teorema de Pitágoras.

Gabaritos das aulas 1 a 20

Aula 1 - Recordando operações

Introdução

a) adição (180 + 162)
b) subtração (50 - 37)
c) multiplicação (16×12)
d) divisão (24 : 3)

Exercícios

1.
a) 80
b) 37
c) - 37
d) 5
e) 19
f) - 15
g) - 15
h) - 3
i) 91
j) - 72
l) 16
m) 20
2.
a) 10
b) 24
c) 346
3. R$ 945,00
4. R$ 320,00
5.
a) 15
b) 213
c) 24
6. Sim. Sobrará no tanque menos de 2 litros.
7. 38 mesas
8. 28 alunos
9. 500 m

Aula 2 - Frações e números decimais

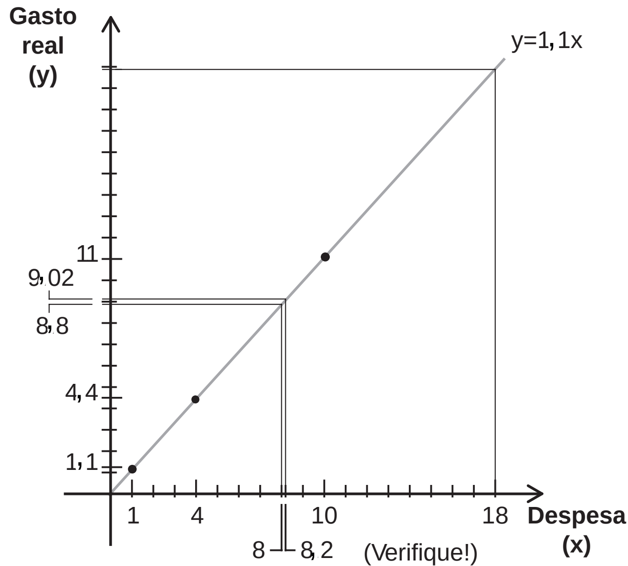
1.
a) $\frac{5}{8}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{4}{5}$
d) $\frac{1}{10}$
2
a) $>$
b) $>$
c) $<$
d) $=$
3.
a) $\frac{13}{24}$
b) $\frac{1}{30}$
c) $\frac{1}{12}$
d) $\frac{31}{30}$
4.
a) $\frac{6}{35}$
b) $\frac{5}{4}$
c) $\frac{14}{15}$
d) $\frac{3}{7}$
5.
a) 12
b) 120
c) 3
d) 9
6.
a) 0,67
b) 0,43
c) 0,36
d) 2,23
7.
a) 12,5%
b) 83,33%
c) 17,5%

Aula 3 - O raciocínio algébrico

1. 289 m
2. 24 anos. 12 anos.
3.
a) qualquer número
b) 7
c) 14
4. 15
5. R$ 111,11
6.
2 → **d)**
0 → **c)**
- 3 → **b)**
3 → **e)**
1 → **a)**

Aula 4 - O método aritmético e o método algébrico

1.



2.

DESPESA	GORJETA	GASTO REAL	SOMA	
4	0,40	4,40	4,40	
4	0,40	4,40	8,80	→ **a)** Despesa = 4 + 4 = 8 reais
0,1	0,01	0,11	8,91	
0,1	0,01	0,11	9,02	→ **b)** Despesa = 4 + 4 + 0,1 + 0,1 = 8,2 reais
10	1	11	11	
8	0,8	8,8	19,8	→ **c)** Despesa = 10 +8 = 18 reais

3. Gasto = (1,1) · Despesa

a) Gasto = 8,8 → 8,8 = (1,1) · Despesa. Logo, Despesa = 8

b) Gasto = 9,02 → 9,02 = (1,1) · Despesa. Logo, Despesa = 8,2

c) Gasto = 19,8 → 19,8 = (1,1) · Despesa. Logo, Despesa = 18

4 I)

DESPESA	GORJETA	GASTO REAL	SOMA	
1	0,2	1,2	1,2	
1	0,2	1,2	2,4	
1	0,2	1,2	3,6	
1	0,2	1,2	4,8	
1	0,2	1,2	6,0	
1	0,2	1,2	7,2	
1	0,2	1,2	8,4	
0,1	0,02	0,12	8,52	
0,1	0,02	0,12	8,64	
0,1	0,02	0,12	8,76 →	**a)** despesa = 7 + 0,3 = 7,30 reais
0,1	0,02	0,12	8,88	
0,1	0,02	0,12	9,0 →	**b)** despesa = 7 + 0,5 = 7,50 reais
0,1	0,02	0,12	9,12	
10	2	12	12	
5	1	6	18	
1	0,2	1,2	19,2	
0,1	0,02	0,12	19,32	
0,1	0,02	0,12	19,44	
0,1	0,02	0,12	19,56	
0,1	0,02	0,12	19,68	
0,1	0,02	0,12	19,8 →	**c)** Despesa = 10 + 5 + 1 + 0,5 = = 16,50 reais

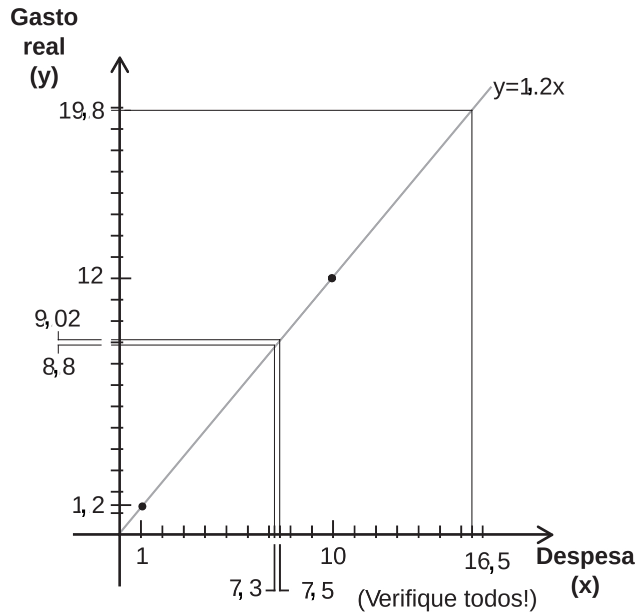
4 II) Gasto = (1,2) · Despesa

a) Gasto = 8,8 = (1,2) · Despesa. Logo, Despesa = 7,30 reais (aproximadamente)

b) Gasto = 9,02 = (1,2) · Despesa. Logo, Despesa = 7,50 reais (aproximadamente)

c) Gasto = 19,8 = (1,2) · Despesa. Logo, Despesa = 16,50 reais

4 III)



Aula 5 - Equacionando os problemas

1.

a) incógnita: x = o número

b) $\frac{x-4}{2} + 3x = \frac{4x}{5} + 7$

c) o número, x.

2.

I a) incógnita: x = aresta do cubo

I b) 6 x = x

I c) a aresta, x.

II) x = 6, já que 6 · x · x = x · x · x

3.

a) x = idade do pai
y = idade do filho
Equações:
x = 3y
y = x - 22

b) A diferença das idades é, ao mesmo tempo: 22 anos e o dobro da idade do filho. (Por quê? É o triplo da idade menos ela mesmo). Logo, a idade do filho é 11 anos e a do pai, 33 anos.

4.

a) p = idade do pai
f = idade do filho
Equações:
p = 3f
f = p - 22
As incógnitas devem ser, respectivamente, iguais: x = p, y = f.

b) p e f, pois lembra imediatamente pai e filho.

5. Incógnita:

x = lado maior

Equação

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x - 1}$$

Aula 6 - Resolvendo equações

1.
a) 7
b) 9
c) 10
d) $\frac{10}{7}$
2. 24
3. 16, 18 e 21 anos, repectivamente.
4. A segunda.
5. Tem 18 bancos.
6. Daqui a 15 anos.
7. 192 alunos.
8. R$ 18,00

Aula 7 - A álgebra nas profissões

1a) 127,3 **b)** 127,1
2. 233 cm
3a) 37 **b)** 30,4 cm
4a) R$ 530 **b)** R$ 2120
5. 1,25 litro

Aula 8 - Coordenadas

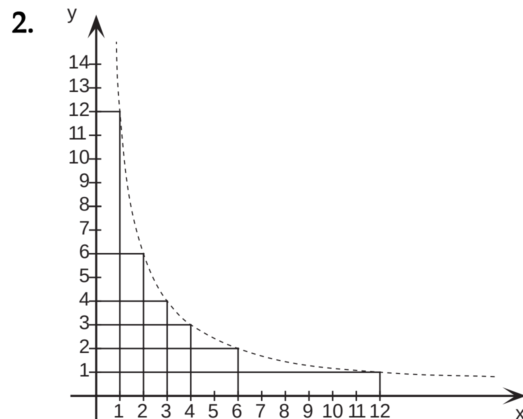
1 a)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1																1																1
2																2																2
3																3																3
4																4																4
5																5																5
6																6																6
7																7																7
8																8																8
9																9																9
10																10																10
11																11																11
12																12																12
13																13																13
14																14																14
15																15																15
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	

1 b)

- submarino: I3
- destroyer: B2, C2
- hidroavião: E13, F12, G13
- cruzador: L6, L7, L8, L9
- couraçado: C8, D8, E8, F8, G8

2.



3.

a) Sim: $11 = 2 \cdot (5) + 1$

b) Não: $11 \neq 2 \cdot (4) + 1$

c) Não: $-20 \neq 2 \cdot (-11) + 1$

d) Sim: $2\pi + 1 = 2 \cdot (\pi) + 1$

e) Não: $0{,}1 \neq 2 \cdot (-1/2) + 1$

f) Sim: $401 = 2 \cdot (200) + 1$

4.

a) Sim: $16 = (-4)^2$

b) Não: $102 \neq (10)^2$

c) Sim: $100 = (10)^2$

d) Sim: $2 = (\sqrt{2})^2$

e) Não: $-49 \neq (7)^2$

f) Não: $-49 \neq (-7)^2$

Aula 9 - O gráfico que é uma reta

1.

a1)

x	$y = \frac{12}{15}x$
0	0
5	12

a2)

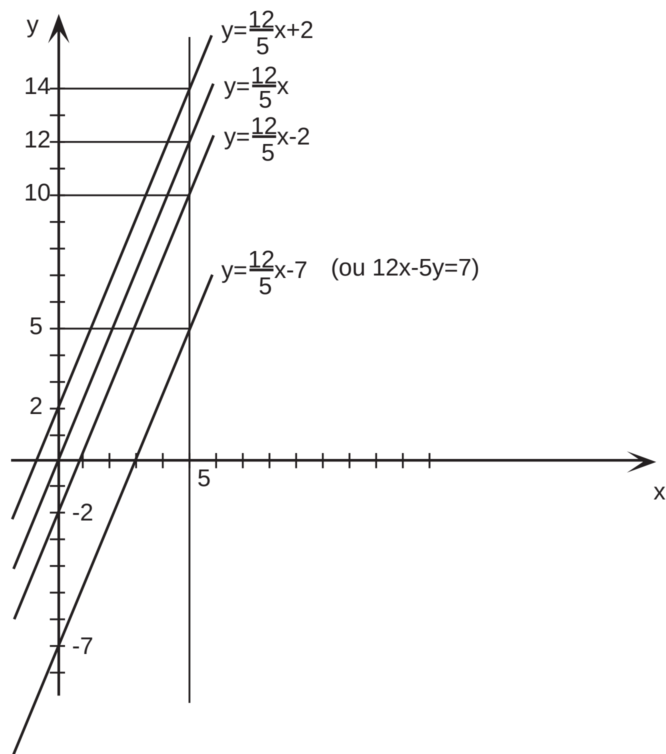
x	y = $y = \frac{12}{15}x + 2$
0	2
5	14

a3)

x	$y = \frac{12}{15}x - 2$
0	$-2/5$
5	10

a4)

x	$y = \frac{12}{15}x - 7$
0	$-7/5$
5	5



b) Todas as retas têm a mesma inclinação, pois, colocadas na forma y = ax + c, todas têm o mesmo **a** .

c) As quatro retas são paralelas.

2.

a1) 90 m

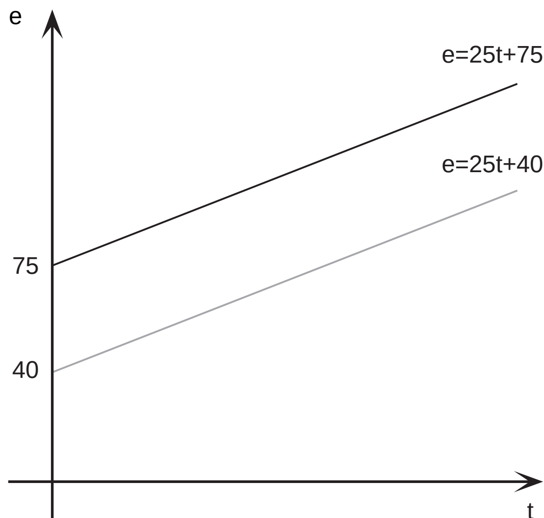
a2) 140 m

a3) 115 m

a4) 77,5 m

3.

a)



b) Significa que o automóvel já havia percorrido 75 metros, e não 40, antes do cronômetro ser disparado.

4. **a1)** I + **a2)** V **a3)** I - **a4)** V **a5)** I - **a6)** H **a7)** I +

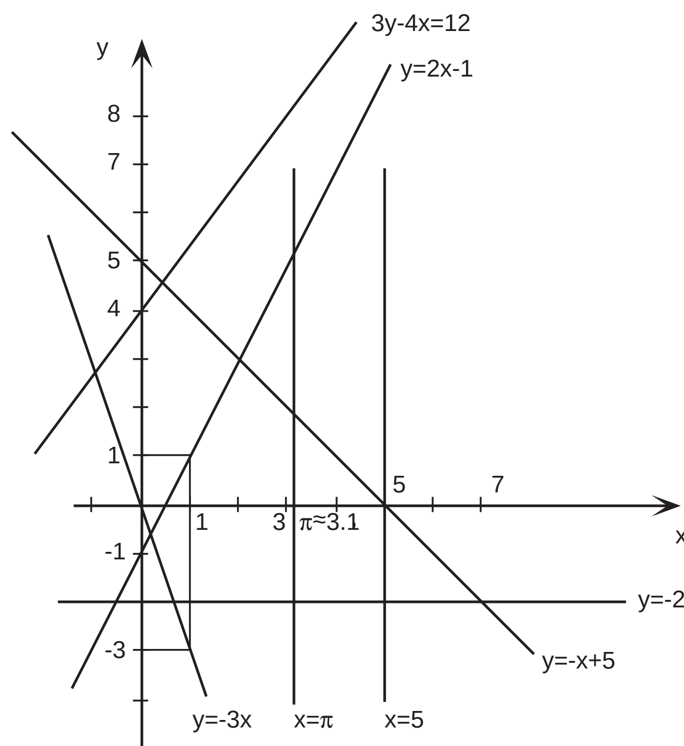
b)

x	y = 2x - 1
0	- 1
1	1

x	y = - 3x
0	0
1	- 3

x	y = - x + 5
0	5
5	0

x	$y = \frac{4x}{3} + 4$
0	4
3	8



5a)
reta 1: (-2, 0)
reta 2: (0, 0)
reta 3: $(-\frac{1}{2}, 0)$
reta 4: (-2, 0)
reta 5: $(\frac{8}{3}, 0)$
5b)
reta 1: (0, -7)
reta 2: (0, 0)
reta 3: $(0, -\frac{1}{31})$
reta 4: (0, -7)
reta 5: $(0, \frac{8}{5})$
5c) Em todos os casos, menos no da reta 2, onde os dois pontos coincidem e é necessário mais um ponto para definir a reta.

Aula 10 - Resolvendo sistemas

1. x = 4, y = 1
2. x = 3, y = 4
3. x = 5, y = - 2
4. x = - 2, y = 3
5. x = 3/2 , y = 1
6. x = 2, y = 0
7. x = 4, y = 3

Aula 11 - Sistemas resolvem problemas

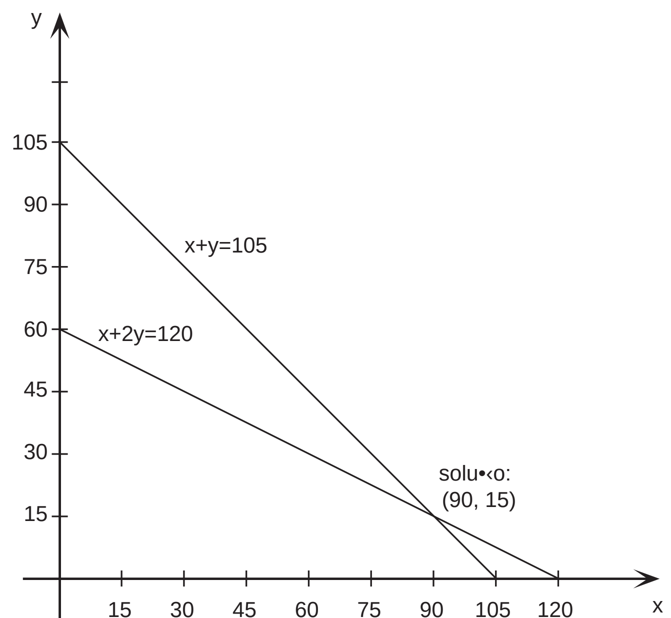
1. 25 e 18
2. 28
3. 32 automóveis; 11 motos
4. 36
5. açúcar: R$ 0,60; farinha: R$ 0,35
6. Pedro: R$ 45,00; Paulo: R$ 36,00
7. 30 km; 11 horas

Aula 12 - A interseção de retas e a solução de sistemas

1.

x	y = 105 - x
0	105
05	0

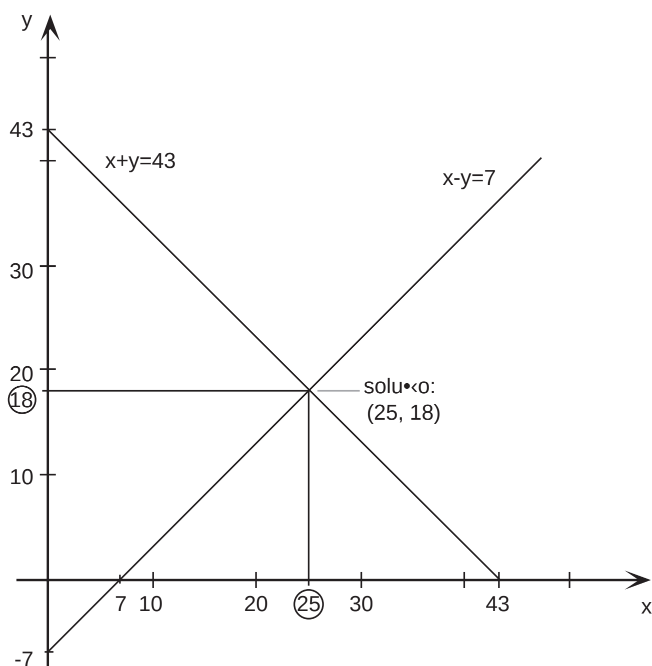
x	$y = \frac{120 - x}{2}$
0	60
120	0



2.

x	y = 43 - x
0	43
43	0

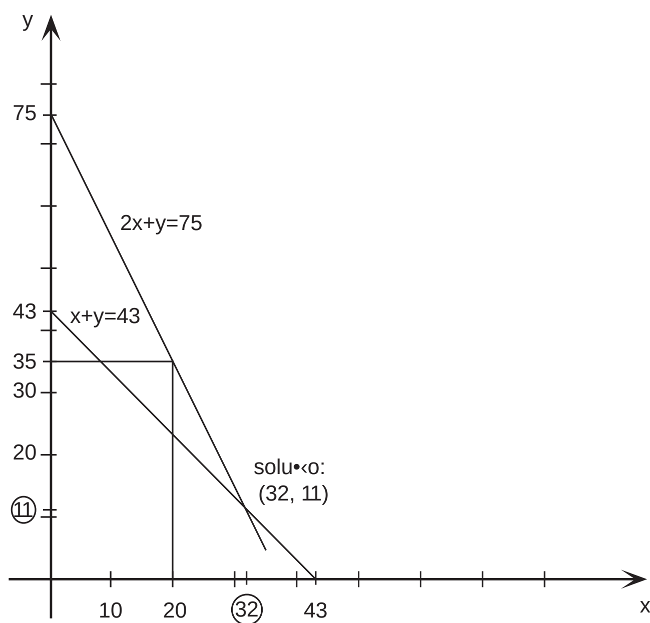
x	y = x - 7
0	- 7
7	0



3.

x	y = 43 - x
0	43
43	0

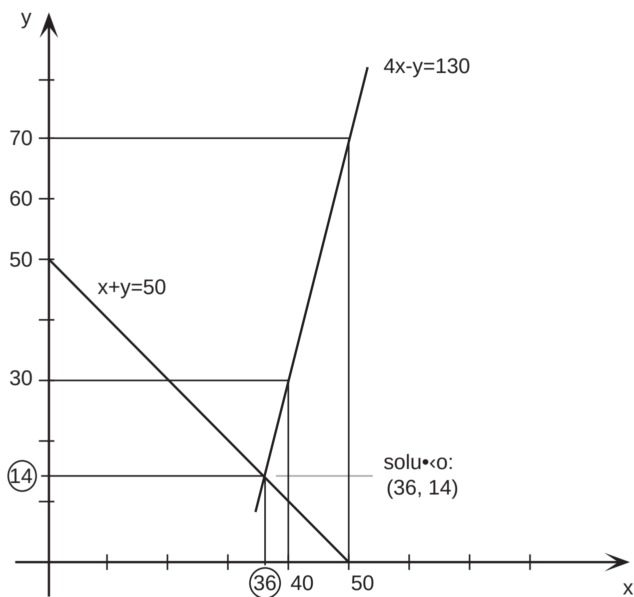
x	y = 75 - 2x
0	75
20	35



4.

x	y = 50 - x
0	50
50	0

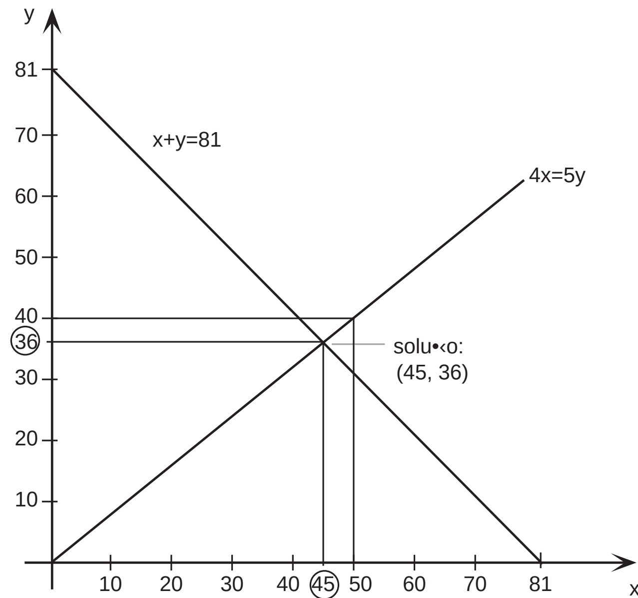
x	y = 4x - 130
40	30
50	70



5.

x	y = 81 - x
0	81
81	0

x	$y = \frac{4x}{5}$
0	0
50	40



Aula 13 - Recordando produtos notáveis

1.
a) xa + xb - xc
b) x + ax + bx + ab
2. x = 6
3. x + 6x + 9
4. x - 2x + 1
5. x = 7
6. 345
7. 6a - 13
8. x = 13
9.
a) (80 + 2) = 6400 + 2 · 80 · 2 + 4 = 6724
b) (100 - 1) = 10000 - 2 · 200 · 1 + 1 = 9801
c) (40 + 2)(40 - 2) = 40 - 2 = 1600 - 4 = 1596

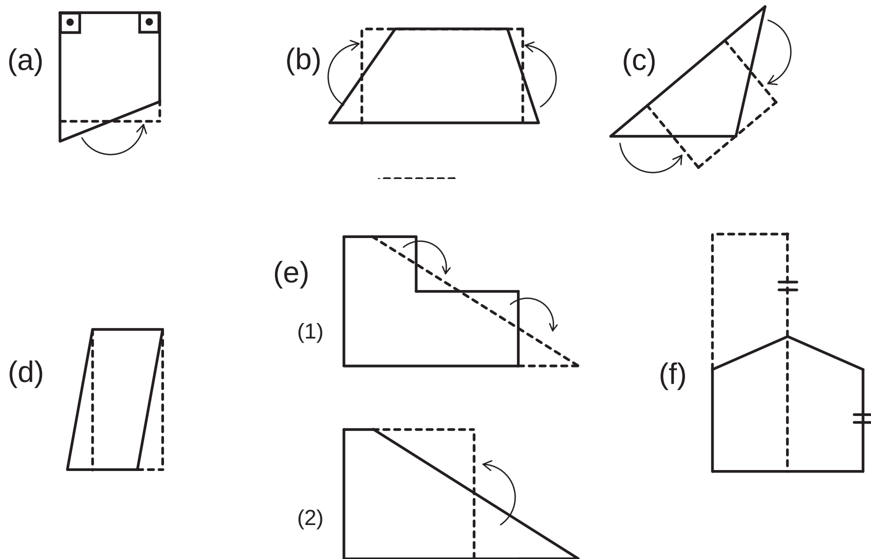
Aula 14 - Operações com potências

1.
a) 2^{8}
b) 2^{6}
c) 2^{15}
d) 2^{-3}
2.
a) $2{,}3 \cdot 10^{4}$
b) $2 \cdot 10^{6}$
c) $4 \cdot 10^{-2}$
d) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$
Atenção: a sua resposta não precisa ser exatamente igual à que demos. Por exemplo, 0,04 também se pode escrever $0{,}4 \cdot 10^{-1}$.
3. 2^{-5}
4. $10^{3} = 1000$

5.
a) 3^{-7}
b) 3^{10}
c) 3^{10}
d) $3^{-1} = 1/3$
6. $12 \cdot 10^{-9}$ ou $1{,}2 \cdot 10^{-8}$
7.
a) $5{,}9 \cdot 10^{9}$ km
b) $0{,}62 \cdot 10^{-3}$ anos-luz
8. Estava poluído porque a quantidade de dióxido de enxofre no ar de Sorocaba nesse dia era de $5{,}4 \cdot 10^{-5}$ gramas por m^3.

Aula 15 - Áreas de polígonos

1.
a) 33 unidades de área (u. a.)
b) 15 u. a + 12 u. a. + 6 u. a = 33 u. a.
2. O retângulo de lados iguais a 6 cm, cujo perímetro é 24 cm.
3.
a) 10,92 u. a.
b) 12 u. a.
c) 16 u. a.
d) 5 u. a.
e) 13 m^2
4.



5.
a) A área do quadrado maior (25 u. a.) é igual à soma das áreas dos quadrados menores (9 e 16).
b) $a^2 = b^2 + c^2$
6.
a) 3; 4
b) n - 2
7. $A_{losango} = \frac{d.d¢}{2}$

Aula 16 - Comprimento e área do círculo

1. 285,6 m
2. 8,0325 m
3. aproximadamente 6.366 km
4. 9 vezes
5.
a) 6,28 cm
b) 19,625 cm
6. 12,56 cm
7.
a) 3,92 cm
b) 52,33 cm
c) 104,66 cm
8. 117,75 cm
9. 1.256 m = 1,256 km
10. 2.000 voltas completas.

Aula 17 - O Teorema de Tales

1. MN = 3,5
NP = 3
PM = 4
2.
a) 2/3
b) 0,02
OH= 20 m
c) 1,62, aproximadamente (A razão é a mesma, é claro.)
3.
a) O Teorema de Tales.
b) Pois é paralelo às bases, e MN é a média aritmética da bases:
$MN = \frac{AD + BC}{2}$, como vimos na Aula 15.

c) AD= 3,2 cm
BC= 4,8 cm $\frac{3,2 + 4,8}{2} = 4$
MN= 4 cm
4. Traçando a diagonal AC, vemos que: como Q é ponto médio e P também é ponto médio, as razões de segmentos $\frac{AQ}{QD}$ e $\frac{CP}{PD}$ são ambas iguais a 1; logo, são iguais entre si. Se os segmentos foram divididos em razões iguais, então é porque as retas são paralelas. (A recíproca do Teorema de Tales, é verdadeira dentro do triângulo). Logo, QP é paralelo a AC e também MN é paralelo a AC; daí que QP e MN são paralelos. Do mesmo jeito, mostra-se que PN e QM são também paralelos. Portanto, MNPQ é sempre um ***paralelogramo***!
5.
a) B = b (ângulos correspondentes)
C = c (idem)
Considerando que ângulos opostos pelo vértice são iguais, chegamos a:
A + b + c = 180º (um ângulo raso)
Logo: A + B + C = 180º
b) A + B + C + D = 360º
c) A + B + C + D + E = 540º

d) 180º (n - 2), pois dividimos o polígono em n-2 triângulos.

6.

a) A = B = C = D = E = $\frac{540^{o}}{5} = 108^{o}$

b) CAD = 36º
ACD = ADC = 72º

c) Os triângulos RST e STX do Exercício 1c) são semelhantes a estes, pois têm os mesmos ângulos que estes. (Para triângulo, ter ângulos iguais já garante a proporcionalidade dos lados).

7. x = 10 km; y=30 km; z=22,5 km

8.

a) V (É a mesma proporção, trocando-se os meios)

b) V (É a mesma proporção, trocando-se os extremos).

c) F

d) F

e) V

Aula 18 - A raiz quadrada

1.

a) 5

b) 8

c) 14

2.

a) $x = \pm 6$

b) $x = \pm 7$

3

a) 23

b) 34

c) 7,6

4. 1,73

5.

a) a

b) a

c) a

6.

a) $2\sqrt{3}$

b) 12

c) $20\sqrt{2}$

7.

a) $5\sqrt{2} \cong 7,07$

b) $2\sqrt{3} \cong 3,46$

8. 35 m

9. 3,46 m

Aula 19 - O Teorema de Pitágoras

1.

a) $c = 8$

b) $a = 10\sqrt{2} \cong 14,1$

c) $b \cong 10,5$

2.

a) 5 m

b) 5 m

c) $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

3.

a) 5,87 m

b) $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

4.

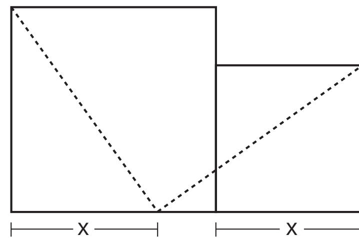
a) O triângulo BB'C é equilátero, pois seus três ângulos são iguais a 60º. Logo, $BC = BB' = 2 \cdot AB = 5$.

b) $AC = 2,5\sqrt{3}$

5.

a) $a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt{3}$; $c = \sqrt{4} = 2$; $d = \sqrt{5}$; $e = \sqrt{6}$

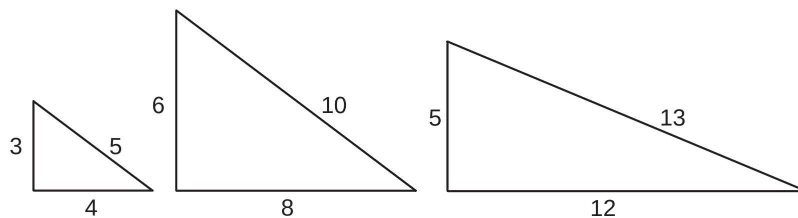
6.



7.

a) Aqui estão algumas soluções: 3 - 4 - 5; 6 - 8 - 10; 5 - 12 - 13

b)



c) Os triângulos 3 - 4 - 5 e 6 - 8 - 10 são semelhantes, pois $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

8. Como foi feito em aula: A área do triângulo tanto é $\frac{bc}{2}$ como $\frac{ah}{2}$.

Logo, $\frac{ah}{2} = \frac{bc}{2}$ e $h = \frac{bc}{a}$

Aula 20 - Calculando distâncias sem medir

1. 130 m

2. 1,5 m

3. 8,5 m

4. 76 m

Para suas anotações

Para suas anotações

Para suas anotações

Para suas anotações

Para suas anotações

AULA

21

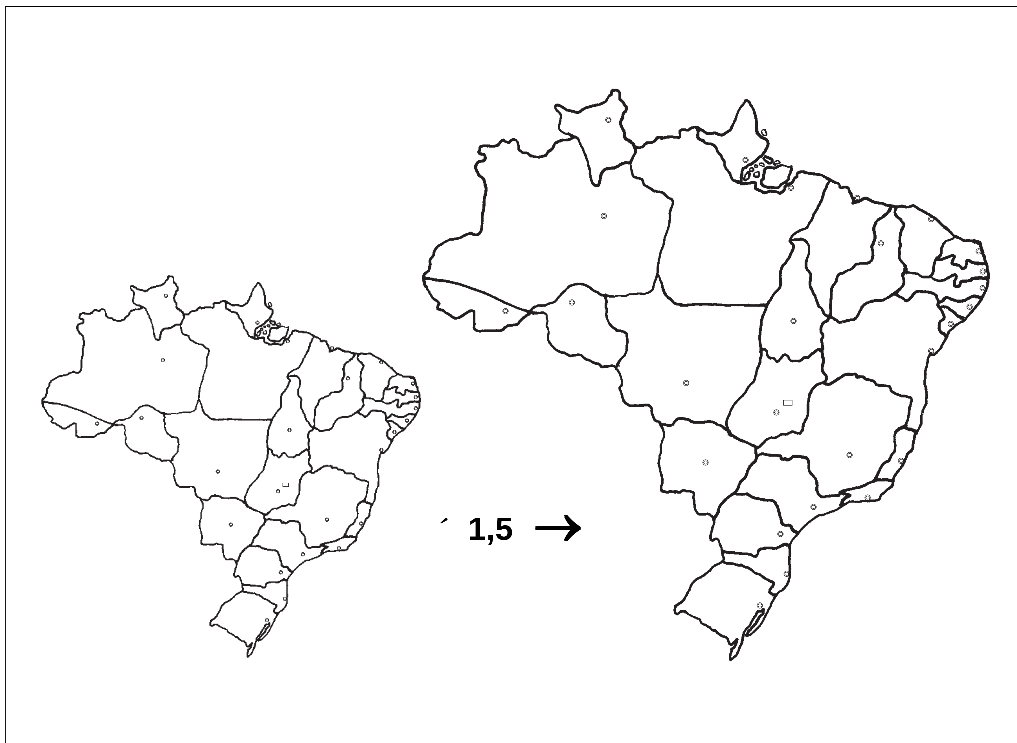
Semelhança e áreas

Introdução

Na Aula 17, estudamos o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos. Nesta aula, vamos tornar mais geral o conceito de semelhança e ver como se comportam as áreas de figuras semelhantes. Dizemos que duas figuras são semelhantes quando uma é ***ampliação*** da outra. Mas, o que significa ***ampliar***?

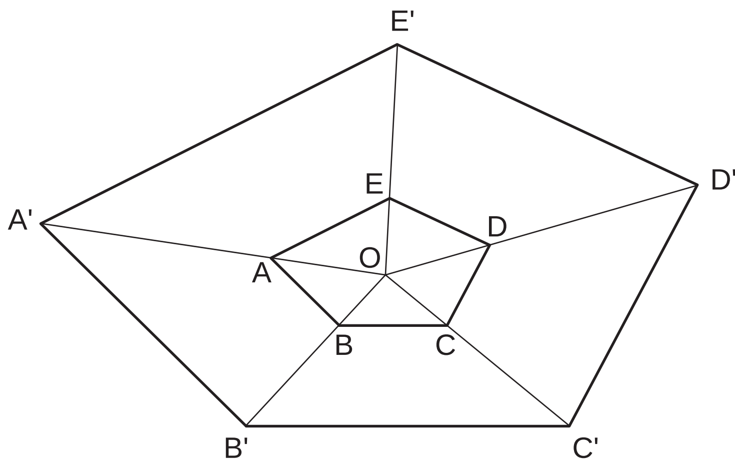
Ampliar (ou reduzir) uma figura significa obter uma outra com a mesma forma mas de tamanho diferente. Numa ampliação, todos os comprimentos ficam multiplicados por um mesmo número. Numa redução, todos os comprimentos ficam divididos por um mesmo número.

Veja abaixo o mapa do Brasil em dois tamanhos diferentes, onde estão assinaladas as capitais dos estados. O maior é uma ampliação do menor em 1,5 vezes. Isto significa que todas as distâncias medidas no mapa maior são iguais às mesmas distâncias do mapa menor multiplicadas por 1,5. Você pode verificar isso com o auxílio de uma régua.



Nossa aula

Duas figuras são semelhantes quando todas as distâncias de uma delas são iguais às da outra, multiplicadas por um fator constante. Para tornar essa definição mais clara, vamos mostrar inicialmente um método que nos permite ampliar uma figura. Suponha que desejamos tornar o polígono ABCDE da figura abaixo três vezes maior. Escolhemos então um ponto O qualquer, unimos esse ponto a cada um dos outros e triplicamos todos os comprimentos: OA, OB, OC, OD e OE. O novo polígono A' B' C' D' E' é o ***triplo*** de ABCDE.

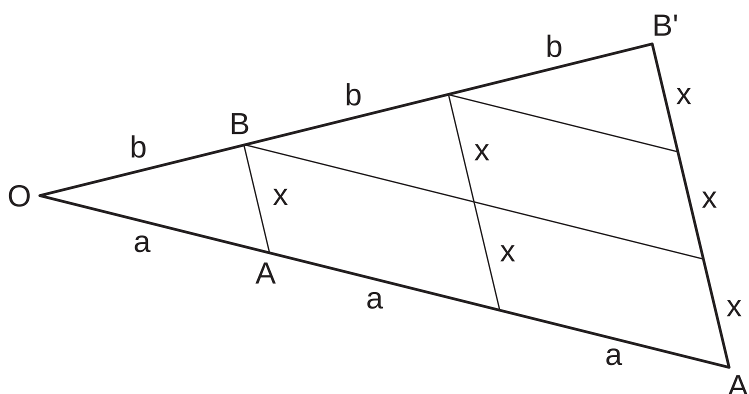


Na figura acima, fizemos OA' = 3 . OA, OB' = 3 . OB, OC' = 3 . OC e assim por diante. Observe então o que acontece: os lados do polígono maior são ***paralelos*** aos lados do polígono menor, e cada lado do polígono maior é o triplo do lado correspondente ao polígono menor. Em linguagem matemática:

A'B'′	//	AB	e	A'B'′ = 3 . AB
B'C'	//	BC	e	B'C'′ = 3 . BC
C'D'′	//	CD	e	C'D' = 3 . CD

e assim por diante. Repare ainda que essas relações valem também para outros segmentos que não estão desenhados. Por exemplo, as diagonais A’D’ e AD são paralelas e a maior é o triplo da menor.

A figura a seguir explica por que, ao construirmos OA’ = 3 · OA e OB’ = 3 · OB, encontramos um segmento A’B’ paralelo a AB e de comprimento três vezes maior que AB. Observe que, no interior do triângulo OA’B’, existem três triângulos iguais e três paralelogramos também iguais:



O método que descrevemos permite criar uma figura semelhante à figura dada. Podemos dizer que a figura maior é uma ***ampliação*** da menor, mas também que a figura menor é uma ***redução*** da maior. O que importa é que as duas figuras são ***semelhantes***. Para relacionar seus tamanhos, definimos um número chamado ***razão de semelhança***, isto é, a razão entre os comprimentos correspondentes das duas figuras. Ela sempre pode ser escrita de duas formas (porque a semelhança tanto pode ser considerada uma ampliação ou uma redução) e no nosso exemplo ela é:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{A'B'}{AB} = 3$$

Uma outra propriedade da semelhança é que ela conserva os ângulos. No nosso exemplo, todos os ângulos do polígono A'B'C'D'E' são exatamente os mesmos do polígono ABCDE. Mais uma vez, é bom lembrar que isso vale para quaisquer ângulos.

Precisamos agora aprender a reconhecer quando dois polígonos são semelhantes. O critério geral é o seguinte:

Dois polígonos são semelhantes quando seus lados são proporcionais e seus ângulos internos respectivamente iguais.

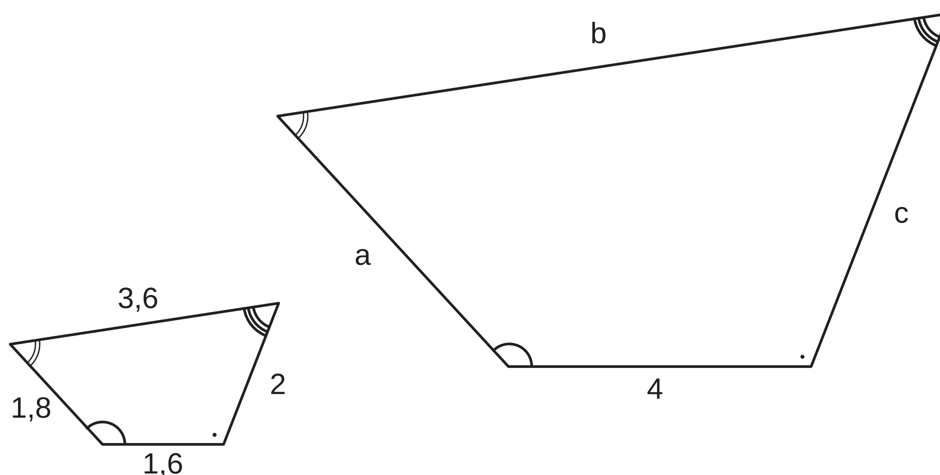
ABCD... é semelhante a A'B'C'D'...
Então

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = ... = \quad \textit{razão de semelhança}$$

$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{D} = \hat{D}'...$

EXEMPLO 1

Os dois quadriláteros desenhados abaixo são semelhantes. Quais são as medidas dos lados **a**, **b** e **c**?



Solução: Nas figuras da página anterior, os ângulos iguais estão marcados com o mesmo símbolo. Assim, se as figuras não aparecerem na mesma posição, podemos reconhecer os lados correspondentes.
Como os lados correspondentes das duas figuras são proporcionais, podemos escrever:

$$\frac{1,6}{4} = \frac{1,8}{a} = \frac{3,6}{b} = \frac{2}{c}$$

A primeira fração nos dá a razão de semelhança:

$$\frac{1,6}{4} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5} = \text{razão de semelhança}$$

Assim, todas as outras frações são também iguais a $\frac{2}{5}$:

$$\frac{1,8}{a} = \frac{2}{5} \rightarrow a = \frac{1,8 \cdot 5}{2} = 4,5$$

$$\frac{3,6}{b} = \frac{2}{5} \rightarrow b = \frac{3,6 \cdot 5}{2} = 9$$

$$\frac{2}{c} = \frac{2}{5} \rightarrow c = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$$

Um caso especial é o da semelhança de triângulos, que já estudamos na Aula 17. Para reconhecer triângulos semelhantes, basta verificar se eles possuem os mesmos ângulos ***ou*** se seus lados são proporcionais. Por exemplo, consideremos dois triângulos: o primeiro de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm e o segundo de lados 27 cm, 36 cm e 45 cm. Serão esses triângulos semelhantes?

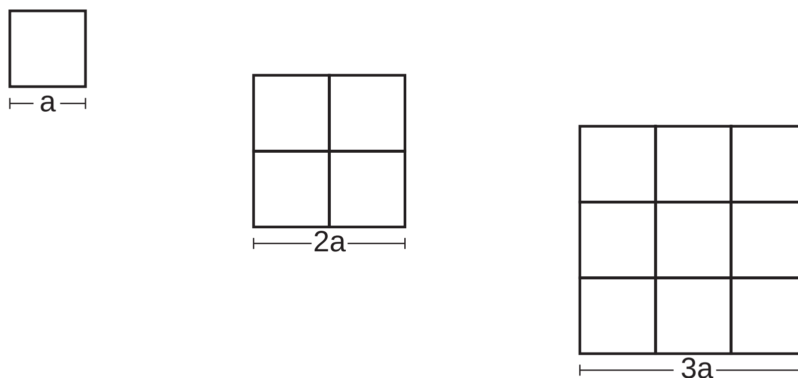
A resposta é **sim**, porque:

$$\mathbf{\frac{3}{27} = \frac{4}{36} = \frac{5}{45}}$$

Repare que as três frações são iguais porque cada uma delas é igual a $\frac{1}{9}$ (a razão de semelhança). Nós sabemos que o triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm é retângulo porque $3^2 + 4^2 = 5^2$. Como triângulos de lados proporcionais são semelhantes e, portanto, possuem os mesmos ângulos, concluímos que o triângulo de lados 27 cm, 36 cm e 45 cm também é um triângulo retângulo.

Semelhança e áreas

Para que você perceba a relação entre as áreas de figuras semelhantes, vamos examinar o que ocorre com os quadrados. Na figura a seguir, você vê três quadrados, o primeiro com lado **a**, o segundo com lado **2a** e o terceiro com lado **3a**:



O segundo quadrado é o dobro do primeiro, mas sua área é ***quatro vezes maior***. O terceiro quadrado é o triplo do primeiro, mas sua área é ***nove vezes maior***. Assim, se o lado de um quadrado é ***cinco vezes maior*** que o de outro, conseqüentemente sua área é ***vinte e cinco vezes maior***; da mesma forma, se você aumentar o lado de um quadrado ***dez vezes***, a área fica ***cem vezes maior***.

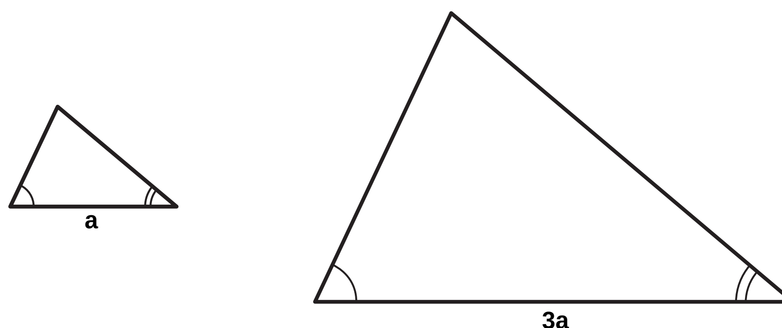
Esse fato, fácil de perceber com quadrados, é geral; isto é, ele vale para qualquer figura. Se todos os comprimentos de uma figura forem multiplicados por um número **k**, a nova figura será semelhante à primeira e sua área ficará multiplicada por $\mathbf{k^2}$. O teorema que enunciamos a seguir resume o que acabamos de observar.

> ***Se a razão de semelhança entre duas figuras é* k*,***
> ***então a razão entre suas áreas é* $\mathbf{k^2}$*.***

Acompanhe os exemplos a seguir para ver se você entendeu o que acabamos de dizer.

EXEMPLO 2

A figura abaixo mostra dois triângulos semelhantes. Se a área do menor é 8 cm^2, qual é a área do maior?



Solução: A razão de semelhança é a razão entre dois lados correspondentes, ou seja,

$$k = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

O nosso teorema diz que:

$$\frac{\text{área do menor}}{\text{área do maior}} = k^2$$

Representando por **S** a área do triângulo maior, temos:

$$\frac{8}{S} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{8}{S} = \frac{1}{9}$$

$$S = 8 . 9 = 72$$

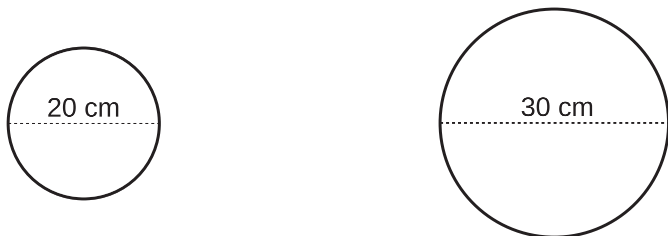
Portanto, a área do triângulo maior é **72 cm²**.

EXEMPLO 3

Em um restaurante, uma pizza com 20 cm de diâmetro custa R$ 3,60. Quanto você espera pagar por uma outra, do mesmo sabor, com 30 cm de diâmetro?

Este é um caso comum. Nos cardápios de muitos restaurantes existem pizzas de diferentes tamanhos com preços também diferentes. Vamos mostrar na solução deste exemplo, como decidir o tamanho que sai mais em conta, ou seja, como comer mais por um preço menor.

Solução: As duas pizzas são figuras semelhantes.



O valor que pagamos deve ser proporcional à quantidade que comemos, ou seja, o preço de cada pizza deve ser proporcional a sua área:

$$\frac{\text{preço da pequena}}{\text{preço da grande}} = \frac{\text{área da pequena}}{\text{área da grande}}$$

Temos então um problema que envolve a razão entre áreas de figuras semelhantes. Vamos resolvê-lo com o auxílio do nosso teorema:

$$\text{razão de semelhança: } k = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{área da pequena}}{\text{área da grande}} = K^2 = \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

Podemos calcular o preço da pizza maior. Representando esse preço por **p**, temos:

$$\frac{3{,}60}{p} = \frac{4}{9}$$

Daí,
$$p = \frac{3{,}60 \cdot 9}{4} = 8{,}1$$

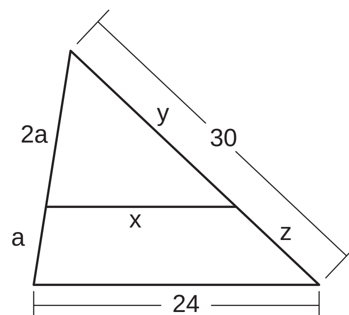
Concluímos então que o preço correto da pizza maior é **R$ 8,10**.

Você pode achar o preço da pizza maior muito alto. Afinal, o diâmetro só aumentou de 20 cm para 30 cm. O que ocorre, na realidade, é que a área da pizza maior é mais que o dobro da área da pizza menor. O preço que calculamos é o correto do ponto de vista do consumidor. Imagine agora que a pizza pequena custa R$ 3,60 e a grande R$ 7,00. O que concluímos? A pizza grande sai mais em conta. Se estamos em grupo e vamos dividir várias pizzas, sai mais barato, nesse caso, pedir todas do tamanho maior.

Exercícios

Exercício 1

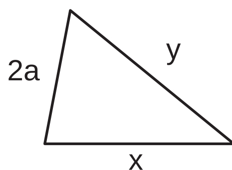
O triângulo abaixo foi dividido em duas partes por meio de uma reta paralela a sua base.

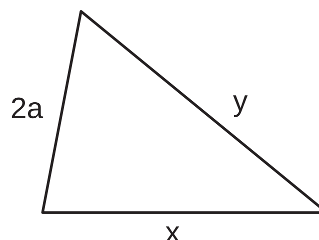


a) Calcule os segmentos x, y e z.

b) Sabendo que a área do triângulo grande é igual a 252, calcule a área do triângulo menor e a área do trapézio.

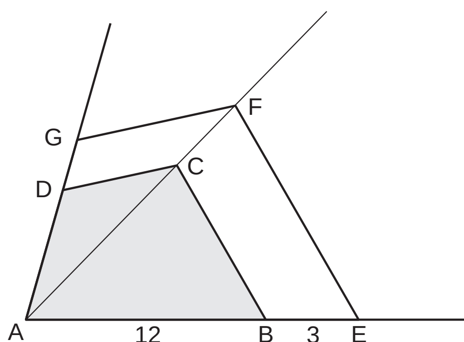
Sugestão: Observe que os dois triângulos abaixo são semelhantes. Determine a razão de semelhança e, para o item **b**, aplique o teorema da razão das áreas.





Exercício 2

ABCD é um jardim de 80 m². Ele foi ampliado, e agora tem a forma AEFG semelhante à anterior. Se AB = 12 m e BE = 3 m, calcule a área do novo jardim.



Sugestão: Determine a razão de semelhança das duas figuras e aplique o teorema da razão das áreas.

Exercício 3

Dois triângulos T_1 e T_2 são semelhantes. O primeiro tem lados 8 cm, 9 cm e 13 cm e o segundo tem perímetro igual a 360 cm.

a) Calcule os lados de T_2;

b) Quantas vezes a área de T_2 é maior que a área de T_1?

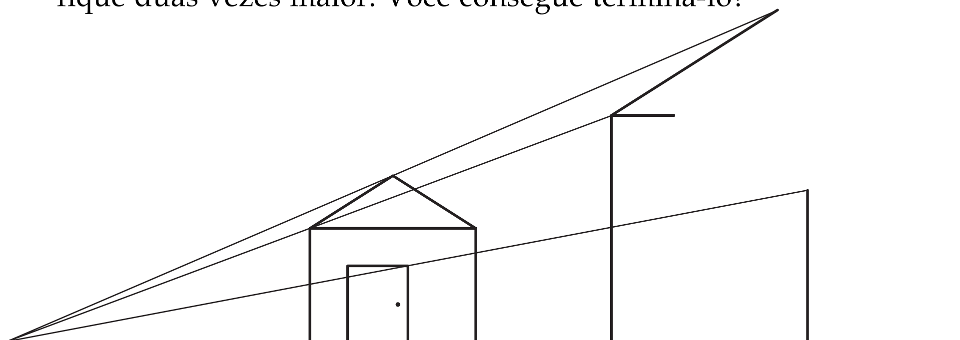
Sugestão: A razão de semelhança é igual à razão entre os lados, mas é também igual à razão entre os perímetros.

Exercício 4

Para fazer o piso de uma sala gastamos 1.500 tacos. Se todas as medidas dessa sala forem multiplicadas por 1,6 teremos uma outra semelhante. Quantos tacos serão necessários para fazer o piso da sala maior?

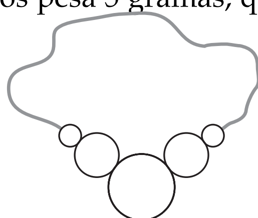
Exercício 5

Na figura abaixo, iniciamos a ampliação de um desenho de forma que ele fique duas vezes maior. Você consegue terminá-lo?



Exercício 6

O colar abaixo é feito com cinco discos de mesma espessura. São dois pequenos com raio R, dois médios com raio 2R e um grande com raio 3R. Se um dos discos pequenos pesa 5 gramas, qual é o peso de todo o colar?



AULA

22

Plantas e mapas

Introdução

Na Aula 17, aprendemos o conceito de semelhança de triângulos e vimos, na Aula 20, interessantes aplicações desse conceito no cálculo de distâncias difíceis de serem medidas diretamente. Vamos recordar esse mesmo conceito aplicado a uma figura qualquer. Observe os dois desenhos abaixo.





O que você percebe de comum nos dois desenhos?

- Eles nos mostram a mesma imagem, porém em dois tamanhos diferentes.
- Para entender bem o que está acontecendo, pegue uma régua. Tire uma medida qualquer no desenho maior e transfira-a para o desenho menor. Fazendo isso várias vezes, você vai perceber uma relação entre as medidas de um e de outro: o desenho menor é ***metade*** do maior! Dizemos então que os dois desenhos são semelhantes na razão $\frac{1}{2}$.

- Mais precisamente, quando dividimos (ou multiplicamos) todas as medidas de comprimento de uma figura por um mesmo número, criamos uma outra figura ***semelhante*** à primeira.
- Volte agora aos dois desenhos e observe os ângulos. O que ocorre? É fácil responder. Os ângulos do desenho menor são os mesmos do desenho maior. Veja os ângulos retos das portas e janelas, o ângulo do telhado etc. Eles não mudam quando ampliamos ou reduzimos o tamanho de um desenho.

Vamos então registrar nossas conclusões:

Em figuras semelhantes:

- ***os ângulos não mudam;***
- ***as medidas de comprimento são multiplicadas (ou divididas) pelo mesmo número.***

Nossa aula

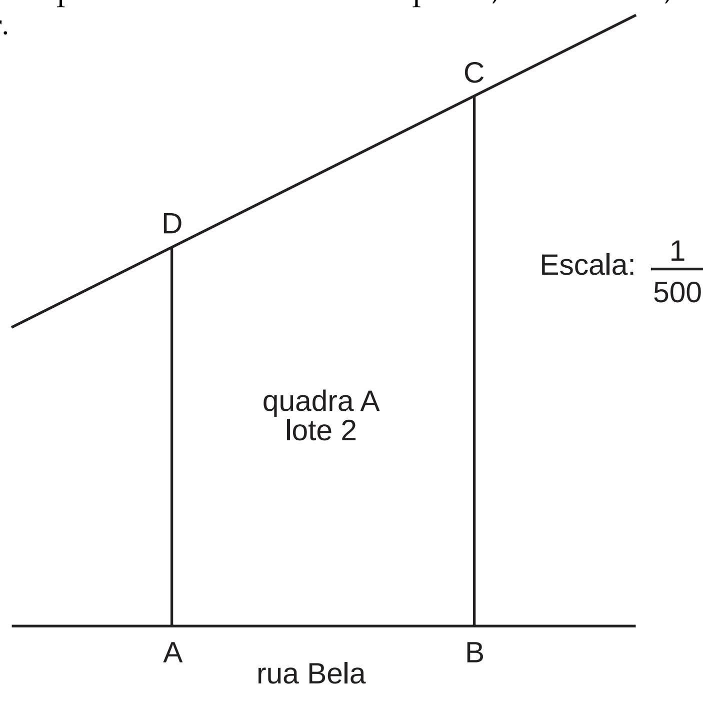
Os terrenos

Você já deve ter visto a planta de um terreno. Ela deve ter a mesma forma do terreno, mas muito menor, pois tem de caber em uma folha de papel.

Para fazer uma planta, o desenhista mantém todos os ângulos e divide todos os comprimentos por um mesmo número. Assim, ele tem certeza de criar um desenho com a mesma forma do terreno, ou seja, um desenho ***semelhante*** ao terreno.

A planta do terreno deve vir acompanhada de uma informação muito importante: a ***escala***. Ela é um número que mostra a relação entre as medidas do desenho e as medidas reais, ou seja, é a razão de semelhança entre a planta e o terreno.

Vamos mostrar a seguir a planta de um terreno na escala $\frac{1}{500}$ (um para quinhentos). Isso quer dizer que, para fazer a planta, o desenhista dividiu as medidas do terreno por 500. Em outras palavras, a escala $\frac{1}{500}$ indica que cada unidade de comprimento no desenho corresponde, na realidade, a um valor 500 vezes maior.



Se você tem a planta do terreno, a escala do desenho e uma régua, pode facilmente calcular suas medidas reais. Basta multiplicar as medidas encontradas na planta pelo número que aparece no denominador da escala. No nosso exemplo, para determinar as medidas do terreno, basta multiplicar as medidas da planta por 500. Veja:

	MEDIDA NA PLANTA	MEDIDA REAL
FRENTE DO TERRENO	AB = 4 cm	4 . 500 = 2.000 cm = 20 m
LATERAL ESQUERDA	AD = 5 cm	5 . 500 = 2.500 cm = 25 m
LATERAL DIREITA	BC = 7 cm	7 . 500 = 3.500 cm = 35 m
FUNDO DO TERRENO	DC = 4,5 cm	4,5 . 500 = 2.250 cm = 22,5 m

Com a planta do terreno e sua escala, podemos calcular duas outras medidas importantes: o perímetro e a área desse terreno.

O ***perímetro*** é a soma de todas as medidas do contorno do terreno. É a soma dos seus lados.

No nosso terreno, o perímetro será:

$$20 + 25 + 35 + 22{,}5 = 102{,}5 \text{ m}$$

Essa medida é importante se você deseja cercar o terreno. Por exemplo, se quisermos usar uma cerca de quatro fios de arame farpado, sabemos que vamos gastar $102{,}5 \cdot 4 = 410$ m de arame, pelo menos.

A ***área*** do terreno é a medida de sua superfície. Dizemos que um terreno é ***maior*** ou ***menor*** que outro dependendo de sua ***área***. Em cada região, o preço de um terreno varia de acordo com sua área.

Para calcular a área de um terreno, devemos observar, na planta, sua forma geométrica. Alguns terrenos possuem forma tão irregular que o cálculo de sua área torna-se bastante complicado. No nosso caso, como os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ do terreno são retos, concluímos que sua forma é um ***trapézio***. A base maior desse trapézio é BC = 35 m, a base menor é AD = 25 m e a altura é AB = 20 m. Lembrando que a área do trapézio é:

$$\frac{\textbf{(base maior + base menor)} \cdot \textbf{(altura)}}{\textbf{2}}$$

temos para a área do nosso terreno:

$$\frac{(35 + 25) \cdot 20}{2} = \frac{60 \cdot 20}{2} = 600 \text{ m}^2$$

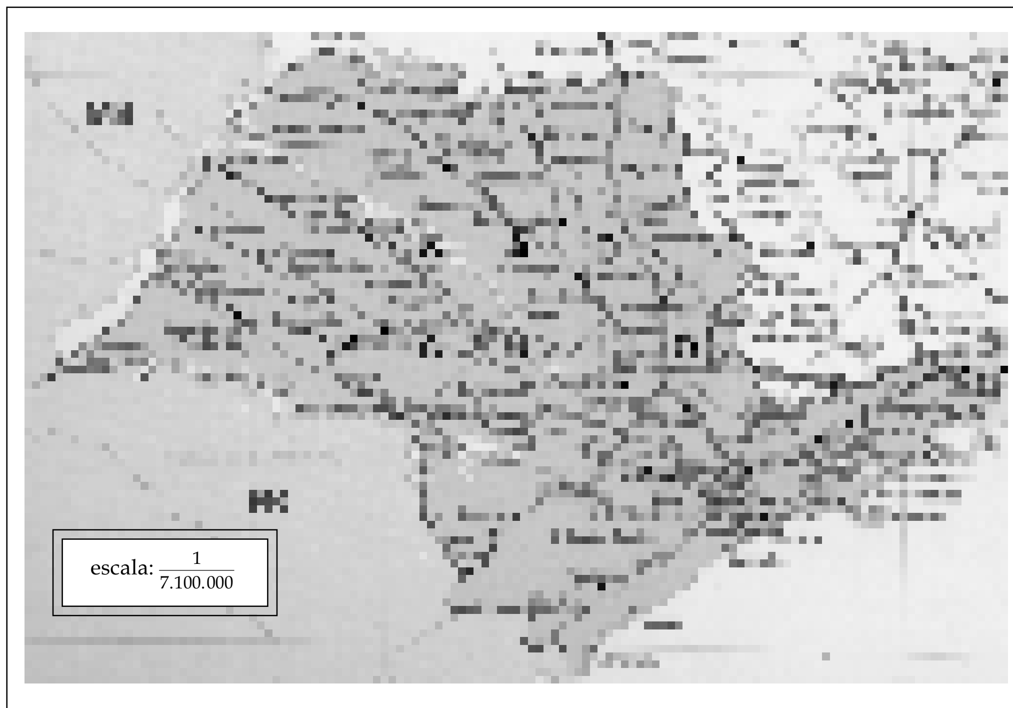
Pois bem. Acabamos de examinar um terreno usando sua planta e a escala do desenho. Calculamos seu perímetro e sua área porque, com o auxílio da escala, determinamos suas medidas reais. Todas as vezes que você estiver examinando um desenho reduzido de uma situação real procure saber em que escala esse desenho foi feito. E tenha em mente seu significado:

$$\textit{escala} = \frac{\textit{medida feita no desenho}}{\textit{medida real}}$$

Os mapas

Os mapas são desenhos muito reduzidos de grandes regiões. Para que você possa determinar distâncias em um mapa, precisa apenas de uma régua e da ***escala*** desse mapa.

Abaixo você vê o mapa do estado de São Paulo com suas principais cidades desenhado na escala 1 : 7.100.000



A escala indica que 1 cm no mapa corresponde a uma distância de 7.100.000 cm na realidade. Vamos melhorar isso. Observe:

7.100.000 cm = 71.000 m = 71 km

Então, cada centímetro do desenho corresponde a 71 km na realidade. Como exemplo, vamos determinar a distância em linha reta entre as cidades de Presidente Prudente e Ribeirão Preto. Com uma régua medimos no mapa a distância entre essas duas cidades. Encontramos 5,1 cm. Confira. Como cada centímetro nesse mapa representa 71 km, a distância real será $5{,}1 \cdot 71 = 362$ km, aproximadamente.

Mais uma vez você verificou que a escala de um mapa é uma informação fundamental para o cálculo de distâncias. Procure então fazer os exercícios propostos.

Exercícios

Exercício 1

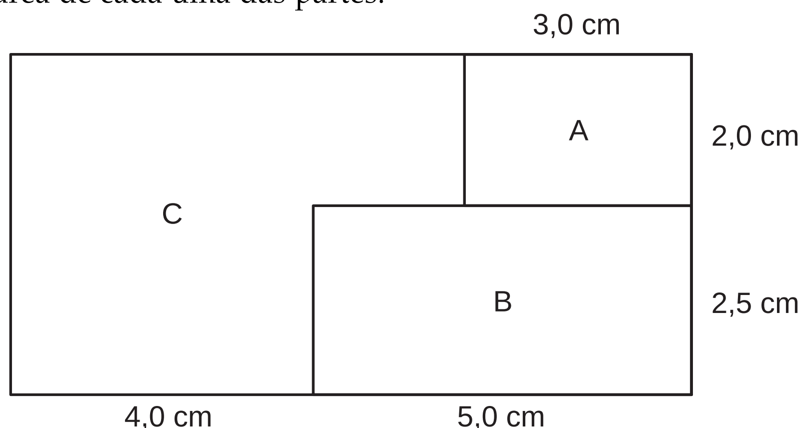
A planta de um terreno está na escala $\frac{1}{800}$. Se a frente desse terreno mede 4,5 cm, quanto ela vale na realidade?

Exercício 2

Usando o mapa da nossa aula, qual é a distância em linha reta entre as cidades de Santos e de Marília?

Exercício 3

A figura abaixo mostra um grande terreno retangular dividido em três outros terrenos menores. Se a escala do desenho é $\frac{1}{1000}$, calcule o perímetro e a área de cada uma das partes.



Exercício 4

Dê exemplos de dois terrenos, ambos com 600 m² de área, mas de perímetros diferentes.

Exercício 5

Você vê abaixo a planta da cidade de Brasília na escala $\frac{1}{200.000}$.
Qual é a distância em linha reta do Palácio da Alvorada até a Granja do Torto?



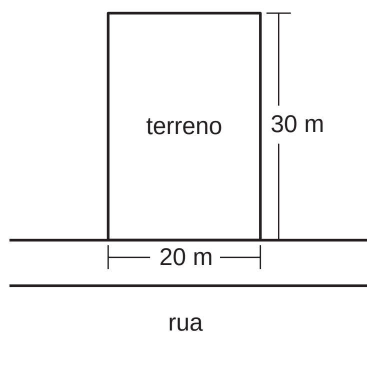
Exercício 6

As medidas que fazemos com a régua sobre plantas e mapas são apenas aproximadas, mas suficientes para nossas necessidades.
Voltando ao terreno de nossa aula, determinamos que a medida de seu fundo era CD = 4,5 cm, o que equivale na realidade a 22,5 m.
Você agora vai determinar uma melhor aproximação dessa medida da seguinte forma: coloque as medidas reais na planta do terreno e trace pelo ponto D uma reta paralela a AB. Quando esta reta encontrar BC, formará um triângulo retângulo. Observe que os catetos são conhecidos; assim você pode determinar a hipotenusa. Encontre, desta forma, uma aproximação melhor para CD com duas casas decimais.

A casa

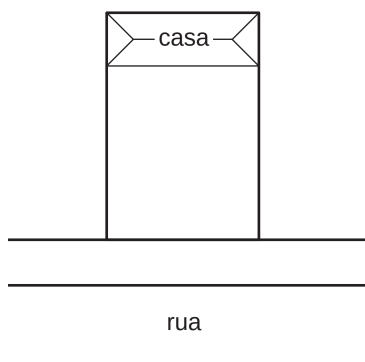
Introdução

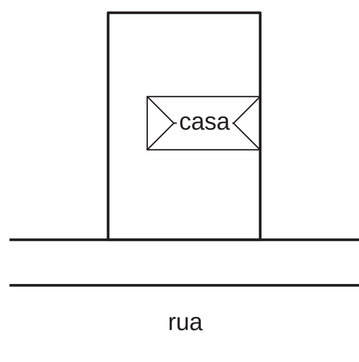
Nesta aula vamos examinar a planta de uma casa. Será uma casa simples, situada em terreno plano, com sala, dois quartos, cozinha, banheiro e área de serviço.



Para iniciar nosso pequeno projeto, precisamos, antes de mais nada, conhecer as dimensões do terreno para aproveitar bem os espaços. Vamos então imaginar que nossa casa seja construída em um terreno de 20 m de frente por 30 m de fundo.

Agora, vamos escolher a posição da casa dentro do terreno. Para isso, devemos pensar em duas coisas importantes: a iluminação e a ventilação. Se você imaginar, por exemplo, a casa construída no fundo do terreno com todas as janelas voltadas para a frente, ela poderá ter boa iluminação (se as janelas forem grandes), mas terá ventilação ruim.



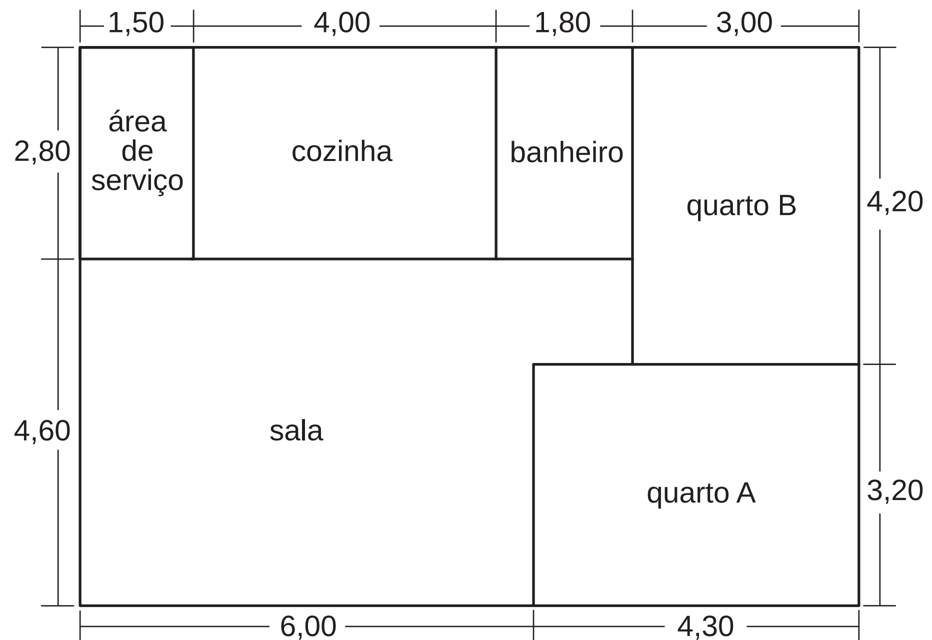


Se, entretanto, imaginarmos a casa na posição sugerida pela figura da direita, poderemos ter janelas voltadas tanto para a frente quanto para os fundos. Desta forma, com as janelas abertas, o ar poderá atravessá-la e seu interior será certamente mais fresco. Vamos então adotar essa segunda hipótese e fazer um primeiro desenho.

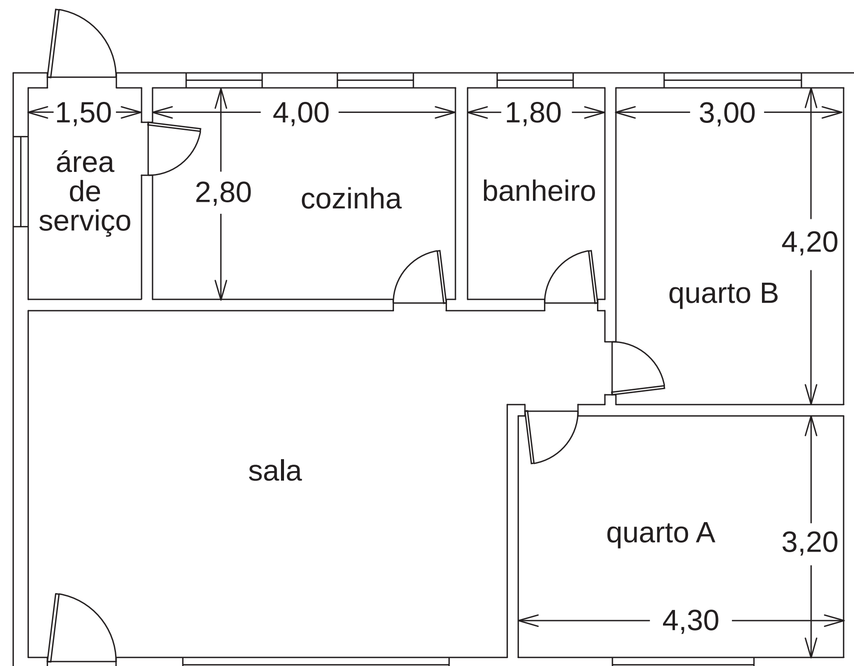
Nossa aula

O primeiro desenho que fazemos da nossa casa é apenas um esboço. Neste desenho, também chamado de croqui, mostramos a disposição dos cômodos com suas medidas aproximadas. Devemos já usar uma ***escala*** para que o desenho seja ***semelhante*** à casa que pretendemos construir.

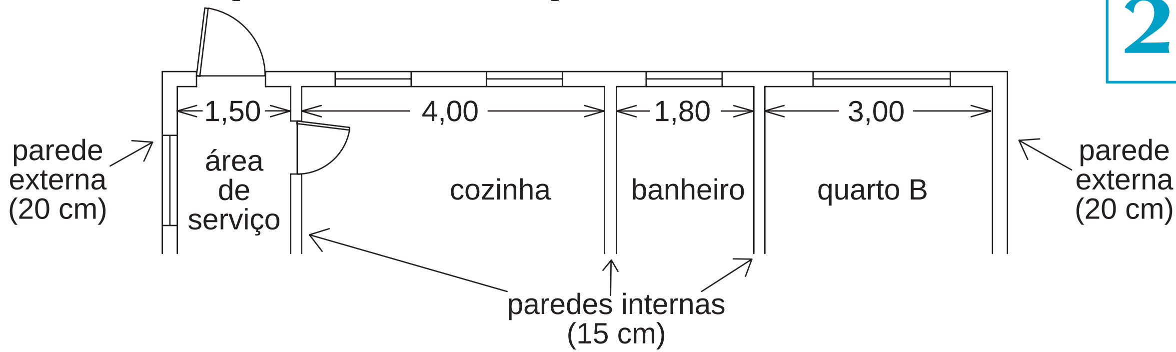
Usaremos aqui a escala $\frac{1}{100}$, que é muito conveniente porque cada centímetro do desenho corresponderá a 100 centímetros reais, ou seja, a 1 metro. Assim, por exemplo, se você medir a largura de um quarto e encontrar 3 cm, saberá que, de fato, essa largura é de 3 m. Veja então a proposta para nossa casa:



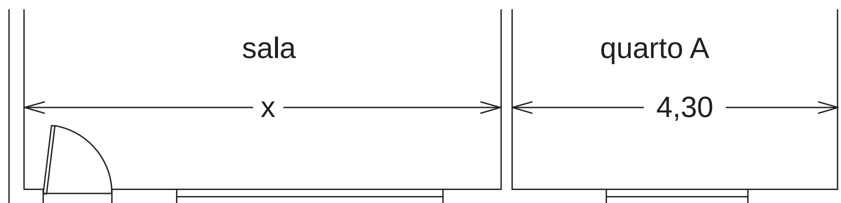
Se estamos satisfeitos com o croqui, desenhamos a planta da casa. Em primeiro lugar localizamos portas e janelas. Depois anotamos a espessura das paredes. No desenho abaixo mostramos a planta da casa. As medidas ***internas*** de todos os cômodos, exceto as da sala, são iguais às do croqui. Acrescentando-se paredes ao desenho inicial, as medidas da sala serão calculadas depois.



As paredes externas têm 20 cm de espessura e as internas têm 15 cm. Com essa informação, podemos calcular o comprimento total da casa.



O comprimento será então:
C = 0,20 + 1,50 + 0,15 + 4,00 + 0,15 + 1,80 + 0,15 + 3,00 + 0,20.
Ou seja, C = 11,15 m.

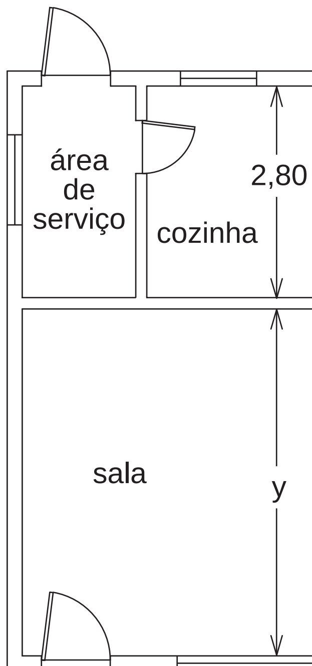


Vamos então calcular o comprimento exato da sala revendo o comprimento da casa, agora atravessando a sala e o quarto, como na figura acima.

$$0,20 + x + 0,15 + 4,30 + 0,20 = 11,15$$

Daí,
$$x + 4,85 = 11,15$$
$$x = 11,15 - 4,85$$
$$x = 6,30 \text{ m.}$$

Vamos fazer o mesmo para calcular a largura da casa. Atravessando os dois quartos, teremos (veja a planta):



L = 0,20 + 3,20 + 0,15 + 4,20 + 0,20
Ou seja, L = 7,95 m.

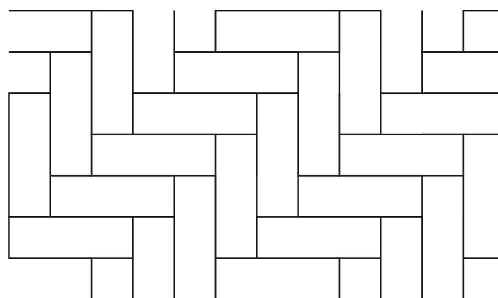
Para conhecer a largura da sala, faremos o mesmo cálculo, agora atravessando a sala e a cozinha (veja ao lado):

$$0,20 + y + 0,15 + 2,80 + 0,20 = 7,95$$

Daí,
$$y + 3,35 = 7,95$$
$$y = 7,95 - 3,35$$
$$y = 4,60 \text{ m.}$$

O problema do piso

Vamos agora resolver dois problemas que aparecem rm construção e casas. O piso de um cômodo pode ser feito de várias formas: com tacos, lajotas de cerâmica, tábuas etc. Na nossa casa, os dois quartos terão piso de tacos, como mostra o desenho ao lado.



Se cada taco tem 21 cm de comprimento por 7 cm de largura, quantos tacos serão necessários para fazer o piso dos dois quartos?

Este é nosso primeiro problema.

Para resolvê-lo, observe inicialmente que não importa a arrumação dos tacos. Cada taco ocupa certa ***área*** do piso, independentemente de sua posição. Devemos então calcular quantas vezes a área de um taco iguala a área dos quartos.

Em outras palavras, o número de tacos necessários será a área dos quartos ***dividida*** pela área de um taco. Vamos então aos cálculos:

QUARTOS	MEDIDAS (m)	ÁREAS (m²)
QUARTO A	4,30·. 3,20	13,76
QUARTO B	3,00 . 4,20	12,60
ÁREA TOTAL		26,36

A área de um taco de 21 cm de comprimento por 7 cm de largura é 21 · 7 = 147 cm². Antes de dividir, porém, devemos escrever as duas áreas na ***mesma unidade***. A nossa área total é de 26,36 m². Para escrever essa medida em cm², precisamos multiplicá-la por 10.000, pois:

$$1 \text{ m}^2 = 10.000 \text{ cm}^{22}$$

Então, 26,36 m² é igual a 263.600 cm². Assim, o número de tacos necessários é :

$$\frac{263.600}{147} \cong 1.793,2$$

É preciso lembrar que, na prática, muitos tacos serão cortados para fazer a união do piso com a parede. Erros podem acontecer e tacos podem ser danificados. É razoável esperar então um gasto de cerca de 1.800 tacos.

O problema dos tacos vem sempre acompanhado de um outro, o do rodapé. A madeira para rodapé é comprada por metro. Para saber quantos metros dessa madeira devemos comprar precisamos primeiro calcular o ***perímetro*** de cada um dos quartos para depois descontar as larguras das portas. Veja:

QUARTOS	PERÍMETROS
QUARTO A	4,30 + 4,30 + 3,20 + 3,20 = 15 m
QUARTO B	4,20 + 4,20 + 3,00 + 3,00 = 14,4 m

O perímetro total é então 15 + 14,4 = 29,4 m. Como cada porta da parte de dentro da casa tem 70 cm de largura, devemos descontar 2 . 0,7 = 1,4 m.

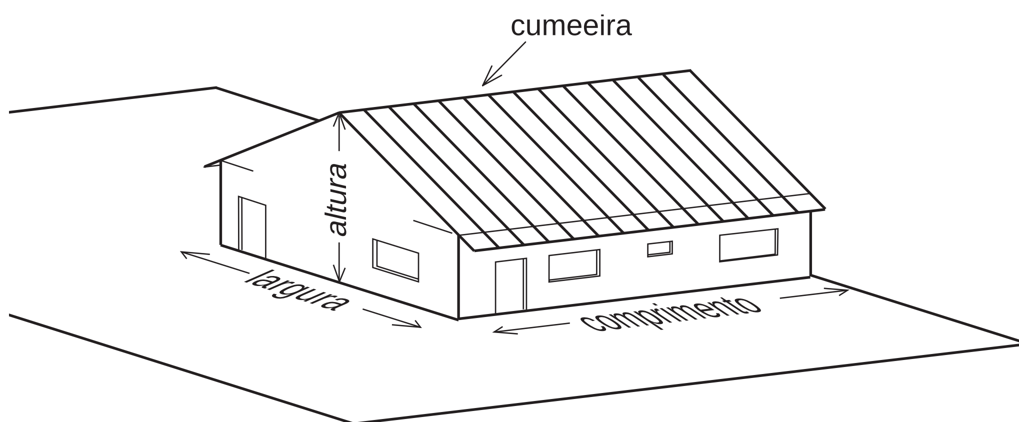
Logo, para fazer o rodapé dos dois quartos gastaremos 14,4 - 1,4 = 13 m.

O problema dos azulejos

Banheiros e cozinhas devem ter suas paredes cobertas por azulejos. O cálculo da quantidade de azulejos necessária para azujelar uma cozinha ou um banheiro é semelhante ao problema dos tacos. Basta dividir a área total que deve ser azulejada pela área de um azulejo. Os cálculos são interessantes e estão no Exercício 8, no final da aula.

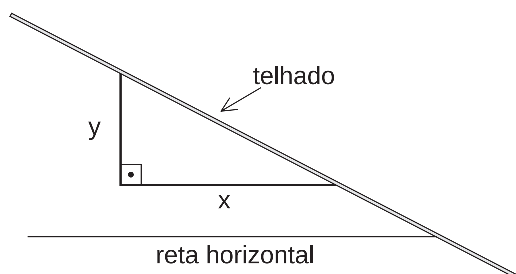
O problema do telhado

Vamos construir, para nossa casa, um telhado de "duas águas". Metade do telhado faz a água da chuva escorrer para a frente da casa e a outra metade para os fundos. A cumeeira (parte mais alta do telhado) será uma linha reta, paralela ao chão, no sentido do comprimento da casa. Observe o desenho a seguir e compare com a planta da casa.



O primeiro problema do telhado consiste em determinar a altura da cumeeira. Mas, para isso, você precisa antes aprender o que é ***inclinação*** de um telhado.

Os telhados podem ter as mais diversas inclinações. Nos países frios, os telhados precisam ser ***muito inclinados***, para que a neve não se acumule sobre eles. Aqui em nosso país, podemos fazer telhados ***pouco inclinados***. Basta ter certeza de que a água da chuva vai escoar.

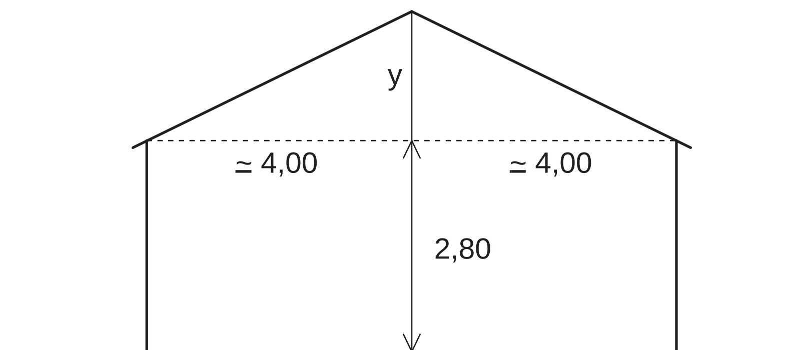


A inclinação do telhado é definida por um número obtido da seguinte forma. Construímos um triângulo retângulo qualquer, tendo um cateto horizontal (**x**) e outro vertical (**y**), e o telhado fazendo o papel da hipotenusa. A inclinação do telhado é o numero $\frac{y}{x}$. Por exemplo, se **x = 5 m** e **y = 1,6 m** , a inclinação será $\frac{1,6}{5} = 0,32$.

O número 0,32 é igual a $\frac{32}{100}$, ou seja, 32% (trinta e dois por cento). Assim, dizemos que a inclinação deste telhado é de 32%.

A inclinação ideal de cada telhado depende também da telha que se decide usar. Elas variam muito, porque existem muitos tipos. Em nossa casa, vamos usar telhas francesas, que pedem uma inclinação de cerca de 40%.

Para determinar então a altura da cumeeira da nossa casa, vamos fazer um desenho do seu lado esquerdo.



A largura da nossa casa é de 7,95 m, ou seja, 8 m aproximadamente. Podemos, então, formar triângulos retângulos com 4 m aproximadamente no cateto horizontal e com medida comum **y** no cateto vertical, como mostra o desenho. Se desejamos uma inclinação de 40%, devemos obter um resultado da divisão do cateto vertical pelo cateto horizontal igual a 0,4.

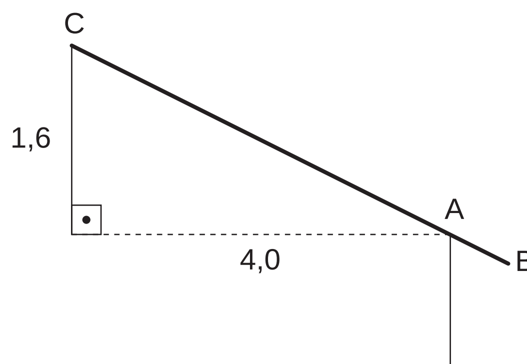
$\frac{y}{4} = 0,4$ ou

y = 4 . 04 = 1,6 m

Portanto, a cumeeira será construída a 1,6 m acima do teto da casa que está, por sua vez, a 2,80 m do chão. Logo, a altura total da casa será de 1,60 + 2,80 = 4,40 m.

Vamos agora, finalmente, calcular a área do telhado para podermos determinar a quantidade de telhas de que vamos precisar.

Nesta figura, o ponto C é a cumeeira e o ponto A é o encontro do teto com a parede, ou seja, é o ponto onde o telhado se apóia.



Podemos calcular o comprimento de CA usando o Teorema de Pitágoras:

$$CA^2 = 4,0^2 + 1,6^2$$
$$CA^2 = 16 + 2,56 = 18,56$$

$$CA = \sqrt{18,56} \cong 4,31 \text{ m}$$

O telhado deve ser prolongado cerca de 30 cm para formar um beiral que proteja as janelas da chuva. Sendo AB = 30 cm, temos o comprimento de cada face do telhado: 4,31 + 0,30 = 4,61 m, aproximadamente.

Repare que o comprimento da cumeeira é igual ao da casa, ou seja 11,15 m. Logo, a área total do telhado (as duas faces) será de:

$$2 \cdot 4{,}61 \cdot 11{,}15 = 102{,}8 \text{ m}^{22}$$

A quantidade de telhas que devemos usar depende da área do telhado e do tipo da telha. Com a telha francesa, gastamos 15 telhas em cada m² de telhado. Um primeiro cálculo indica que devemos gastar em todo o telhado, de 102,8 m², uma quantidade de telhas igual a $102{,}8 \cdot 15 = 1.542$. Entretanto, devemos evitar ao máximo cortar telhas. Devemos usá-las, sempre que possível, inteiras. Por isso, você verá no Exercício 8 que, para cobrir o telhado de nossa casa com telhas inteiras, a quantidade será um pouco maior.

Todos os exercícios se referem à casa apresentada nesta aula.

Exercícios

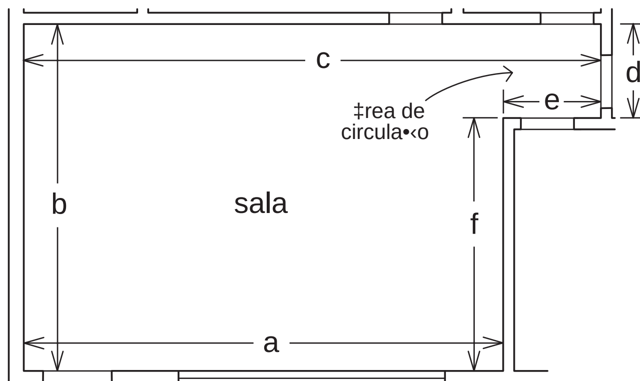
Exercício 1

Utilizando a planta da casa, complete o quadro abaixo e calcule a área dos seguintes cômodos:

CÔMODOS	DIMENSÕES (m)	ÁREAS (m²)
ÁREA DE SERVIÇO		
COZINHA		
BANHEIRO		

Exercício 2

Determine as dimensões internas da sala da nossa casa (incluindo a área de circulação) e complete o quadro abaixo:



a =

b =

c =

d =

e =

f =

Exercício 3

Calcule o comprimento do rodapé da sala (perímetro menos largura das portas) sabendo que as portas internas têm 70 cm de largura e a porta de entrada, 90 cm de largura.

Exercício 4

Calcule a área total da sala.

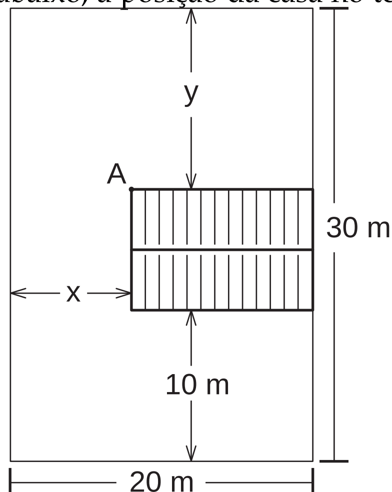
Sugestão: Use a figura do Exercício 2, dividindo a sala em dois retângulos**.**

Exercício 5

Os pisos da cozinha, banheiro e área de serviço serão feitos com lajotas de cerâmica quadradas de 20 cm de lado. Quantas lajotas serão necessárias para fazer o piso destes três cômodos?

Exercício 6

Observe, na figura abaixo, a posição da casa no terreno:



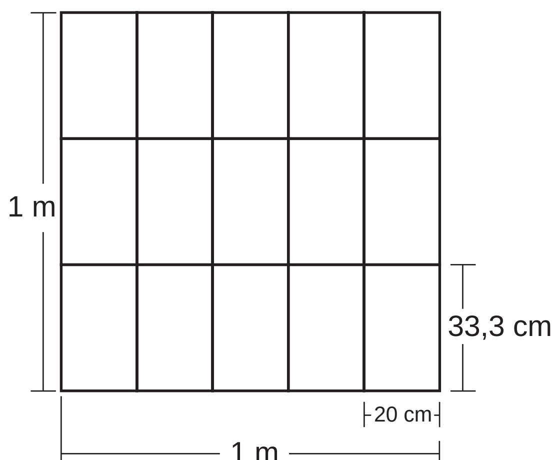
a) Calcule as distâncias **x** e **y**.

b) Existe uma torneira no ponto A. Determine o menor comprimento possível que deve ter uma mangueira para que, a partir da torneira A, consiga molhar ***todos*** os pontos do terreno.

Sugestão: Procure encontrar o ponto do terreno mais distante de A. Imagine, então, uma mangueira esticada que vá da torneira até este ponto.

Exercício 7

Cada telha francesa tem um comprimento útil de 33,3 cm e uma largura útil de 20 cm. Desta forma, cada quinze telhas cobrem 1 m², como mostra a figura a seguir:



No sentido do comprimento, cada três telhas fazem 1 m. Como o comprimento de uma das faces do nosso telhado é de 4,61 m, podemos aumentá-lo para 4,66 m para usar somente telhas inteiras. Responda:

a) Quantas telhas inteiras de 33,3 cm cabem em 4,66 m?

O comprimento da cumeeira da nossa casa é de 11,15 m .
Se aumentarmos para 11,20 m, podemos usar somente telhas inteiras. Se, no sentido da largura, cada cinco telhas fazem 1 m, responda:

b) Quantas telhas de 20 cm cabem em 11,20 m?

c) Com o telhado agora ligeiramente aumentado e usando somente telhas inteiras, quantas telhas serão necessárias?

Exercício 8

A cozinha da nossa casa tem duas janelas, cada uma com 1 m de largura por 1,20 m de altura. Tem também duas portas, cada uma com 70 cm de largura por 2 m de altura (essas medidas já incluem a moldura da porta). Sabe-se ainda que a distância do chão da cozinha ao teto é de 2,60 m. Pretendemos azulejar as quatro paredes com azulejos retangulares de 15 cm por 20 cm. Quantos azulejos serão necessários?
Sugestão: calcule as áreas das paredes e subtraia do resultado as áreas das portas e janelas.

AULA

24

A equação do 2º grau

Introdução

Freqüentemente, ao equacionarmos um problema, obtemos uma equação na qual a incógnita aparece elevada ao quadrado. Estas são as chamadas equações do 2º grau.

Veja alguns exemplos:

$$x^2 - 6 = 0$$
$$2x^2 = 10x$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Repare que em todas aparece o termo $\mathbf{x^2}$.
De forma geral, a equação do 2º grau é escrita assim:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

onde **a**, **b**, e **c** são números quaisquer. Mas, o número **a** não pode ser zero, porque, nesse caso, o termo $\mathbf{x^2}$ seria eliminado.

O número **a** é o ***coeficiente*** de x^2.

O número **b** é o ***coeficiente*** de x.

O número **c** é o ***termo independente***.

Observe os valores de **a**, **b** e **c** nos exemplos:

- Na equação $\mathbf{x^2 - 6 = 0}$ temos $\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = 0}$ e $\mathbf{c = -6}$
- A equação $\mathbf{2x^2 = 10x}$ é a mesma que $\mathbf{2x^2 - 10x = 0}$; portanto, $\mathbf{a = 2}$, $\mathbf{b = -10}$ e $\mathbf{c = 0}$.
- Na equação $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$ temos $\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = -5}$ e $\mathbf{c = 6}$.

Nesta aula, vamos aprender a resolver equações do 2º grau, ou seja, a encontrar suas ***soluções*** ou ***raízes***.

Nossa aula

Uma ***raiz*** (ou solução) de uma equação é um número que, se colocado no lugar de **x**, torna a igualdade correta.

Por exemplo, consideremos a equação

$$\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$$

O que acontece se substituirmos a letra **x** pelo número 1?

Vejamos:

$$1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$$
$$1 - 5 + 6 = 0$$
$$2 = 0 \rightarrow \textbf{errado}$$

Com essa experiência, descobrimos que x = 1 **não** é uma solução dessa equação. Veja agora o que acontece se substituirmos a letra **x** pelo número 2.

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$
$$4 - 10 + 6 = 0$$
$$0 = 0 \rightarrow \textbf{certo}$$

Sabemos agora que x = 2 **é** uma solução (ou raiz) dessa equação.

É natural que agora você tenha perguntas a fazer, tais como:

- "Será que existem outras soluções?"
- "Como encontrá-las?"

As respostas virão com o estudo desta aula. Você descobrirá que uma equação do 2º grau possui, no máximo, duas soluções, e vai também aprender a encontrá-las.

Leia com atenção os exemplos e procure fazer os exercícios propostos.

Resolvendo $ax^2 + b = 0$

EXEMPLO 1

Vamos resolver $\mathbf{x^2 - 9 = 0}$

Solução: Transpondo - 9 para o outro lado, obtemos

$x^2 = 9$

ou

$x = \pm\sqrt{9}$

ou, ainda,

$x = \pm 3$

Temos, então, que a equação $\mathbf{x^2 - 9 = 0}$ possui duas raízes: $\mathbf{x = 3}$ e $\mathbf{x = -3}$.

Nota: Nem sempre as soluções de uma equação desse tipo são números inteiros. Veja a equação

$$\mathbf{x^2 - 10 = 0}$$

Fazendo da mesma forma, temos:

$$x^2 = 10 \text{ e}$$
$$x = \pm\sqrt{10}$$

Isso significa que essa equação tem também duas soluções:

$$x = \sqrt{10} \quad \text{e} \quad x = -\sqrt{10}$$

Se você quiser saber, aproximadamente, quanto valem esses números, use sua máquina de calcular. Com aproximações até a 3ª casa decimal, as raízes da equação $x^2 - 10 = 0$ são: **$x = 3,162$** e **$x = 3,162$**.

Exercício 1

Resolva as equações:

a) $x^2 - 36 = 0$
b $x^2 - 3 = 0$
c) $2x^2 - 8 = 0$

EXEMPLO 2

Resolver a equação **$4x^2 - 3 = 0$**.
Solução: Para resolver, passamos - 3 para o outro lado e em seguida dividimos os dois lados por 4. Observe:

$$4x^2 = 3$$
$$\frac{4x^2}{4} = \frac{3}{4}$$
$$x^2 = \frac{3}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Lembre-se de que a raiz quadrada de uma fração é igual à raiz quadrada do numerador dividida pela raiz quadrada do denominador, ou seja:

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A equação tem, portanto, as soluções: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 2

Resolva as equações:

a) $3x^2 = 9$
b) $2x^2 - 10 = 0$
c) $16x^2 - 5 = 4$

EXEMPLO 3

Vamos resolver $\mathbf{(x - 3)^2 = 16}$.
Iniciamos extraindo a raiz quadrada dos dois lados:

$$x - 3 = \pm\sqrt{16} \text{ ou}$$
$$x - 3 = \pm 4$$

Passando o **- 3** para o outro lado, temos:

$$x = 4 + 3$$

ou seja, as raízes da nossa equação são

$$x = +4 + 3 = 7 \text{ e}$$
$$x = -4 + 3 = -1$$

EXEMPLO 4

Resolver a equação $\mathbf{(x - 4)^2 = 5}$.
Solução: Procedendo da mesma forma, temos:

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \text{ e}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{5}$$

ou seja, as raízes são $x = 4 + \sqrt{5}$ e $x = 4 - \sqrt{5}$

Nota: No caso que acabamos de ver, as raízes são números chamados ***irracionais***, ou seja, são números que só podem ser conhecidos por aproximações. A máquina de calcular nos mostra essas aproximações.

Para calcular $x = 4 + \sqrt{5}$, digite

[4] [+] [5] [√] [=] → [6,236]

Para calcular $x = 4 - \sqrt{5}$, digite

[4] [-] [5] [√] [=] → [1,764]

Exercício 3

Resolva as equações abaixo. Caso encontre raízes irracionais, use sua calculadora para obter aproximações até a 3ª casa decimal.

a) $(x + 1)^2 = 4$
b) $(x - 2)^2 = 15$
c) $(x + 5)^2 - 3 = 0$

Para resolver o caso geral **($x^2 + px = q$)**, devemos aprender a criar um quadrado perfeito a partir da expressão $\mathbf{x^2 + px}$. A partir de agora, devemos ter em mente as conhecidas fórmulas:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^{22}$$

EXEMPLO 5

Resolver a equação $\mathbf{x^2 + 6x = 7}$

Solução: Observe atentamente nossa solução. Vamos começar com algo que, a princípio, pode parecer misterioso.

Somamos 9 aos dois lados da equação.

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$$

Repare que, com esse artifício misterioso, o lado esquerdo é exatamente igual a $(x + 3)^2$. Confira.

Temos, então:

$$(x + 3)^2 = 16$$

E essa é uma equação que sabemos resolver.

$$x + 3 = \pm\sqrt{16}$$
$$x + 3 = 4$$
$$x + 3 = -4$$

As raízes são, portanto,

$$\mathbf{x = 4 - 3 = 1} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{x = -4 - 3 = -7}$$

Fica então a pergunta: como adivinhamos que, se somássemos 9 aos dois lados da equação, a solução apareceria? Respondemos logo.
Para obter um quadrado perfeito a partir da expressão $x^2 + px$, devemos somar a essa expressão $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

Observe que

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Portanto, se temos, por exemplo a expressão $\mathbf{x^2 + 6x}$, para obter um quadrado perfeito, devemos somar

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 \mathbf{= 3^2 = 9}$$

Pratique, no exercício, como completar quadrados.

Exercício 4

Complete as expressões abaixo:

a) $x^2 + 10x + \square = (x + \square)^{22}$

solução: $\frac{10}{2} = 5$ e $5^2 = 25$. Portanto,

$$\mathbf{x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^{22}}$$

b) $x^2 + 12x + \square = (x + \square)^{22}$
c) $x^2 - 6x + \square = (x - \square)^{22}$
d) $x^2 + 3x + \square = (x + \square)^{22}$

Estamos agora preparados para resolver o caso geral da equação do 2º grau.

EXEMPLO 6

Resolva a equação $\mathbf{x^2 - 8x + 10 = 0}$.
Solução: Observe os passos que vamos seguir; todos são conhecidos.

$$x^2 - 8x + 10 = 0$$
$$x^2 - 8x = -10$$
$$x^2 - 8x + 16 = -10 + 16$$
$$(x - 4)^2 = 6$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{6}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{6}$$

As raízes são $x = 4 + \sqrt{6}$ e $x = 4 - \sqrt{6}$

Aprendemos hoje a resolver equações do 2º grau. Na próxima aula vamos deduzir uma fórmula que resolve essas equações, e que você poderá utilizar sempre que quiser. Em seguida, apresentaremos os problemas que são resolvidos com auxílio das equações do 2º grau.

Exercícios finais

Exercício 5

Resolva as equações:
a) $(x - 2)^2 = 12$
b) $(x + 3)^2 = 25$

Exercício 6

A equação $(x - 1)^2 + 3 = 0$ não possui solução. Por quê?

Exercício 7

Resolva as equações:
a) $x^2 - 6x - 40 = 0$
b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
c) $x^2 - 4x = 0$

AULA

25

A fórmula da equação do 2º grau

Introdução

Nesta aula vamos encontrar uma fórmula para resolver a equação do 2º grau.

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (com } a \neq 0)$$

Você poderá naturalmente perguntar por que será necessária tal fórmula, já que conseguimos, na aula anterior, resolver equações sem usar fórmulas. Diremos então que a fórmula torna a resolução mais rápida e permite o uso mais eficiente da máquina de calcular para obter as raízes da equação. Ainda observando a fórmula, vamos descobrir quando uma equação do 2º grau possui soluções ou não.

Nossa aula

Inicialmente, vamos resolver uma equação do 2º grau para recordar o método que desenvolvemos na aula passada. Observe cuidadosamente todos os passos porque eles serão os mesmos que utilizaremos no caso geral.

Resolução da equação $3x^2 + 5x + 1 = 0$

EXEMPLO 1

Solução:

1º passo: Como o coeficiente de **x** é 3, dividimos todos os termos da equação por 3.

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

2º passo: Passamos o termo independente para o outro lado.

$$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$$

3º passo: Agora, vamos acrescentar aos dois lados da equação um número capaz de transformar o lado esquerdo em um quadrado perfeito. Para fazer isso, pegamos a metade do coeficiente de x:

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

e elevamos ao quadrado: $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

Temos, então, $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$

ou, ainda, $x^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$

Observe agora que o lado esquerdo é um quadrado perfeito e que podemos reunir as duas frações do lado direito igualando seus denominadores.

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{12}{36} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$$

4º passo: Extraímos a raiz quadrada dos dois lados.

$$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

5º passo: Deixamos a letra x isolada do lado esquerdo para obter as duas soluções.

$$x = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{ou}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

O caso geral: a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$

Desejamos agora que você acompanhe a dedução da fórmula, observando que os passos são exatamente os mesmos.

1º passo: Como o coeficiente de **x** é **a**, dividimos todos os termos da equação por **a**.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2º passo: Passamos o termo independente para o outro lado.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

3º passo: Para transformar o lado esquerdo em um quadrado perfeito, pegamos a metade do coeficiente de **x**:

$$\frac{1}{2} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{2a}$$

e o elevamos ao quadrado: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Depois, acrescentamos esse número aos dois lados:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Observando que o lado esquerdo é agora um quadrado perfeito e que podemos reunir as duas frações do lado direito igualando seus denominadores, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{4a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

4º passo: Extraímos a raiz quadrada dos dois lados.

$$\mathbf{x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

5º passo: Deixamos **x** isolado do lado esquerdo.

$$\mathbf{x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \text{ ou}$$

$$\boxed{\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

E aí está nossa fórmula.

Quando uma equação do 2º grau possui solução?

Na fórmula que encontramos para a solução da equação do 2º grau, vemos que, dentro da raiz quadrada, existe o número $\mathbf{b^2 - 4ac}$. Esse número é, em geral, representado pela letra grega Δ (delta) e chama-se ***discriminante***. Usando essa nova letra, temos que as raízes da equação $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ são:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad e \qquad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac}$

Veja agora que, se o número Δ for ***positivo***, encontramos duas raízes diferentes.

Se, entretanto, Δ for ***zero***, encontramos um só valor para a raiz. Se Δ for ***negativo*** a equação não terá solução.

EXEMPLO 2

Resolver a equação $\mathbf{2x^2 - 7x + 3 = 0}$

Solução: Vamos resolvê-la usando a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Na nossa equação, $\mathbf{a = 2}$, $\mathbf{b = -7}$ e $\mathbf{c = 3}$. Substituindo, temos:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

As soluções são, portanto:

$$x = \frac{7 + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x = \frac{7 - 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Veja que, nesse exemplo, o ***discriminante*** é 25, que possui raiz quadrada exata. Mas, isso nem sempre acontece. No exemplo do início desta aula, encontramos, para raízes da equação **3x + 5x + 1 = 0**, os valores:

$$\mathbf{x} = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$$

Para obter valores aproximados desses números, podemos utilizar a máquina de calcular. É o que veremos a seguir.

Usando a máquina de calcular

Consideremos, mais uma vez, a equação $3x^2 + 5x + 1 = 0$.

Vamos resolvê-la outra vez, usando agora a fórmula.

Temos **a = 3**, **b = 5** e **c = 1**. Substituindo, temos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Rapidamente encontramos as soluções. Para obter valores aproximados dessas duas raízes, começamos calculando $\sqrt{13}$ e guardando o resultado na memória.

Digitamos, então:

[1] [3] [√] [M+] → VISOR: **3,6055512**

O resultado que aparece no visor está guardado. Podemos então limpá-lo apertando a tecla [ON/C]

Para obter a 1ª solução, digitamos.

[–] [5] [+] [MR] [.] [6] [=] → VISOR: **–0,2324081**

Para obter a 2ª solução, digitamos:

[-] [5] [-] [MR] [.] [6] [=] → VISOR: **–1,4342585**

Concluímos então que, com duas casas decimais, as raízes da equação **3x + 5x + 1 = 0** são, aproximadamente, **– 0,23** e **– 1,43**.

Casos particulares

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, quando encontramos **b = 0** ou **c = 0,** não há vantagem em utilizar a fórmula. Observe os exemplos seguintes.

EXEMPLO 3

Resolva a equação $2x^2 - 32 = 0$.
Solução: Para resolver essa equação, passamos o termo independente para o outro lado e, em seguida, dividimos os dois lados por 2 (o coeficiente de **x**).

$$2x^2 = 32$$

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{32}{2}$$

$$x^2 = 16$$

Extraindo a raiz quadrada, temos $x = \pm 4$.

EXEMPLO 4

Resolva a equação **2x – 5x = 0**.
Solução: Para resolver essa equação (que possui **c = 0**), o procedimento é diferente. Inicialmente colocamos a letra **x** em evidência:

$$x \, . \, (2x - 5) = 0$$

Temos então um produto de dois números que dá zero. Isto só é possível se um desses números for zero. Como primeiro caso, podemos ter **x = 0**. Como segundo caso, podemos ter:

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Assim, as duas raízes de $2x^2 - 5x = 0$ são $x = 0$ e $x = \frac{5}{2}$.

Exercícios

Exercício 1

Resolva as equações:

a) $x^2 - 9 = 0$
b) $x^2 + 5 = 0$
c) $x^2 - 3 = 0$

Exercício 2

Resolva as equações:

a) $x^2 - 3x = 0$
b) $3x^2 + 12x = 0$

Exercício 3

Resolva as equações:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 - 3x - 10 = 0$
c) $x^2 - 3x + 1 = 0$
d) $x^2 - 6x + 9 = 0$
e) $x^2 + 2x + 3 = 0$

Exercício 4

Resolva as equações seguintes e use a máquina de calcular para obter valores aproximados das raízes (duas casas decimais são suficientes).

a) $2x^2 + 3x - 4 = 0$
b) $3x^2 - 10x + 6 = 0$

Problemas do 2º grau

Introdução

Nas Aulas 24 e 25, tratamos de resoluções de equações do 2º grau. Nesta aula, vamos resolver problemas que dependem dessas equações.

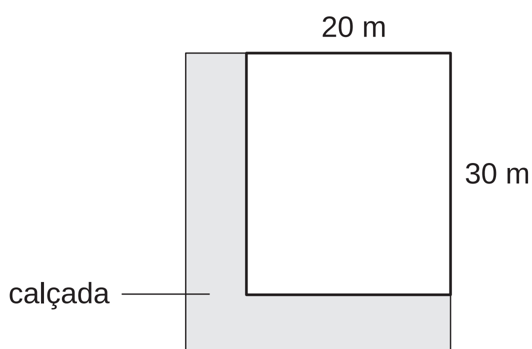
Observe que o significado das incógnitas deve ficar bem claro para que o equacionamento do problema possa ser feito sem dificuldade. Após a resolução da equação, devemos verificar se as duas raízes servem como resposta para o problema em questão. Freqüentemente, como você irá perceber, uma delas não faz sentido.

Nossa aula

Como esta é uma aula de resolução de problemas, é interessante que você leia atentamente cada enunciado e pense um pouco antes de ver a solução.

PROBLEMA 1

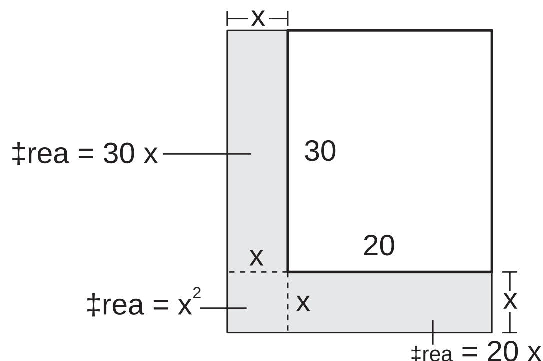
Um operário foi contratado para construir uma calçada em volta de dois lados de um terreno retangular, como mostra a figura abaixo.



O terreno mede 20 m por 30 m e a calçada deve ter sempre a mesma largura. Sabendo que o operário dispõe de 72 m² de lajotas para fazer a obra, qual

deve ser a largura da calçada?

Solução: É claro que a largura da calçada é nossa incógnita. Vamos então chamar de **x** a medida que desejamos calcular. Podemos calcular de várias formas a área da calçada, que é igual a 72 m². Uma delas é a que mostramos na figura abaixo:



Somando as áreas das três partes em que a calçada foi dividida, temos:

$$x^2 + 30x + 20x = 72 \quad \text{ou}$$

$$x^2 + 50x - 72 = 0$$

Essa é uma equação do 2º grau e nossa incógnita **x**, a largura da calçada, é uma de suas raízes. Vamos então resolver a equação:

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \times 1 \cdot (-72)}}{2}$$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{2.500 + 288}}{2}$$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{2.788}}{2}$$

Utilizando uma calculadora para obter valores aproximados das raízes, temos:

$$x = \frac{-50 \pm 52,8}{2} \quad \begin{cases} \nearrow \dfrac{-50 - 52,8}{2} = -\dfrac{102,8}{2} = -\ 51,4 \\[2ex] \searrow \dfrac{-50 + 52,8}{2} = \dfrac{2,8}{2} = 1,4 \end{cases}$$

Observe que a raiz **x = - 51,4** não faz sentido no nosso problema. A medida do comprimento é sempre um número ***positivo***. Portanto, a largura da calçada é de 1,4 m, ou seja, 1 metro e 40 centímetros.

PROBLEMA 2

João comprou um certo número de camisetas (todas iguais) para dar a seus empregados e gastou R$ 96,00. Dias depois, passando em outra loja, viu a mesma camiseta em promoção, R$ 2,00 mais barata. Desta vez, comprou uma camiseta a mais que na compra anterior e gastou R$ 90,00. Quantas camisetas João comprou ao todo?

Solução: precisamos dar nome às nossas incógnitas, isto é, àquilo que não conhecemos no problema. Nós não sabemos quantas camisetas João comprou da primeira vez. Vamos então chamar essa quantidade de **x**. Também não sabemos o preço da camiseta na primeira compra. Vamos chamar esse preço de **y**. Desta forma, na segunda compra, João comprou **x + 1** camisetas e o preço de cada uma é **y - 2**, ou seja, R$ 2,00 a menos. Podemos então resumir o que conhecemos no quadro abaixo:

COMPRA	Nº DE CAMISETAS	PREÇO	TOTAL GASTO
1ª COMPRA	x	y	96
2ª COMPRA	x + 1	y - 2	90

Multiplicando o número de camisetas pelo preço de uma delas, teremos o total gasto em cada compra. Logo, as equações são as seguintes:

$$\begin{cases} xy = 96 \\ (x+1)(y-2) = 90 \end{cases}$$

Temos aqui um sistema de duas equações com duas incógnitas. Vamos inicialmente desenvolver a 2ª equação:

$$(x + 1)(y - 2) = 90$$

$$xy - 2x + y - 2 = 90$$

Como a 1ª equação nos informa que xy = 96, ficamos com:

$$96 - 2x + y - 2 = 90$$

$$- 2x + y = - 4$$

$$y = 2x - 4$$

Agora, vamos substituir esse valor de y na 1ª equação:

$$xy = 96$$

$$x(2x - 4) = 96$$

$$2x^2 - 4x - 96 = 0$$

Aí está a equação do 2º grau fornecida pelo problema. Vamos simplificar todos os termos por 2 e resolvê-la.

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 . 1 . (-48)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2}$$

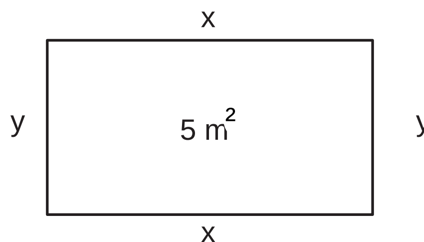
$$x = \frac{2 \pm 14}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow & x = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ \searrow & x = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \end{matrix}$$

Lembre-se de que **x** é o ***número*** de camisetas que João adquiriu na primeira compra. Logo, esse número não pode ser - 6. Concluímos que x = 8, ou seja, João comprou 8 camisetas. Como na segunda compra ele adquiriu uma camiseta a mais, o número total de camisetas compradas é **8 + 9 = 17**.

PROBLEMA 3

Com uma corda de 10 m de comprimento, Pedro deseja cercar uma área retangular de 5 m². Quais as medidas dos lados desse retângulo?

Solução: Vamos chamar de **x** e **y** o comprimento e a largura do retângulo, respectivamente, como mostra a figura:



Já que o perímetro do retângulo é 10 m, temos, como 1ª equação:

x + y + x + y = 10 ou

2x + 2y = 10 ou ainda

x + y = 5

Como a área do retângulo deve ser 10 m², temos, como 2ª equação:

xy = 5

As duas equações formam o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases}$$

que é resolvido facilmente. Da 1ª equação temos **y = 5 - x**; substituindo na 2ª equação, encontramos:

$$x\,(5 - x) = 5$$

Vamos então desenvolver, arrumar e resolver essa equação:

$$5x - x^2 = 5$$

$$-x^2 + 5x - 5 = 0$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Usando a máquina de calcular para obter valores aproximados das raízes, encontramos:

$$x = \frac{5 \pm 2,24}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow & \dfrac{5 + 2,24}{2} = \dfrac{7,24}{2} = 3,62 \\ \searrow & \dfrac{5 - 2,24}{2} = \dfrac{2,76}{2} = 1,38 \end{matrix}$$

Chegamos a dois valores diferentes para **x** e, aparentemente, ambos servem ao nosso problema. No entanto, **x** é o comprimento do retângulo e precisamos ainda calcular a largura **y**. Observando novamente o desenvolvimento, vemos que **x + y = 5**, ou seja, **y = 5 - x**. Então:

a) se **x** = 3,62 então **y** = 5 - 3,62 = 1,38

b) se **x** = 1,38 então **y** = 5 - 1,38 = 3,62

Não encontramos, portanto, dois retângulos diferentes. As duas raízes da equação fornecem como resposta o ***mesmo*** retângulo. Suas medidas aproximadas são **3,62** m e **1,38** m, não importando qual delas é o comprimento ou a largura.

AULA

26

Conferindo resultados

Depois de resolver um problema, é aconselhável conferir o resultado encontrado para verificar se ele está mesmo correto. Afinal, é sempre possível ocorrer algum engano. Vamos então conferir os resultados dos três problemas que resolvemos nesta aula.

Conferindo o problema 1

Nesse problema, encontramos para a largura da calçada x = 1,4 m, aproximadamente. Vamos então calcular a área da calçada usando esse valor:

$$\begin{aligned} \text{Área da calçada} &= 1{,}4^2 + 30 \,.\, 1{,}4 + 20 \,.\, 1{,}4 \\ &= 1{,}96 + 42 + 2{,}8 \\ &= 71{,}96 \end{aligned}$$

que é aproximadamente 72. Se o operário tem 72 m² de lajotas para fazer a calçada, então a largura de 1,4 m está certa.

Conferindo o problema 2

Concluímos nesse problema que João adquiriu 8 camisetas na primeira compra e 9 na segunda. Vamos então calcular o valor de **y**, que é o preço de cada camiseta na primeira compra.
Temos **x = 8** e a equação **xy = 96**. Logo,

$$8y = 96$$

$$y = \frac{96}{8} = 12$$

Então, cada camiseta custou R$ 12,00.
Vamos agora conferir a segunda compra. Sabemos que ele comprou 9 camisetas e cada uma custou R$ 10,00, ou seja, R$ 2,00 a menos. Então, ele gastou $9 \cdot 10 = 90$ reais, o que confere com o enunciado.

Conferindo o problema 3

Nesse problema, concluímos que as medidas do retângulo devem ser 3,62 m e 1,38 m. Vamos então conferir sua área.
Área do retângulo = 3,62 **.** 1,38 = 4,9956 m², que é aproximadamente 5 m², como pede o enunciado. Nossa resposta, portanto, está certa.

Exercícios

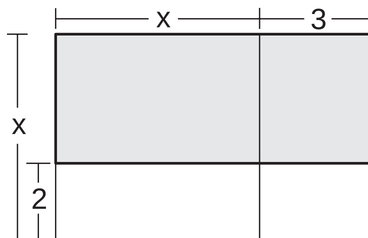
Exercício 1
Os números 1, 2, 3, 4 ... são chamados de ***números naturais***. Cada número natural possui um ***consecutivo***, que é o número que vem depois dele. Por exemplo, o consecutivo de 1 é 2. O consecutivo de 8 é 9 etc. Multiplicando-se um número natural por seu consecutivo, encontramos 132. Que número é esse?

Exercício 2
Um triângulo retângulo tem hipotenusa 15. Um dos catetos tem 3 unidades a mais que o outro. Qual é o perímetro desse triângulo?
Sugestão: Chame o menor cateto de **x** e recorra ao Teorema de Pitágoras.

Exercício 3

Um terreno retangular tem 50 m² de área. Diminuindo seu comprimento em 3 m e aumentando sua largura em 2 m, o terreno transforma-se em um quadrado. Qual é a área desse quadrado?

Sugestão: Observe a figura abaixo:



Exercício 4

Um grupo de pessoas saiu para almoçar em um restaurante, sendo que três delas são mulheres. A conta, de R$ 72,00, foi inicialmente dividida entre todos, mas depois os homens resolveram que, por gentileza, as mulheres não deveriam pagar. Então, cada homem contribuiu com mais R$ 4,00 e a conta foi paga. Quantas pessoas havia no grupo?

Sugestão: Escolha as seguintes incógnitas:

x = número de pessoas do grupo
y = valor que cada um deveria pagar

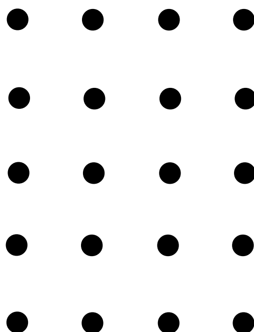
a) Se a conta foi de R$ 72,00, qual é a primeira equação?

b) Se existem 3 mulheres no grupo, quantos são os homens?

c) Se, no pagamento, cada homem contribuiu com mais R$ 4,00, qual é a segunda equação?

Exercício 5

Na figura abaixo existem 20 pontos arrumados em 5 ***linhas*** e 4 ***colunas***:



Imagine que 480 soldados estão formados, arrumados em linhas e colunas. O número de linhas é 4 unidades maior que o número de colunas. Quantas são as linhas e as colunas dessa formação?

AULA

27

A noção de função

Introdução

Um dos conceitos mais utilizados em Matemática é o de ***função***. Ele se aplica não somente a esta área, mas também à Física, à Química e à Biologia, entre outras. Além disso, está muito presente em nosso dia-a-dia, ajudando a melhor compreender o mundo que nos cerca.

Esta aula introduz o conceito de função, que o qual trabalharemos até a Aula 32. Veja alguns exemplos da aplicação desse conceito:

- o preço de um armário é função da área que ele cobre;
- a dose de um remédio é função do peso da criança que é medicada;
- a altura de uma criança é função de sua idade;
- o desconto do Imposto de Renda é função da faixa salarial;
- o salário de um vendedor é função do volume de vendas;
- a área de um quadrado é função da medida de seus lados;
- o buraco na camada de ozônio é função do nível de poluição etc.

Nossa aula

Esses são apenas alguns exemplos. O que você precisa para entender o conceito de ***função*** é pensar em duas grandezas que variam, sendo que a variação de uma depende da variação da outra.

A construção de uma tabela

Para representar duas grandezas que dependem uma da outra, utilizamos uma tabela. A que segue mostra a variação do preço do armário embutido por metro quadrado.

ÁREA (m^2)	1	2	3	4	5
PREÇO (R$)	120,00	240,00	360,00	480,00	600,00

Vemos que a área do armário é uma grandeza variável; o preço é uma grandeza variável; e a variação do preço depende da variação da área. Dizemos então que ***o preço é função da área***. Para cada um dos outros exemplos, podemos construir uma tabela como a que acabamos de ver.

Vamos imaginar a bula de um remédio pediátrico que diz:

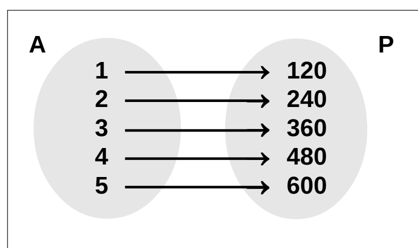
MODO DE USAR OU POSOLOGIA: **2 gotas a cada kg de peso**

Pela tabela abaixo, podemos ver a variação dessa função:

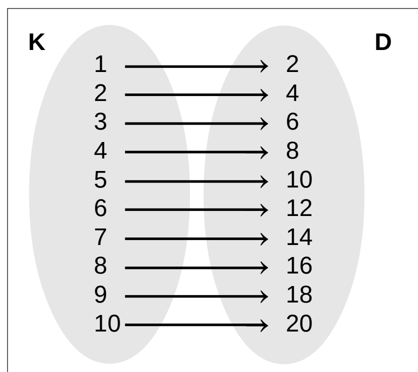
PESO (kg)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DOSE (nº de gotas)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Representação por diagrama

É também muito comum representarmos a dependência entre duas grandezas que variam (variáveis) utilizando conjuntos e flechas. Observe como ficariam representadas as funções apresentadas nas duas tabelas:



O conjunto **A** é o conjunto dos números que expressam a medida da área, e o conjunto **P** é o conjunto dos preços do armário para cada área.
A cada elemento de **A,** corresponde um único elemento de **P**, ou seja, para cada área, temos um único preço.



No caso do remédio, chamaremos **K** o conjunto dos valores que expressam os pesos e **D** o conjunto do número de gotas.
Observe que, para cada peso, corresponde uma única dose do remédio. Caso contrário, continuaríamos sem saber que dose administrar e não teríamos uma função.

A leitura de uma tabela

Observe o exemplo do cálculo do Imposto de Renda deduzido na fonte (Receita Federal - 1995).

VENCIMENTOS	%
até R$ 676,70	0%
de R$ 676,71 a R$ 1.319,57	15%
de R$ 1.319,58 a R$ 12.180,60	26,6%
acima de R$ 12.180,60	35%

Note que o percentual de desconto depende da faixa salarial do trabalhador. Uma pessoa que ganhe até R$ 676,70 está isenta do Imposto de Renda deduzido na fonte. Outra pessoa que ganhe R$ 700,00 por exemplo, cai na faixa de 15% de desconto. O desconto é função da faixa salarial. Os conjuntos numéricos que se relacionam nesse exemplo são: de um lado, os valores dos salários (S), e do outro, dependendo do primeiro, o percentual de desconto (D).

Notação de uma função

Utilizamos a letra **f** para representar uma função. Nos exemplos que acabamos de estudar, representamos:

f: A → P PREÇO = f (área)	Função de A em P; preço é função da área.	Função que relaciona área ao preço do armário.
f: K → D DOSE = f (peso)	Função de K em D; dose é função do peso.	Função que relaciona o peso à dose de remédio.
f: S → D DESCONTO = f (salário)	Função de S em D; desconto é função do salário.	Função que relaciona o salário ao desconto do IR.

Em Matemática, como você já sabe, utilizamos letras para representar grandezas variáveis. Numa função, temos sempre duas variáveis: chamamos **x** a variável do primeiro conjunto e **y** a variável que depende do valor da primeira. Assim:

y = f(x) significa que y é função de x

Vejamos um outro exemplo. A área do quadrado é função da medida de seu lado. Você sabe que a expressão para o cálculo da área de um quadrado é:

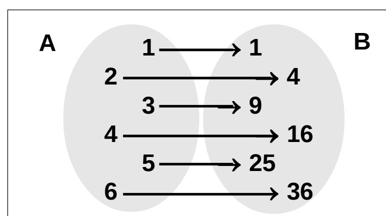
$$A = \ell^2$$

Utilizando os conceitos já estudados, temos:

- A tabela

LADO (cm)	1	2	3	4	5	6
ÁREA (cm²)	1	4	9	16	25	36

- O diagrama



- A notação

f : A → B
y = f(x) onde

A é o conjunto das medidas do lado
B é o conjunto das medidas das áreas
y é a área
x é a medida do lado

A fórmula matemática que associa **y** e **x** é:

$$y = x^2$$

Domínio e imagem

No exemplo anterior, o conjunto A dos números que expressam a medida do lado é chamado ***domínio*** e o conjunto B dos números que expressam a área do quadrado é chamado ***imagem***.

Vamos pensar nas seguintes questões:

- Nos outros exemplos que vimos, quais eram o ***domínio*** e a ***imagem***?
- Qual é a lei que associa as variáveis daquelas funções?
- É possível representar essas leis matematicamente?

Veja como podemos responder a todas essas questões:

$f : A \rightarrow P$ Domínio = A Imagem = P
$y = f(x) = x \,.\, 120{,}00$

$f : K \rightarrow D$ Domínio = K Imagem = D
$y = f(x) = 2x$

$f : S \rightarrow D$ Domínio = S Imagem = D

$$y = f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad x \leq 676{,}70 \\ 15\%\ x, & \text{se} \quad 676{,}71 \leq x \leq 1.319{,}57 \\ 26{,}6\%\ x, & \text{se} \quad 1.319{,}58 \leq x \leq 12.180{,}60 \\ 35\%\ x, & \text{se} \quad x \geq 12.180{,}61 \end{cases}$$

Mais um exemplo

Mário é um vendedor que recebe mensalmente seu salário em duas partes: uma é fixa, no valor de R$ 150,00, e a outra é variável, sendo igual a 1% do total que ele vende no mês. Vamos chamar de **x** o total de vendas no mês e de **y** o salário de Mário. Como você já deve ter notado **y = f(x)**, ou seja, o salário do vendedor é função do total de suas vendas no mês.

Podemos, agora, calcular os valores de **y** (o salário) atribuindo valores para **x** (o total de vendas) e construir uma tabela para essa função:

TOTAL DE VENDAS x	1% DE x	SALÁRIO y
3.000,00	30,00	150,00 + 30,00 = 180,00
5.000,00	50,00	150,00 + 50,00 = 200,00
10.000,00	100,00	150,00 + 100,00 = 250,00
50.000,00	500,00	150,00 + 500,00 = 650,00
80.000,00	800,00	150,00 + 800,00 = 950,00

Sabendo que o menor valor do total de vendas de um funcionário é de R$ 3.000,00 e o maior valor já conseguido é R$ 80.000,00, o ***domínio*** dessa função é o conjunto de valores de R$ 3.000,00 a R$ 80.000,00.

DOMÍNIO: R$ 3.000,00 $\leq x \leq$ R$80.000,00

Nesse exemplo, como podemos observar na tabela anterior os valores de **y** variam de R$ 180,00 a R$ 950,00:

IMAGEM: R$ 180,00 $\leq$ y $\leq$ R$ 950,00

A lei matemática que associa **y** e **x** pode ser escrita assim:

$$y = 150,00 + 1\%\ x \quad \text{ou}$$
$$y = 150,00 + 0,01\ x$$

Observe que, utilizando essa lei, podemos calcular **y** para qualquer valor de **x** que esteja no domínio:

$$f(3.000,00) = 150,00 + 30,00 = 180,00$$
$$f(3.550,00) = 150,00 + 35,50 = 185,50$$
$$f(4.000,00) = 190,00$$
$$f(4.200,00) = 192,00 \text{ e assim por diante.}$$

Exercícios

Exercício 1

Responda:

a) Se o lado de um quadrado mede 10 cm, qual é sua área?
b Se o lado do quadrado mede 7 cm, qual a sua área?
c) A área do quadrado é função da medida do lado?
d) Calcule o perímetro dos quadrados de 10 cm e 7 cm.
e) O perímetro do quadrado é função da medida do lado? Por quê?
f) Escreva a lei que associa a medida do lado **x** ao perímetro do quadrado **y**.

Exercício 2

Um automóvel consome 1 litro de combustível a cada 8 km.

a) Complete a tabela abaixo:

D: DISTÂNCIA (km)	8	16				
C: CONSUMO (ℓ)	1	2				

b) O consumo é função da distância percorrida?
c) Escreva uma lei que associe a distância **x** ao consumo de combustível **y**.
d) Represente esta função usando conjuntos e flechas.

Exercício 3

Uma função tem domínio D = {4, 7, 9} e associa a cada elemento do domínio o dobro do valor dele. Qual é a imagem dessa função?

Exercício 4

A tabela abaixo representa as distâncias percorridas por um ciclista numa velocidade de 20 km/h:

A: TEMPO	30 min	1 h	1 h 30 min	2 h
B: DISTÂNCIA	10 km	20 km	30 km	40 km

a) Qual o domínio? **b)** Qual a imagem?

Exercício 5

Considere o conjunto A = {-1, 0, 1, 2, 3} e uma função f:A $\rightarrow$ B definida por y = x + 1. Determine:

a) O domínio de f.
b) A representação de f por diagrama.
c) f(-1) = f(0) = f(1) =
f(2) = f(3) =
d) A imagem de f.

AULA

28

O gráfico de uma função

Introdução

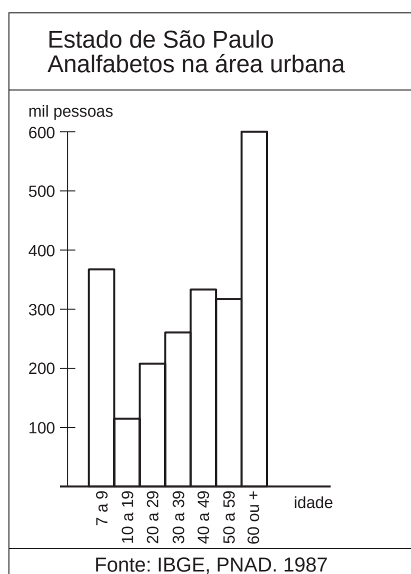
Freqüentemente você se depara com tabelas e gráficos, em jornais, revistas e empresas que tentam transmitir de forma simples fatos do dia-a-dia. Fala-se em elevação e queda da Bolsa de Valores, de lucros de empresas, de inflação, e apresenta-se um gráfico. Fala-se também em máximos e mínimos, variação lenta, variação rápida. Tudo isso, a partir da leitura de gráficos. Quem não estiver familiarizado com essas interpretações perde muitas das informações fornecidas.

Nas Aulas 8, 9 e 12 já falamos sobre alguns desses tópicos. Portanto, é interessante que você leia novamente essas aulas, que podem ajudá-lo a compreender melhor o conteúdo desta aula. Vamos retomar o estudo de gráficos, mas agora ligado às funções, que você acabou de estudar na aula anterior. Acompanhe os exemplos a seguir.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Observe o gráfico ao lado, que foi montado a partir de dados levantados pelo IBGE. Para cada faixa etária (de 7 a 9 anos, de 10 a 19 anos, de 20 a 29 anos etc), temos uma coluna que representa o número de analfabetos naquela faixa, na região urbana de São Paulo. Assim, por exemplo, entre 10 e 19 anos, o número de analfabetos é um pouco superior a 100 mil pessoas. Temos uma função que associa a cada faixa etária o número correspondente de analfabetos.



As ***variáveis*** da nossa função são: **x** = faixa etária e **y** = nº de analfabetos. Note que **y = f(x)**, ou seja, **y** é função de **x** (o nº de analfabetos depende da faixa etária).

O ***domínio*** dessa função são as faixas etárias: 7 a 9, 10 a 19, 20 a 29, 30 a 39, 40 a 49, 50 a 59 e 60 anos ou mais. Esse conjunto (domínio) possui, então, 7 elementos.

A ***imagem*** da nossa função é fomada pelas quantidades de analfabetos encontrados em cada faixa.

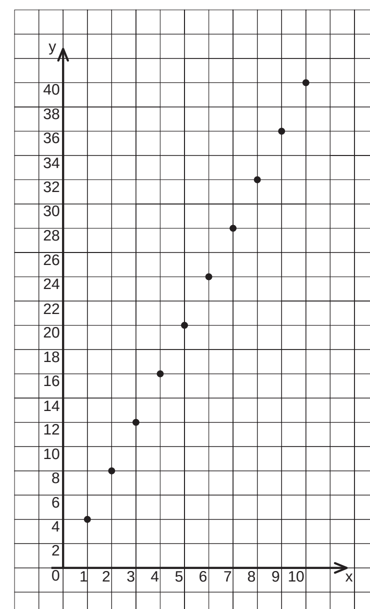
EXEMPLO 2

Num exercício da aula anterior, você viu que o perímetro de um quadrado é função da medida do lado do quadrado. A equação que associa o perímetro **y** à medida do lado **x** é:

$$\mathbf{y = 4x}$$

Vamos considerar quadrados com lados medindo números inteiros variando de 1 cm a 10 cm e construir uma tabela e o gráfico desta função. Para isso, vamos usar um papel quadriculado para representar o plano cartesiano (ver Aula 8). No eixo horizontal, também conhecido como eixo **x** ou ***eixo das abscissas***, vamos marcar os valores de **x** (medida do lado) que constam na tabela. No eixo vertical, também conhecido como eixo **y** ou ***eixo das ordenadas***, vamos marcar os valores de **y** (valor do perímetro) para cada valor de **x**.

x	**y = 4x**
1	**4**
2	**8**
3	**12**
4	**16**
5	**20**
6	**24**



Este é o gráfico da função **f de A em B** definida pela equação **y = 4x**. Neste caso, estamos considerando:

Domínio = A { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

e, assim a imagem é:

Imagem = B { 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40}

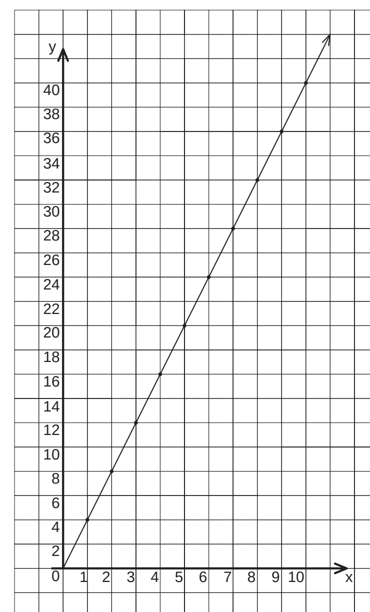
Isso significa que calculamos apenas o perímetro dos quadrados cuja medida do lado é um número natural entre 1 e 10.
No entanto, você sabe que podemos construir quadrados com outras medidas, como por exemplo: 0,5 cm; 7,8 cm; $\sqrt{2}$; etc.
A única restrição é para quadrados com lado menor ou igual a zero. Dessa forma, ampliamos o domínio da nossa função para:

D = conjunto dos números reais positivos.

E, nesse caso, é fácil concluir que a imagem dessa função é também o conjunto dos números reais positivos.

I = conjunto dos números reais positivos.

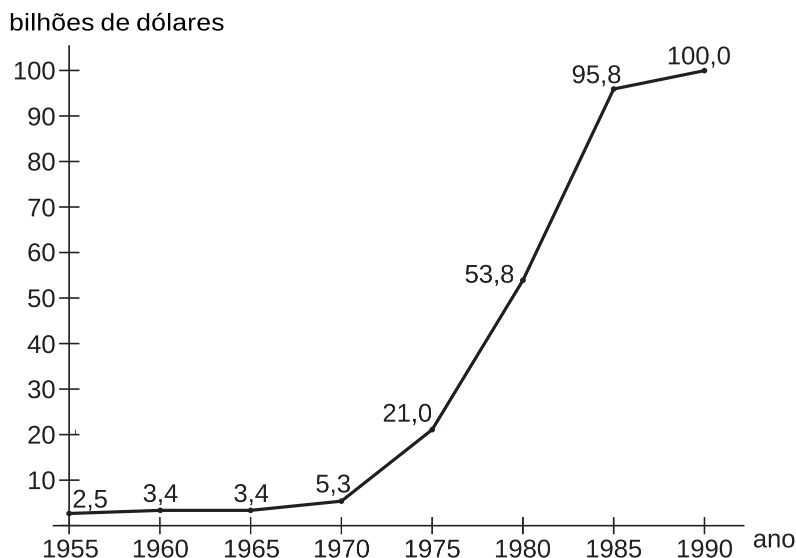
O gráfico fica como a figura ao lado: em vez de pontos isolados, temos uma semi-reta.



EXEMPLO 3

Observe agora o gráfico da dívida externa brasileira. Esta função relaciona a dívida com os anos.

Assinalamos no gráfico as informações que temos a cada cinco anos.



Os pontos foram ligados por segmentos de reta que representam a continuidade da função a cada cinco anos.

Não temos dados para saber se a evolução se deu desse modo, mas o fato de unirmos pontos isolados de um gráfico auxilia a visualização e a análise da função.

Observando atentamente esse gráfico, podemos concluir que:

- A dívida externa cresceu menos entre 1955 e 1960 e manteve-se constante no qüinqüênio seguinte.
- A dívida cresceu mais na década de 1970 e nos cinco anos seguintes, sendo a maior taxa verificada entre 1980 e 1985.

Mas o que é ***taxa de crescimento***?

Em Matemática, ***taxa*** é a medida de uma variação. Numa função, você já sabe, temos duas variáveis. Para calcular a taxa de variação, verificamos como **y** varia em função de **x**.

No nosso exemplo, para um mesmo período de tempo, a maior taxa de crescimento ocorre onde o **y** cresce mais rapidamente.

Veja, na próxima página, o cálculo da taxa de crescimento entre dois pontos de um gráfico. Isso é feito dividindo-se a diferença dos valores de **y** pela diferença dos valores de **x**.

de 1955 a 1960 : $\frac{3,4-2,5}{1960-1955}=\frac{0,9}{5}=0,18$

de 1960 a 1965 : $\frac{3,4-3,4}{1965-1960}=\frac{0}{5}=0$

de 1965 a 1970 : $\frac{5,3-3,4}{1970-1965}=\frac{1,9}{5}=0,38$

de 1970 a 1975 : $\frac{21,0-5,3}{1975-1970}=\frac{15,7}{5}=3,14$

de 1975 a 1980 : $\frac{53,8-21}{1980-1975}=\frac{32,8}{5}=6,56$

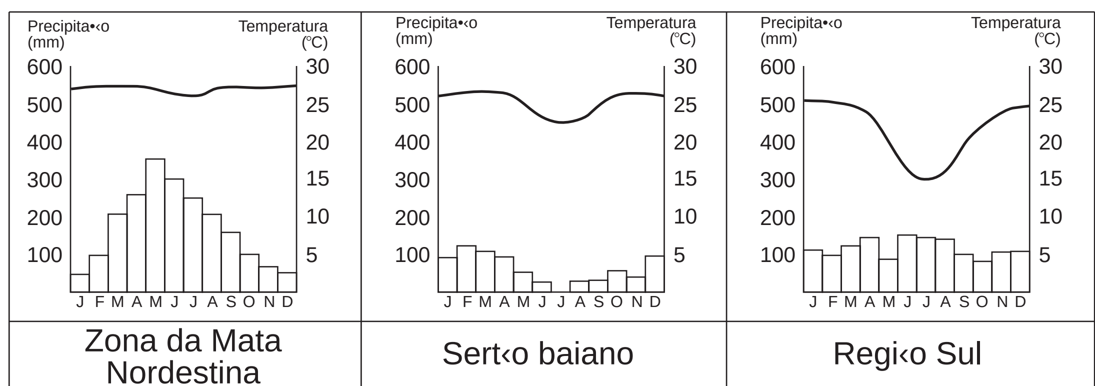
de 1980 a 1985 : $\frac{95,8-53,8}{1985-1980}=\frac{42,0}{5}=8,4$

de 1985 a 1990 : $\frac{100-95,8}{1990-1985}=\frac{4,2}{5}=0,84$

Assim, podemos comparar os crescimentos em períodos diferentes. Concluímos, até mesmo, que o crescimento ***mais rápido*** da dívida externa brasileira se deu entre 1980 e 1985. Nesse período, o crescimento foi, em média, de 8,4 bilhões de dólares por ano.

No gráfico, com o auxílio de uma régua, você pode observar que o segmento que está mais inclinado, ou seja, o que faz um ângulo maior em relação ao eixo horizontal é o que tem maior taxa de crescimento.

EXEMPLO 4



Observe os três gráficos acima. Eles mostram duas funções no mesmo plano cartesiano: a precipitação de chuvas no primeiro eixo vertical e a temperatura no segundo eixo vertical, ambas durante todos os meses do ano. O gráfico das chuvas está representado por barras e o da temperatura, por uma linha contínua.

Você deve estar se perguntando por que foram utilizadas formas diferentes de representação. A resposta está na própria maneira das variáveis dessas duas funções se relacionarem. A quantidade de chuva é medida durante certo período de tempo e a temperatura pode ser medida a cada instante. Assim, para cada mês (**x**) temos ***um*** índice pluviométrico (**y**).
Esses gráficos (***climogramas***) são muito utilizados para explicar o clima de uma região e seu potencial agrícola, por exemplo. É fácil observar que, dessas três regiões, a que possui maior variação de temperatura é a região Sul e a que possui maior variação de precipitação é a Zona da Mata nordestina.

Podemos também falar das noções de máximo e mínimo de uma função. Nas representações gráficas da precipitação, vemos que o máximo, ou seja, o maior índice pluviométrico, ocorre em meses diferentes para cada região:

REGIÃO	PRECIPITAÇÃO MÁXIMA
ZONA DA MATA	MAIO
SERTÃO BAIANO	FEVEREIRO
REGIÃO SUL	JUNHO

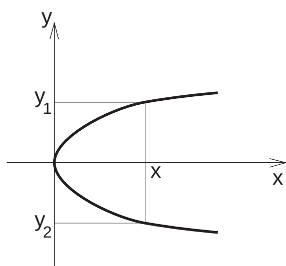
Vamos exemplificar agora os pontos mínimos através do gráfico da temperatura:

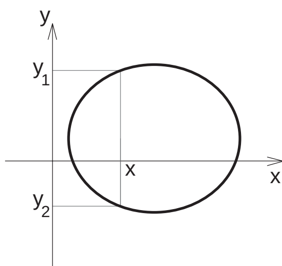
REGIÃO	TEMPERATURA MÍNIMA
ZONA DA MATA	JUNHO
SERTÃO BAIANO	JULHO
REGIÃO SUL	JUNHO

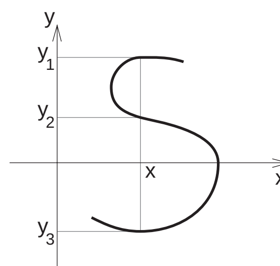
Com esses exemplos, você já deve estar bem mais seguro para ler e interpretar gráficos. Assim, pode compreender melhor as funções que aparecem no nosso dia-a-dia.

Para você saber mais

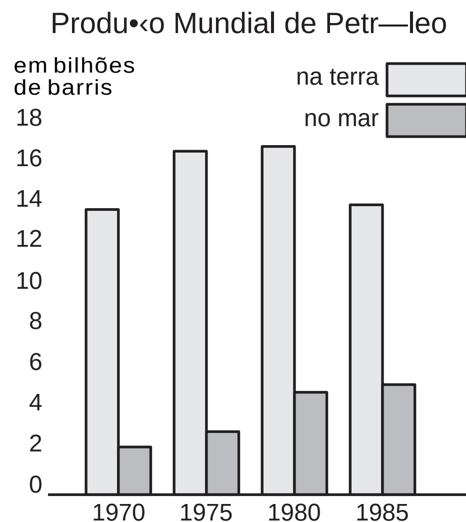
Na Aula 27 você aprendeu que, para qualquer função, é necessário que a cada valor **x** do ***domínio*** corresponda ***apenas um*** valor de **y**, que fará parte do conjunto ***imagem***. Observe os gráficos abaixo. Eles não são gráficos de funções, pois, para um mesmo valor de **x**, encontramos mais de um valor para **y**.







Exercícios



Exercício 1

O gráfico de barras ao lado mostra a produção mundial de petróleo extraído na terra e no mar. Observando este gráfico, responda:

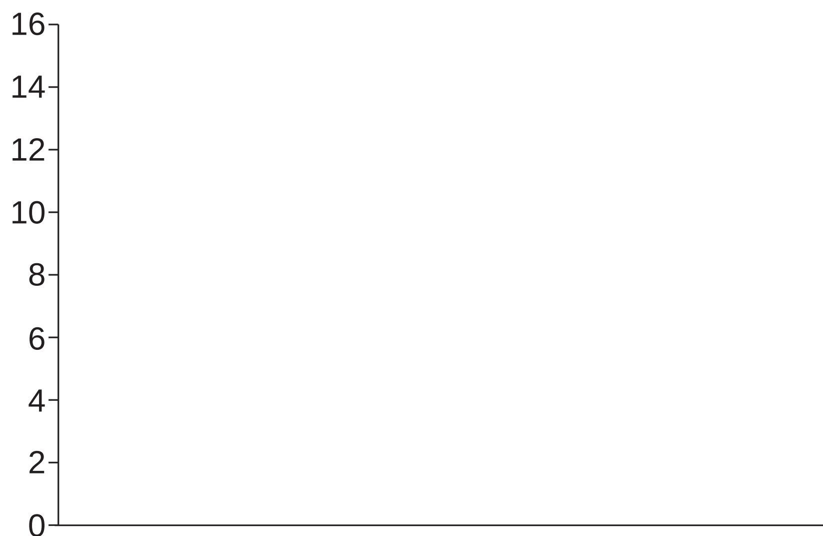
a) A produção é maior na terra ou no mar?
b) Qual delas tem crescido mais?
c) Qual é o domínio da função?
d) Qual o valor máximo da produção na terra, aproximadamente?
e) Em que ano a produção no mar foi maior?

Exercício 2

Elabore um gráfico de barras, utilizando os dados da tabela abaixo.

ÁREAS METROPOLITANAS

REGIÃO METROPOLITANA	POPULAÇÃO
GRANDE BELÉM	1.334.460
GRANDE FORTALEZA	2.294.524
GRANDE RECIFE	2.859.469
GRANDE SALVADOR	2.472.131
GRANDE BELO HORIZONTE	3.461.905
GRANDE RIO DE JANEIRO	9.600.528
GRANDE SÃO PAULO	15.199.423
GRANDE CURITIBA	1.975.624
GRANDE PORTO ALEGRE	3.015.960



Exercício 3

a) Elabore um gráfico que represente a balança comercial brasileira, utilizando os dados fornecidos pela tabela a seguir.

BALANÇA COMERCIAL BRASILEIRA		
ANO	IMPORTAÇÕES (BILHÕES DE DÓLARES)	EXPORTAÇÕES (BILHÕES DE DÓLARES)
1978	15	12,6
1981	24	23,2
1984	15,2	27
1987	16,5	26,2
1988	16	33,8
1990	20,4	31,4



b) Quantas funções estão representadas nesse gráfico? Quais são elas?

c) Calcule as taxas de crescimento das importações para cada um dos períodos. Qual a maior taxa? Qual a menor?

d) Calcule as taxas de crescimento das exportações para cada um dos períodos. Qual a maior taxa? Qual a menor?

e) Sabendo que a balança comercial é calculada pela diferença entre importações (I) e exportações (E), construa a tabela e o gráfico da função B = I - E.

Exercício 4

Para **x** variando no intervalo de 1 a 8 ($1 \le x \le 8$), faça um gráfico da função:

$$y = \frac{4}{x}$$

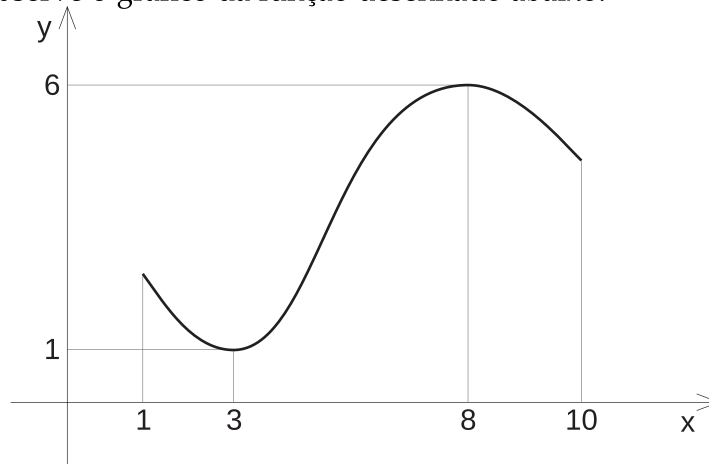
Sugestão: Organize uma tabela com alguns valores de **x** no intervalo dado. Calcule os valores correspondentes de **y**, assinale esses pontos e desenhe uma curva passando por eles.

Exercício 5

Use sua máquina de calcular para construir o gráfico da função $y = \sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 9$.

Exercício 6

Observe o gráfico da função desenhado abaixo:



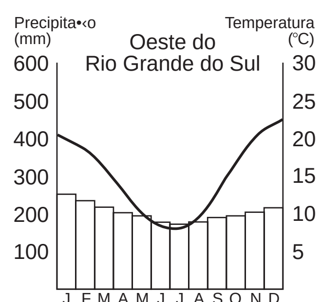
Domínio: $1 \leq x \leq 10$

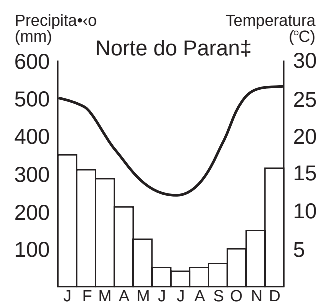
Imagem: 1£ y £ 6

a) O valor mínimo da função ocorre para x = ...
b) O valor máximo da função ocorre para x = ...
c) O valor mínimo da função é y = ...
d) O valor máximo da função é y = ...
e) A função é crescente no intervalo ..... ≤ x ≤ .....
f) A função é decrescente nos intervalos .... ≤ x ≤ .... e ..... ≤ x ≤ ..... .

Exercício 7

Observe os climogramas abaixo:





a) Qual o valor mínimo da temperatura no oeste do Rio Grande do Sul e em que mês ocorre?
b) E no norte do Paraná?
c) Qual das regiões possui um índice pluviométrico mais estável?
d) Em que meses ocorre uma maior variação na precipitação de chuvas no norte do Paraná?
e) Qual o mês mais quente nas duas regiões?

AULA

29

Os gráficos estão na vida

Introdução

Nas Aulas 8, 9 e 28 deste curso você já se familiarizou com o estudo de gráficos. A Aula 8 introduziu essa importante "ferramenta" da Matemática. A Aula 9 foi dedicada a um tipo especial de gráfico, aquele que é uma reta. Na Aula 28 você aprendeu, por meio de vários exemplos do cotidiano, que a noção de função e sua representação gráfica estão fortemente relacionadas e que, pela análise do gráfico, é possível obter várias conclusões importantes sobre as funções. Você já sabe também que nem todo gráfico é gráfico de uma função.

Nesta aula, você conhecerá mais uma forma de utilizar os gráficos. Muitas vezes encontramos gráficos para demonstrar: ***uma pesquisa de opinião***, ***a freqüência com que algo acontece***, ***projeções para o futuro*** etc.
Esses estudos fazem parte de uma área da Matemática conhecida como ***estatística***. Vamos fazer uma pequena iniciação à interpretação de seus resultados quando apresentados sob a forma de gráficos, quadros e tabelas.

Nossa aula

A estatística é a parte da Matemática que cuida dos métodos e das técnicas de coleta, organização, resumo, apresentação e análise de dados. Muitas vezes o termo ***estatística*** é usado como sinônimo dos próprios dados coletados. Assim, você já deve ter ouvido falar em *estatística de emprego*, *estatística de acidentes nas estradas*, *estatística escolar* etc.

Você já sabe que o gráfico é uma representação geométrica da relação entre variáveis. Muitos tipos de gráfico são empregados em estatística de acordo com o tipo de dados e a finalidade a que ele se destina. Entre eles, estão os gráficos de barras (ou colunas), os gráficos em setores de círculo e os gráficos em linha (ou poligonais).

Descrevendo dados

Algumas vezes a estatística procura somente organizar, descrever e

analisar certos dados, como nos próximos exemplos.

EXEMPLO 1

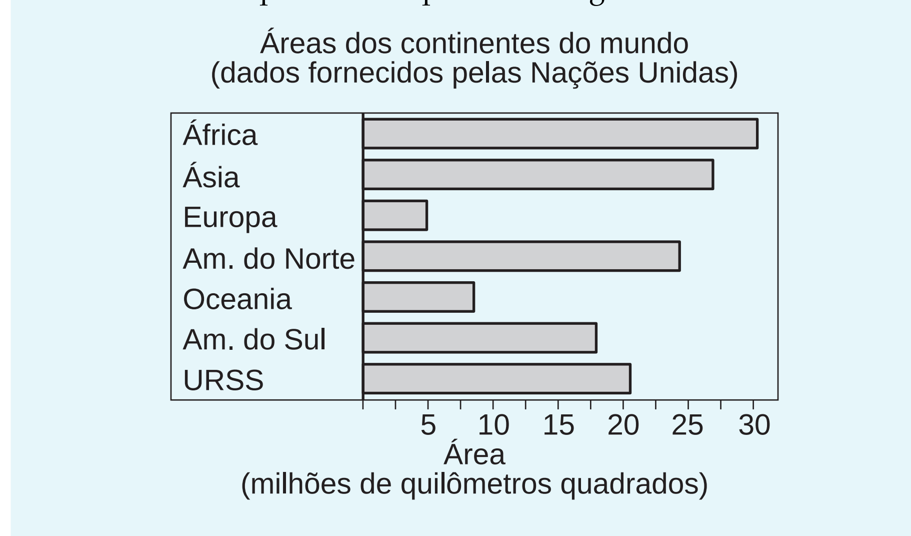
A tabela abaixo representa a área de algumas regiões do mundo em milhões de quilômetros quadrados:

CONTINENTE	ÁREA (MILHÕES DE km^2)
ÁFRICA	30,3
ÁSIA	26,9
EUROPA	4,9
AMÉRICA DO NORTE	24,3
OCEANIA	8,5
AMÉRICA DO SUL	17,9
URSS (ANTIGA)	20,5
TOTAL	133,3

Fonte: Nações Unidas

Observação: Essa tabela foi feita antes da divisão em vários países da União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS).

Os mesmos dados podem ser apresentados graficamente:



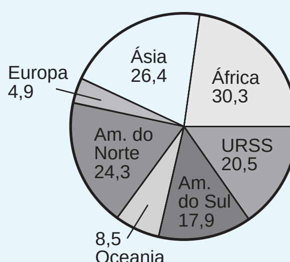
Note que as regiões foram apresentadas em ordem alfabética, tanto na tabela quanto no gráfico. Poderíamos também construir o gráfico com as regiões relacionadas em ordem crescente ou decrescente das áreas.

Outro gráfico que podemos utilizar é o que chamamos de ***gráfico de setores*** ou ***gráfico circular***. Para construí-lo, precisamos de nossos conhecimentos sobre frações. Consideramos o círculo todo como o total das áreas apresentadas e cada fração do círculo como a área de determinada região. Assim, 133,3 milhões km^2 corresponde ao número total de graus de uma circunferência, isto é, a 360º. Então, 1 milhão km^2 corresponde a um arco de:

$$\frac{360^0}{133,3} = 2,7^0$$

Agora podemos calcular a medida, em graus, do arco da circunferência correspondente a cada área. Veja:

ÁFRICA	30,	x	2,7º	≅	82º
ÁSIA	26,9	x	2,7º	≅	73º
EUROPA	4,9	x	2,7º	≅	13º
A. DO NORTE	24,3	x	2,7º	≅	66º
OCEANIA	8,5	x	2,7º	≅	23º
A. DO SUL	17,9	x	2,7º	≅	48º
URSS	20,5	x	2,7º	≅	55º
TOTAL	**133,3**				**360º**



Usando o transferidor, traçamos as linhas divisórias dos setores circulares e obtemos o gráfico de setores (acima).

EXEMPLO 2

Vejamos um outro ***gráfico de setores***. No plebiscito de 1993 sobre o sistema de governo, tínhamos a seguinte situação no Congresso Nacional Brasileiro, em cada uma das pesquisas:

52% dos congressistas eram presidencialistas
30% dos congressistas eram parlamentaristas
18% dos congressistas estavam indefinidos

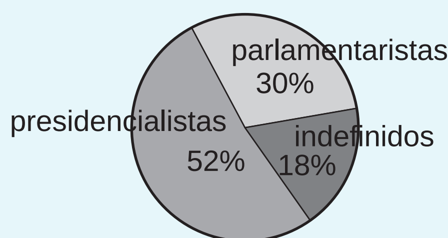
Nesse caso, o círculo todo corresponde a 100%, ou seja, a todos os congressistas. Desse modo, 1% dos congressistas equivale a um arco de:

$$\frac{360^0}{100} = 3,6^0$$

Calculando a medida de cada arco, encontramos:

52% corresponde a um arco medindo 52 x 3,6º = 187,2º
30% corresponde a um arco medindo 30 x 3,6º = 108º
18% corresponde a um arco medindo 18 x 3,6º = 64,8º

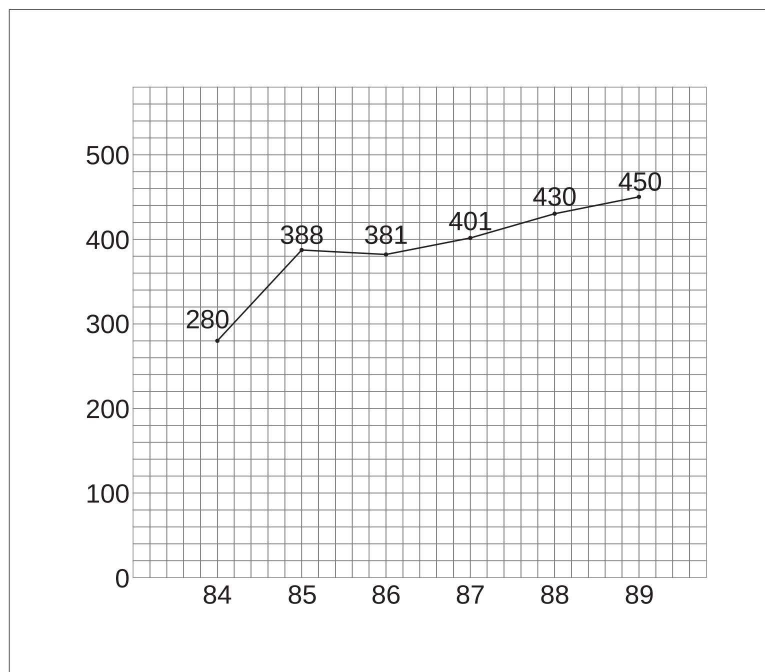
Observe que a soma das porcentagens é 100% e que a soma das medidas dos arcos é 360º.



EXEMPLO 3

Na descrição de dados, também podemos utilizar ***gráficos em linha poligonal***.

Acompanhe os resultados de um gráfico relativo ao número de casos de tuberculose ocorridos numa determinada cidade, entre 1984 e 1989. (Os gráficos cartesianos são muito utilizados em medicina, especialmente nos casos de epidemias).



No eixo horizontal, estão marcados os anos em que foram registrados os números de casos da doença. No eixo vertical, estão assinalados os números de casos registrados. O papel quadriculado facilita o registro e a leitura dos dados.

O gráfico nos leva às seguintes conclusões:

- Entre 1984 e 1985, houve um grande aumento do número de casos, pois o segmento do gráfico nesse período está com inclinação maior para cima (positiva) do que os outros segmentos;
- Entre 1985 e 1986, houve um decréscimo do número de casos. Veja que o gráfico, neste período, está com inclinação para baixo (negativa);
- De 1986 a 1989, o número de casos volta a crescer, mas num ritmo menor que no primeiro período. A inclinação do gráfico, nesse período, é menos acentuada.

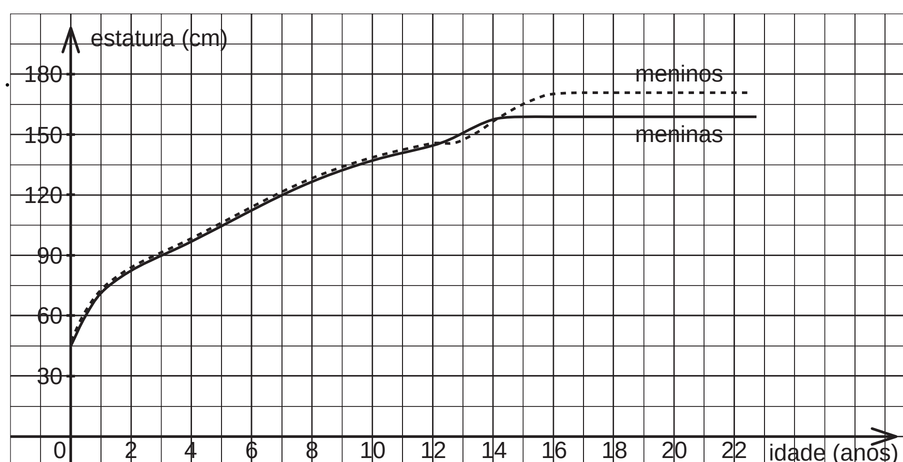
Trabalhando com amostras

Ao coletar dados sobre as características de um grupo de objetos ou pessoas - como a altura e o peso dos jovens brasileiros em cada faixa etária, ou o número de parafusos defeituosos produzidos por uma fábrica a cada semana ou mês - é muitas vezes impossível ou impraticável observar todo o grupo, especialmente se ele é muito grande. Em vez disso, examina-se uma pequena parte,

chamada ***amostra***, isto é uma parte representativa (subconjunto) de um todo (universo) que deve ser pesquisado. Você já deve ter observado que, em algumas pesquisas de opinião e pesquisas eleitorais, é comum citar a amostra: "Foram pesquisadas **x** pessoas de cada estado em tal período". É comum utilizar também o termo ***amostra aleatória***, que significa que as pessoas ou os objetos foram escolhidos ao acaso (aleatoriamente), respeitando, porém, certos critérios estatísticos, para assegurar que a amostra escolhida represente fielmente o universo. Veja a seguir alguns exemplos de gráficos que foram construídos a partir de amostra.

EXEMPLO 4

No gráfico seguinte, aparecem duas curvas referentes ao crescimento de meninos e meninas, desde o nascimento (0 ano) até aproximadamente 22 anos. Você já deve estar imaginando que não foram medidos todos os jovens brasileiros, mas sim um grupo que representasse o universo dos jovens. A medida que aparece no gráfico é uma ***medida média***, ou seja, depois de medir a altura de vários rapazes de 18 anos, por exemplo, calcula-se a média das medidas (170 cm aproximadamente). Assim, podemos encontrar jovens de 18 anos com altura acima ou abaixo de 170 cm (estatura média dessa idade). Esse tipo de gráfico permite visualizar a variação do desenvolvimento de uma criança e a comparação entre o crescimento de meninos e o de meninas.



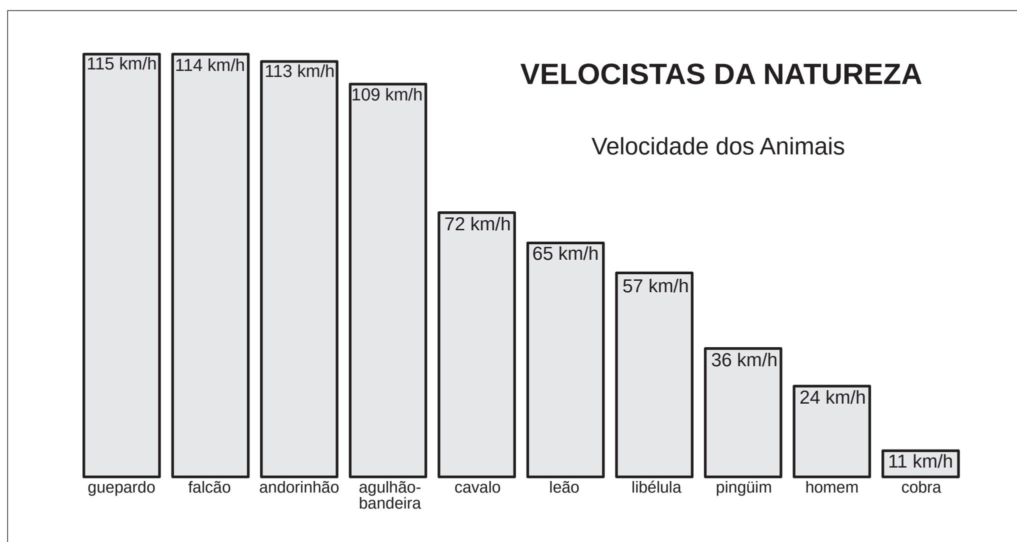
- Comparando as duas curvas, vemos que, entre 0 e 12 anos, os meninos são um pouco mais altos que as meninas e o crescimento dos dois é igual. Dos 12 aos 14 anos, as meninas são mais altas que os meninos; veja que a curva relativa à altura das meninas está acima da dos meninos.

- A partir dos 14 anos, os meninos ultrapassam em altura as meninas.

- Por volta dos 14 anos, a altura das meninas mantém-se constante. No caso dos meninos, isso ocorre por volta dos 16 anos.

EXEMPLO 5

Este exemplo mostra também uma pesquisa estatística feita a partir de amostras. Para que um gráfico como este seja construído, é preciso fazer uma observação científica de amostras dos vários grupos de animais. Observe este gráfico de barras e tire suas próprias conclusões.



Experiências envolvendo contagens

Muitas vezes estamos interessados em saber quantas vezes ou com que freqüência alguma coisa ou evento ocorre. Nestes casos, a estatística usa o termo ***freqüência de um evento***. É comum encontrar, em jornais e revistas, gráficos que demonstram a freqüência de acidentes nas diferentes estradas do país, a freqüência (quantidade) de trabalhadores por faixa salarial etc. Mais uma vez, vamos recorrer a exemplos que ajudarão a entender muitos gráficos.

EXEMPLO 6

A tabela abaixo mostra a freqüência dos salários, em reais, dos 65 empregados de uma empresa.

SALÁRIO (EM REAIS)	Nº DE EMPREGADOS (FREQÜÊNCIA)
500	8
600	10
700	16
800	14
900	10
1.000	5
1.100	2
TOTAL	65

Nesse estudo, os salários estão distribuídos em 7 grupos (classes ou categorias) e foram contados os empregados cujos salários estão em cada um desses grupos, ou seja, a freqüência de cada grupo. Podemos calcular o valor médio dos salários da seguinte maneira:

$$\frac{1.100 + 500}{2} = 800 \text{ reais}$$

Isso significa que a média dos salários está na 4ª linha da tabela. No entanto, a média dos salários efetivamente pagos é obtida de forma diferente, pois o número de empregados em cada grupo é diferente. A média das despesas com salário dessa empresa deve ser calculada como a seguir:

$$\frac{(8 \cdot 500) + (10 \cdot 600) + (16 \cdot 700) + (14 \cdot 800) + (10 \cdot 900) + (5 \cdot 1.000) + (2 \cdot 1.100)}{65}$$

$$= \frac{48.600}{65} = 749,69 \text{ reais}$$

Percebemos também que 31 empregados recebem salários acima da média e 34 abaixo da média. O salário que possui maior freqüência é o de R$ 700,00 (16 empregados).

Esses dados também poderiam ser estudados a partir do percentual de empregados de cada uma das categorias. Observe como ficaria nossa tabela:

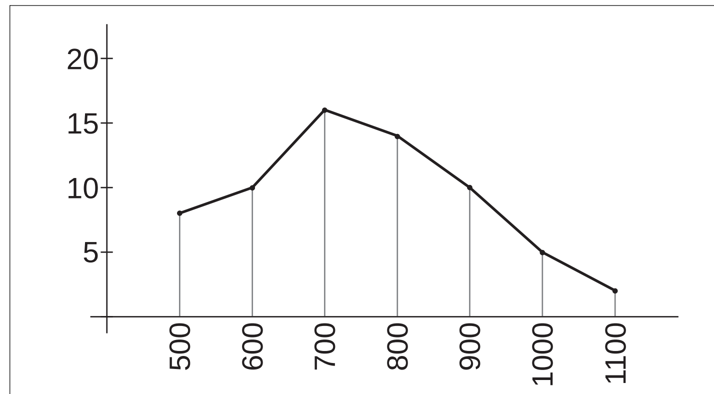
SALÁRIO	PORCENTAGEM DOS EMPREGADOS (FREQÜÊNCIA RELATIVA)
500	12,3%
600	15,4%
700	24,6%
800	21,5%
900	15,4%
1.000	7,7%
1.100	3,1%
TOTAL	100%

Esses percentuais são obtidos considerando 65 = 100%. Assim, para cada nível salarial, dividimos o número de empregados por 65. Por exemplo:

$$\frac{8}{65} = 0,123 = 12,3\%$$

$$\frac{10}{65} = 0,154 = 15,4\%$$

A seguir, você pode observar uma representação gráfica para visualizar a situação apresentada.



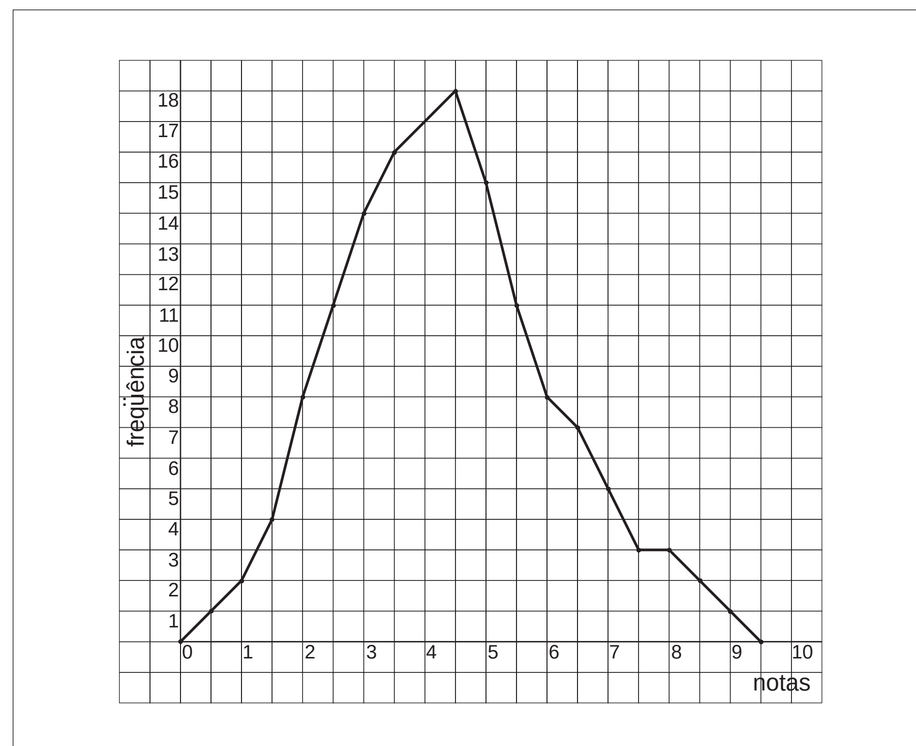
EXEMPLO 7

Numa escola existem 5 turmas de 3ª série do 2º grau. Em uma prova, estiveram presentes 148 alunos. Corrigidas as questões, com notas variando de 0 a 10, o resultado foi o seguinte:

NOTAS	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	TOTAL
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
FREQÜÊNCIA	0	1	2	4	8	11	14	16	17	18	15	11	8	7	5	3	3	2	1	0	0	146

A partir desses dados, foi construído o gráfico abaixo.
Observe que:

- a freqüência da nota 2,0 é 8;
- a freqüência da nota 3,0 é 14;
- a maior freqüência ocorreu na nota 4,5 (dizemos que 4,5 é a ***moda*** do experimento);



- a menor freqüência (zero) ocorreu com as notas 0; 9,5 e 100:
- a ***média*** dos alunos nesta prova é:

$$\frac{635,5}{146} = 4,35$$

(*Confira esse resultado fazendo os cálculos como no Exemplo 6*.)

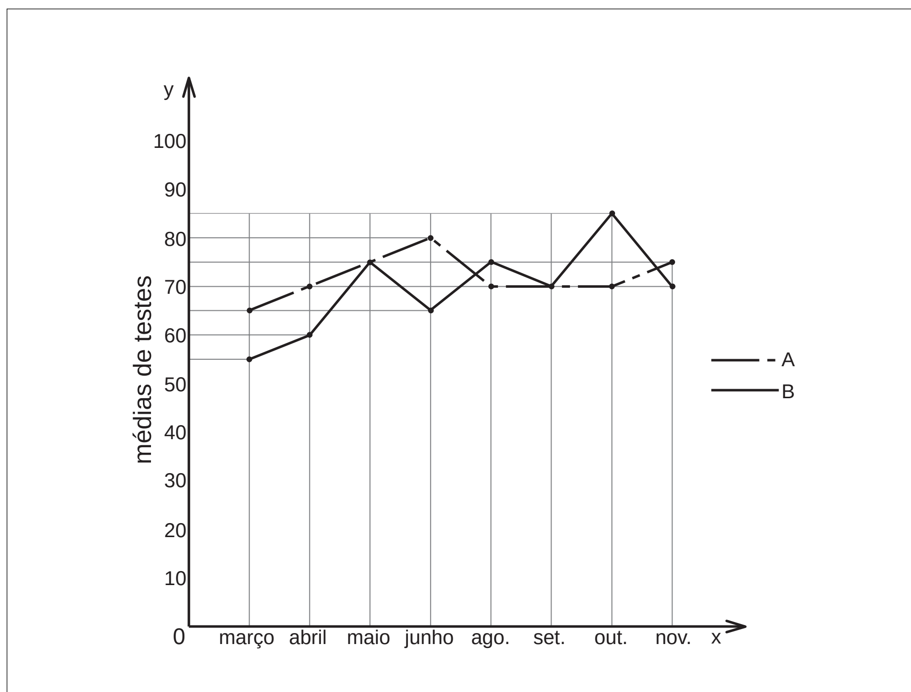
- 73 alunos tiveram nota menor ou igual a 4,0 e 73 alunos tiveram notas maiores do que 4,0. Essa nota divide o total de alunos em dois grupos de mesma quantidade de pessoas (dizemos que 4,0 é a ***mediana*** do experimento).

Observação: Em experimentos de freqüência de eventos, é comum que a ***média***, a ***moda*** e a ***mediana*** sejam muito próximas. É por isso que é mais comum ouvir falar apenas da ***média***.

Exercícios

Exercício 1

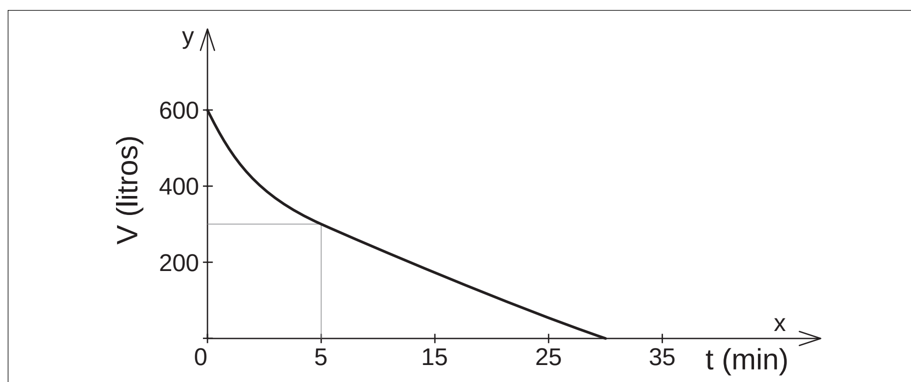
O gráfico mostra o perfil de desempenho das turmas A e B em Matemática, no ano passado.



a) Qual a média da turma A em junho? E da turma B?
b) Em que meses a turma A teve média mais alta que a turma B?
c) Qual a média máxima e a mínima de cada uma das turmas? Em que meses ocorreram?
d) Em que períodos o desempenho da turma A foi crescente? Em que período foi decrescente? Quando se manteve constante?
e) A turma B teve desempenho constante em algum período?
f) Qual das duas turmas apresentou um desempenho mais equilibrado?

Exercício 2

Um depósito, contendo inicialmente 600 litros de água, dispõe de uma válvula na sua parte inferior. Um dispositivo foi utilizado para registrar o volume de água no reservatório, a cada instante, a partir do momento em que a válvula foi aberta. Os valores obtidos durante a operação permitiram construir o gráfico do volume em função do tempo (FUVEST-SP).



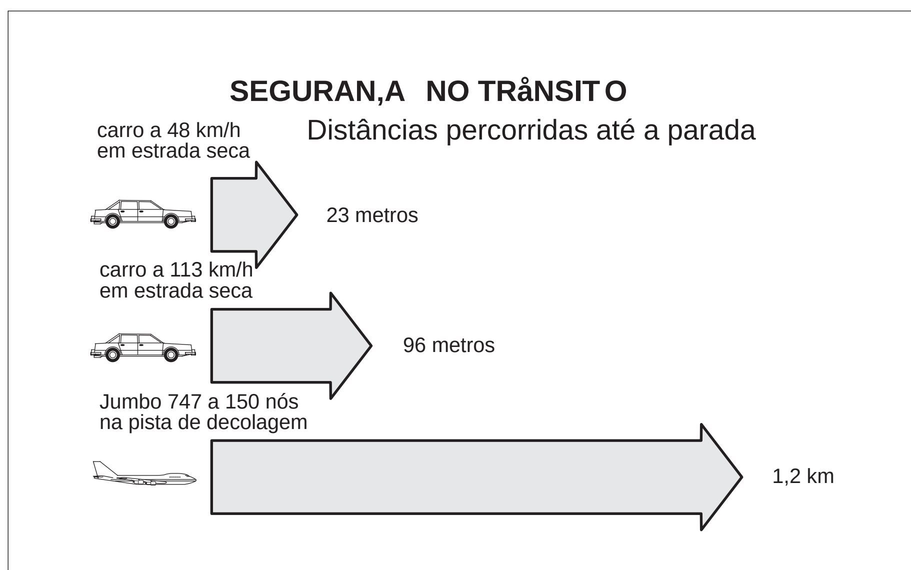
- Quantos minutos decorreram até o volume da água existente no depósito cair à metade?

  a) 5 **b)** 8 **c)** 10 **d)** 15 **e)** 20

- Em quanto tempo o depósito fica vazio?

Exercício 3

O gráfico abaixo ilustra uma pesquisa sobre Segurança no Trânsito. Foram feitos testes em alguns automóveis e obteve-se o seguinte resultado médio, que também está sendo comparado com um avião Jumbo 747.



a) Podemos encontrar um carro que percorra mais de 23 m até a parada e que esteja a 48 km/h? Por quê?

b) Esse gráfico poderia ser apresentado de outras formas? Quais?

c) Seria possível fazer essa ilustração com setores circulares? Por quê?

Exercício 4

A tabela seguinte mostra a área (em milhões de km²) dos oceanos. Represente graficamente os dados por:

a) um gráfico de barras;

b) um gráfico de setores.

OCEANO	PACÍFICO	ATLÂNTICO	ÍNDICO	ANTÁRTICO	ÁRTICO
ÁREA	183,4	106,7	73,8	19,7	12,4

Exercício 5

Qual a média das alturas de uma equipe de basquete com distribuição das alturas como na tabela abaixo?

JOGADOR	ALTURA (m)
A	1,80
B	1,86
C	1,90
D	1,78
E	1,86

Exercício 6

Numa rua movimentada, observaram-se as vestimentas de 2.400 mulheres que passaram por lá num certo período de tempo:

VESTIMENTA	VESTIDO COMPRIDO	VESTIDO CURTO	SAIA E BLUSA	JEANS E CAMISETA	BERMUDA E CAMISETA	SHORT E CAMISETA
NÚMERO DE MULHERES	100	200	100	400	1.200	400

a) Qual a *moda* da pesquisa?

b) Represente graficamente essa pesquisa.

AULA

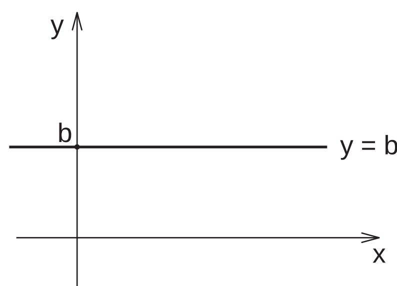
30

A função y = ax + b

Introdução

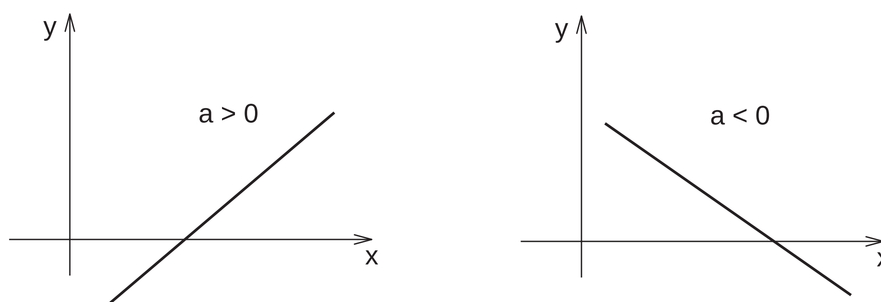
Na Aula 9, tivemos um primeiro contato com a equação **y = ax + b** e aprendemos que seu gráfico é uma reta. Vamos então recordar algumas coisas.

- Se **a = 0**, a nossa equação fica com a forma **y = b** e passaremos a chamá-la de ***função constante***. Seu gráfico é uma reta horizontal. Veja:



Função constante: y = b

Se **a** $\neq$ **0**, a expressão **y = ax + b** chama-se ***função do primeiro grau***. Ainda, se **a > 0** (**a** positivo) ela é uma ***função crescente***; se **a < 0** (**a** negativo), ela é uma ***função decrescente***, como mostram os gráficos:



Funções do 1º grau

Nesta aula, vamos aprender um pouco mais sobre a função do 1º grau, que é a única cujo gráfico é uma reta.

Nossa aula

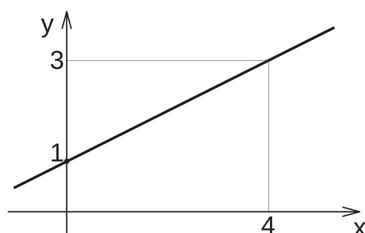
Inicialmente precisamos rever o gráfico da função do 1º grau. Como construí-lo?

Se ele é uma reta, então bastam dois pontos para sua determinação. Por exemplo, vamos desenhar o gráfico da função:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Atribuímos a **x** dois valores quaisquer e calculamos os valores correspondentes de **y**. Na tabela a seguir, fizemos x = 0 e x = 4. Os valores de **y** foram calculados, os pontos marcados no plano cartesiano e o gráfico construído.

x	y
0	1
4	3



Agora, precisamos fazer o contrário. Dados dois pontos de uma função do 1º grau, como proceder para descobrir uma fórmula que a represente? Acompanhe o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1

Descobrir a função do 1º grau que contém os pontos (3, 9) e (5, 13).

Solução: A função do 1º grau tem a forma y= ax + b. Vamos substituir nessa expressão os dois pontos dados.

Substituindo (3, 9) $\rightarrow$ $9 = a \cdot 3 + b$

Substituindo (5, 13) $\rightarrow$ $13 = a \cdot 5 + b$

Organizando essas equações, temos um sistema:

$$\begin{cases} 3a + b = 9 \\ 5a + b = 13 \end{cases}$$

Para resolver, vamos trocar os sinais da primeira equação e depois somar:

$$\begin{array}{rcl} -3a - b & = & -9 \\ 5a + b & = & 13 \\ \hline 2a & = & 4 \end{array} \quad \rightarrow \quad a = 2$$

Substituindo **a = 2** na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 + b &= 9 \\ b &= 9 - 6 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

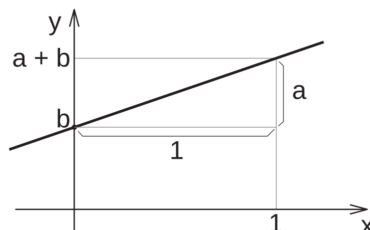
Logo, a função procurada é **y = 2x + 3**.

O coeficiente angular

Na equação **y = ax + b**, **a** é o ***coeficiente angular*** e **b** o ***coeficiente linear***. Este último mostra, como já vimos, o lugar em que a reta corta o eixo dos **y**. Vamos ver, então, o que representa o coeficiente angular.

Atribuindo a **x** os valores 0 e 1 na função y = ax + b, construímos a tabela e o gráfico:

x	y
0	b
1	a + b



> ***O coeficiente angular é o valor que a função aumenta (ou diminui) quando se aumenta a variável x em uma unidade.***

Para que isso fique mais claro, vamos ver um exemplo prático.

EXEMPLO 2

Na conta telefônica de uma residência, o valor total a ser pago é calculado da seguinte maneira:

- A assinatura da linha telefônica dá direito a um certo número de ligações e custa R$ 0,61. Passando desse número, o valor das ligações (pulsos) excedentes é calculado multiplicando-se o número de pulsos extras pelo valor de cada pulso, que é de R$ 0,03.

- Em seguida, esse valor é acrescentado ao valor da assinatura e obtemos o valor total da conta.

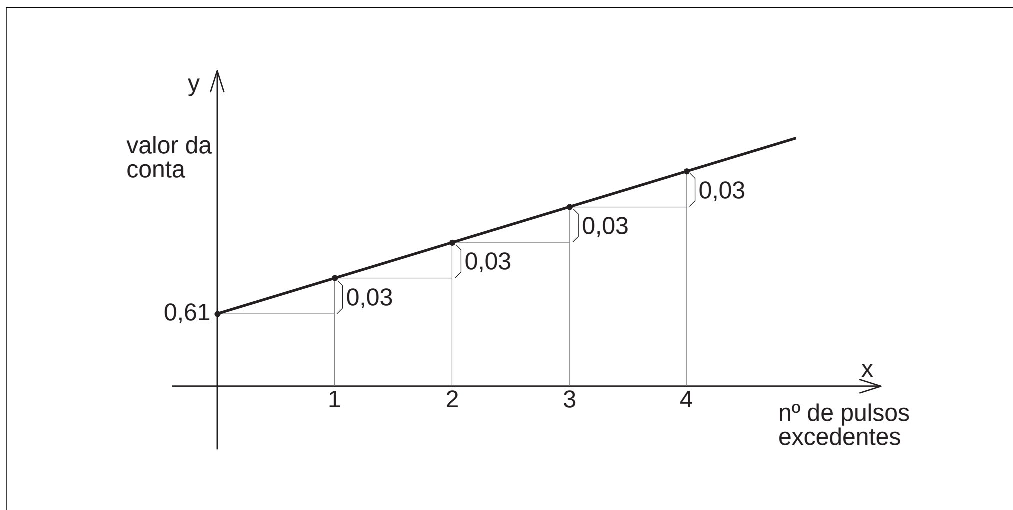
Qual será a fórmula matemática que permite calcular a conta telefônica?

Solução: Chamando de **x** o número de pulsos excedentes no período e de **y** o valor da conta telefônica, podemos escrever o seguinte:

nº de pulsos excedentes: **x**
valor da conta: **y**

$$y = \underbrace{0,61}_{\text{valor da assinatura}} + \underbrace{0,03}_{\text{valor do pulso}} \cdot \underbrace{x}_{\text{nº de pulsos excedentes}}$$

Observe agora como fica o gráfico:



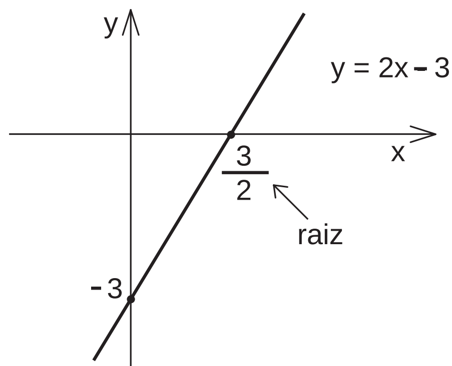
Na função y = 0,03x + 0,61, observe que 0,61 é o ***coeficiente linear*** e que 0,03 é o ***coeficiente angular***. Veja no gráfico que este último - o coeficiente angular - é o valor que a função aumenta quando **x** cresce uma unidade. Ele é a altura do degrau da escada que o gráfico mostra.

A raiz da função

A ***raiz*** da função y = ax + b é o valor de **x** que torna **y** igual a zero. Por isso, esse valor de **x** também é chamado de ***zero da função***. Vamos calcular, por exemplo, a raiz (ou o zero) da função **y = 2x - 3**. Fazendo **y = 0**, temos:

$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

O valor **x =** $\frac{3}{2}$ é a raiz (ou o zero) da função **y = 2x - 3**. Como você vê no gráfico abaixo, a raiz da função é o ponto onde a reta corta o eixo dos **x**.



EXEMPLO 3

No Brasil, as temperaturas são medidas em graus Celsius. Nos Estados Unidos, elas são medidas em outra escala: em graus Farenheit. Um técnico está trabalhando com um motor americano e as temperaturas de funcionamento estão nesta escala, que ele desconhece. Felizmente, existe uma fórmula que permite relacionar a escala americana com a que usamos aqui:

$$y = \frac{5x - 160}{9}$$

onde
y é a temperatura em graus Celsius (ºC)
x é a temperatura em graus Farenheit (ºF)

Como é o gráfico dessa função?
Solução: Para fazer o gráfico de uma função do 1º grau, necessitamos de dois pontos quaisquer. Vamos escolher **y = 0**, que é a temperatura em que a água vira gelo, e **y = 100**, que é a temperatura em que a água ferve:

y = 0 $\rightarrow$

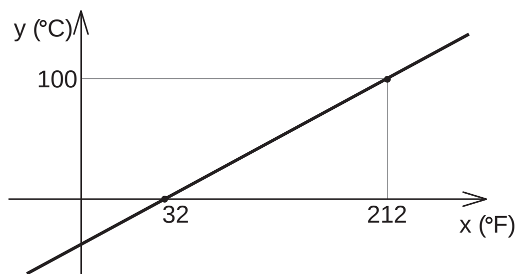
$$\frac{5x - 160}{9} = 0$$
$$5x - 160 = 0$$
$$5x = 160$$
$$x = \frac{160}{5} = 32$$

y = 100 $\rightarrow$

$$\frac{5x - 160}{9} = 100$$
$$5x - 160 = 900$$
$$5x = 1.060$$
$$x = \frac{1.060}{5} = 212$$

Observe então a tabela e o gráfico:

x	y
32	0
212	100



Veja que o zero (ou raiz) da função $\mathbf{y} = \frac{5x - 160}{9}$ é **x = 32**.

Observe que, na escala Farenheit, a água congela a 32ºF e ferve a 212ºF.

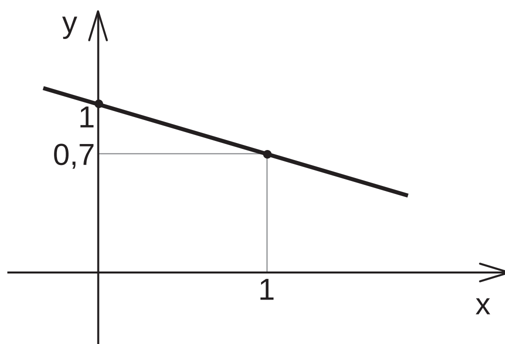
Exercício 1

Considere a função **y = 3x - 6.**

a) Qual é o coeficiente angular?
b) Qual é o coeficiente linear?
c) Qual é a raiz da função?
d) O ponto (12, 30) pertence a essa função?

Exercício 2

O gráfico abaixo mostra uma função do 1º grau:



a) Qual é o coeficiente linear?
b) Qual é o coeficiente angular?

Exercício 3

Faça o gráfico da função **y = 0,4 . x + 2**.

Exercício 4

Determine a função do 1º grau que contém os pontos:

a) (1, - 3) e (6, 7);
b) (1, 3) e (5,- 1).

Exercício 5

Na função da temperatura que mostramos no Exemplo 3, qual é o coeficiente angular?

Exercício 6

O taxímetro determina o preço da corrida em ***unidades taximétricas*** (UTs). Estas são depois convertidas em reais e a tabela de conversão é diferente em cada cidade. O taxímetro parte de um valor de UTs chamado ***bandeirada*** e acrescenta o mesmo valor de UTs para cada quilômetro rodado.

Vicente fez várias corridas de táxi. Verificou que, percorridos 3 km, o taxímetro marcou 3 UTs; percorridos 8 km, o taxímetro marcou 5 UTs. Seja **x** o número de quilômetros percorridos e **y** o número de UTs marcado, determine:

a) **y** em função de **x**;
b) quantas UTs o taxímetro marca em uma corrida de 20 km.

AULA

31

A função do 2º grau

Introdução

Na aula anterior, estudamos a função do 1º grau (**y = ax + b**) e verificamos que seu gráfico é uma reta. Nesta aula, vamos estudar outra função igualmente importante: a função do 2º grau. Ela é representada pela fórmula:

$$\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$$

onde as letras **a**, **b** e **c** são números conhecidos e **a** é diferente de zero. Veja alguns exemplos de funções do 2º grau:

$$y = 2x^2 - 3 + 4$$
$$y = -3x^2 + 9$$
$$y = x^2$$
$$y = x^2 + 6x$$

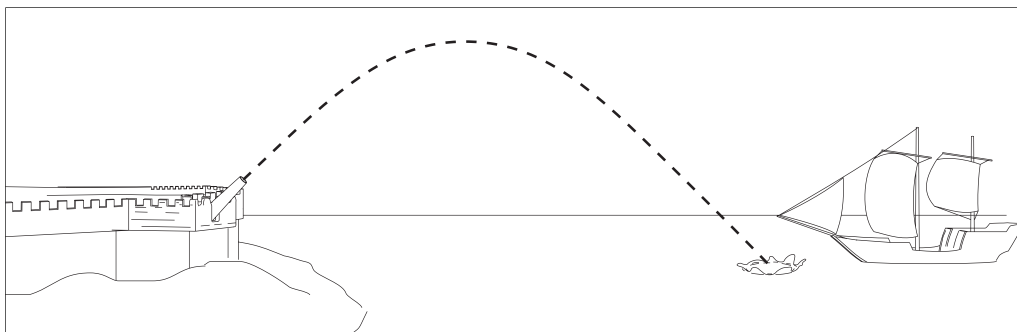
Nossa aula

O objetivo desta aula é investigar os gráficos dessas funções, que são sempre uma curva: a ***parábola***.

Acompanhe os próximos exemplos para ter noção da forma de uma parábola.

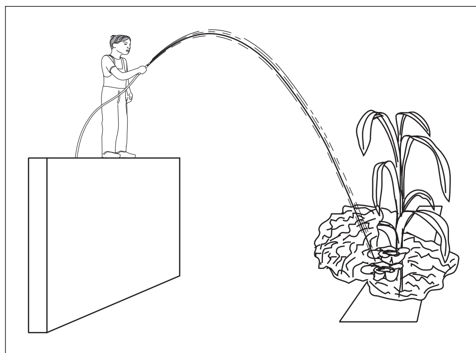
EXEMPLO 1

Imagine um forte antigo, com canhões preparados para atirar em navios inimigos que se aproximassem:



Um navio se aproxima e um canhão dá um tiro. A trajetória da bala segue muito aproximadamente essa curva, chamada ***parábola***. Se não houvesse a resistência do ar, a bala do canhão descreveria exatamente uma parábola.

EXEMPLO 2



Um menino, em cima de um muro, rega as plantas com uma mangueira. Visualizando o jato d'água, você terá uma idéia clara da forma dessa curva.

A parábola

Os exemplos mostraram, aproximadamente, a forma da parábola. Agora, vamos construir uma delas com maior precisão. Escolhemos então a função:

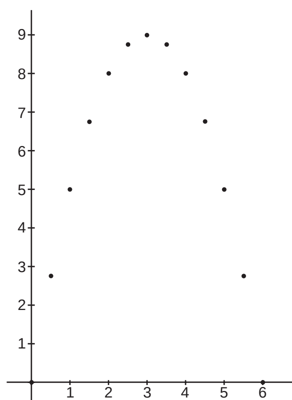
$$y = -x^2 + 6x$$

O ***domínio*** dessa função é o conjunto de todos os números reais. Vamos atribuir a **x** alguns valores e calcular os valores correspondentes de **y**. Observe:

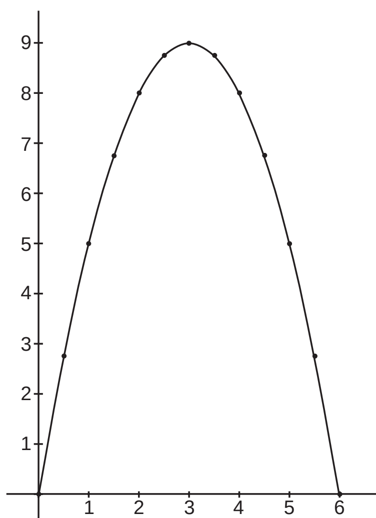
se	$x = 0$	então	$y = -0^2 + 6 . 0 = 0$
se	$x = 0{,}5$	então	$y = -0{,}5^2 + 6 . 0{,}5 = 2{,}75$
se	$x = 1$	então	$y = -1^2 + 6 . 1 = 5$
se	$x = 1{,}5$	então	$y = -1{,}5^2 + 6 . 1{,}5 = 6{,}75$

Esse trabalho continua e nos permite organizar uma tabela com diversos pontos. Mostramos abaixo a tabela correspondente a alguns valores de **x** entre 0 e 6 e os valores calculados para **y**. Assinalando no gráfico cartesiano cada um desses pontos, você tem uma primeira idéia do comportamento dessa função. Veja:

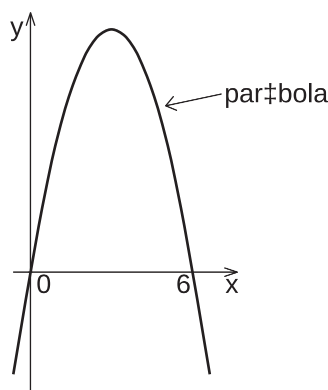
x	y
0	0
0,5	2,75
1	5
1,5	6,75
2	8
2,5	8,75
3	9
3,5	8,75
4	8
4,5	6,75
5	5
5,5	2,75
6	0



Para visualizar melhor o gráfico da função $\mathbf{y = -x^2 + 6x}$, podemos aumentar a nossa tabela para obter mais pontos. O resultado você vê na figura a seguir, que já mostra o gráfico da nossa função entre $\mathbf{x = 0}$ e $\mathbf{x = 6}$.



É bom lembrar que esse desenho é apenas parte do gráfico da nossa função. Para valores de **x** menores que **0** ou maiores que **6** os valores calculados para **y** serão sempre negativos (experimente) e, portanto, o gráfico continuará abaixo do eixo dos **x**. Veja:



A concavidade

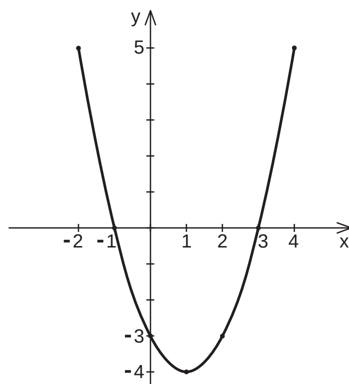
Vamos fazer uma outra experiência para observar a parábola em uma outra posição. Tomemos como exemplo a função:

$$\mathbf{y = x^2 - 2x - 3}$$

Agora, vamos organizar nossa tabela. Atribuímos a **x** valores entre – 2 e 4 e calculamos os valores correspondentes de **y**. Você compreenderá, um pouco mais tarde, a razão da escolha desses valores para **x**.

De qualquer forma, sugerimos que confira nossos cálculos, observe a marcação dos pontos e a construção do gráfico:

x	y
– 2	5
– 1	0
0	– 3
1	– 4
2	– 3
3	0
4	5

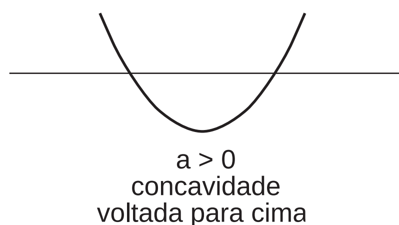


Esse gráfico tem exatamente a mesma forma daquele que encontramos no exemplo anterior, com uma diferença: está em outra posição.

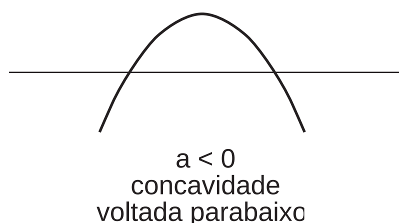
> ***Dizemos que essa parábola tem***
> **a concavidade voltada para cima,**
> ***enquanto a do exemplo anterior tem***
> **a concavidade voltada para baixo.**

Antes de construir o gráfico da função $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, é possível saber como será a sua concavidade. Basta observar o sinal do coeficiente **a:**

- Se $\mathbf{a > 0}$ (**a** positivo), a concavidade estará voltada ***para cima***:



- Se $\mathbf{a < 0}$ (**a** negativo), a concavidade estará voltada ***para baixo***:



As raízes

As raízes de uma função são os pontos onde seu gráfico corta o eixo dos **x**.
Na função do 2º grau **$y = ax^2 + bx + c$**, se **$y = 0$** obtemos a equação **$ax^2 + bx + c = 0$**. Podemos, então, ter três casos:

- A equação tem ***duas raízes diferentes***. A parábola, então, corta o eixo dos **x** em dois pontos distintos.

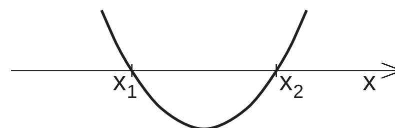


fig A: a fun•‹o
tem duas ra’zes:
x_1 e x_2

- A equação tem apenas ***uma raiz***. A parábola é, então, ***tangente*** ao eixo dos **x**.

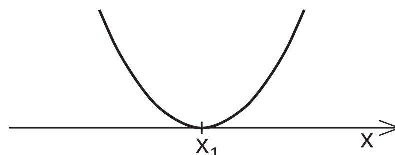


fig B: a fun•‹o
tem uma œnica raiz:
x_1

- A equação ***não tem raiz***. A parábola, então, ***não*** corta o eixo dos **x**.

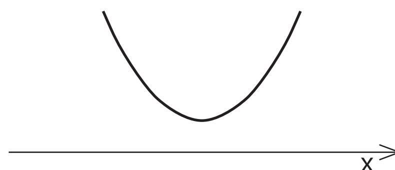


fig C: a fun•‹o
n‹o tem ra’zes.

EXEMPLO 3

Tomemos como exemplo a função:

$$y = x^2 - 6x + 8$$

Para construir seu gráfico assinalando poucos pontos, devemos inicialmente verificar se a função possui raízes. Vamos então resolver a equação x – 6x + 8 = 0 usando a fórmula que aprendemos na Aula 25:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

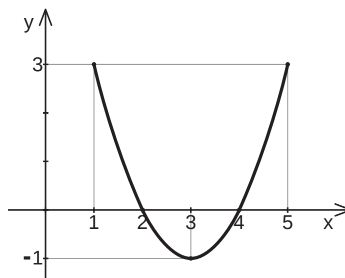
As raízes da nossa função são, portanto:

$$x_1 = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \rightarrow x_2 = 4$$

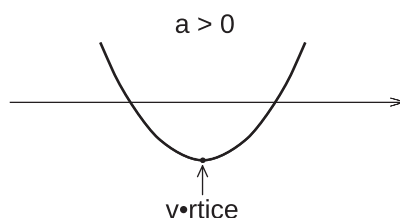
Descobrimos que o gráfico da nossa função corta o eixo dos **x** nos pontos $\mathbf{x_1 = 2}$ e $\mathbf{x_2 = 4}$ e sabemos também que a parábola terá concavidade voltada para cima porque **a = 1** (positivo). Basta, então, para construir a tabela, atribuir a **x** outros valores próximos aos que já temos. É muito importante atribuir a **x** o valor $\frac{x_1 + x_2}{2}$, porque ele fica bem no meio das raízes e vai determinar o ponto ***mais baixo*** da parábola:

	x	y
	1	3
RAÍZES $x_1 =$	2	0
$\frac{x_1 + x_2}{2} =$	3	− 1
RAÍZES $x_2 =$	4	0
	5	3

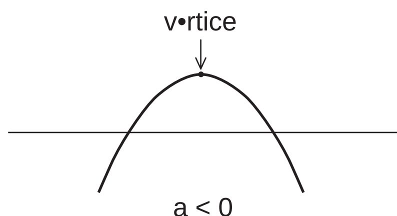


O vértice

No gráfico que acabamos de construir, o ponto V = (3, − 1) é o ***vértice*** da parábola. Ele é o ponto ***mais baixo*** da parábola quando **a > 0**.



No gráfico da função $\mathbf{y = - x^2 + 6x}$, que você viu no início da aula, o ponto (3, 9) é também o ***vértice*** da parábola, que fica no ponto ***mais alto*** do gráfico, porque **a < 0**:



Para a construção do gráfico de uma função do 2º grau, o ***vértice*** é seu ponto mais importante. É possível encontrá-lo de forma bastante simples. Chamando de $\mathbf{x_v}$ a abscissa do vértice da parábola $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

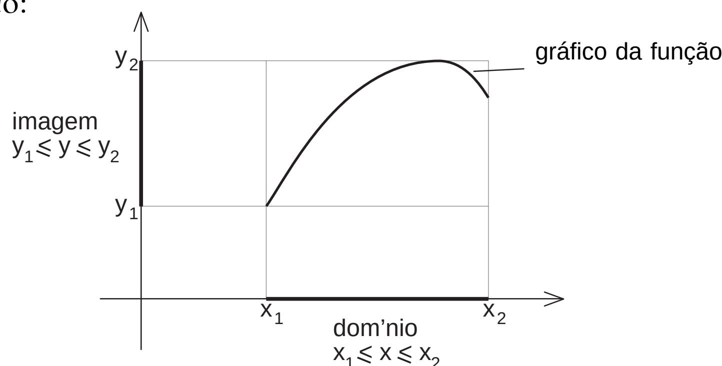
Além disso, se a função possui raízes $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, podemos encontrar a ***abscissa do vértice*** determinando o seu ponto médio, ou seja:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

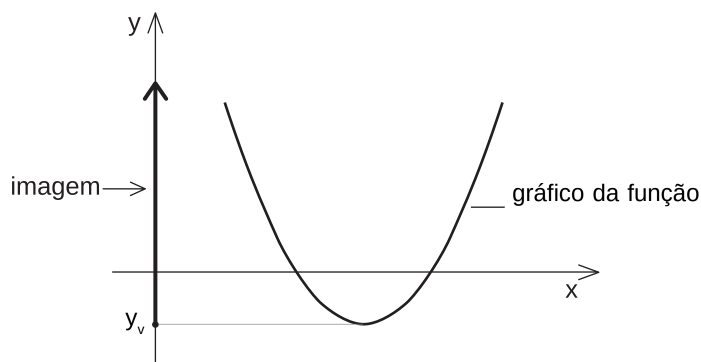
Esses resultados serão demonstrados no **Apêndice**, no final da aula, mas você já pode usá-los para construir de forma rápida e eficiente o gráfico de uma função do 2º grau.

A imagem

Como você já sabe, a ***imagem*** de uma função é o conjunto dos valores de **y** que correspondem aos valores de **x** no domínio. Recorde essa noção observando o gráfico:



Para determinar a imagem de uma função do 2º grau (cujo domínio é o conjunto de todos os números reais), precisamos conhecer seu vértice. Se **a > 0**, então o vértice é o ponto ***mais baixo*** de seu gráfico, e neste caso, a imagem da função fica assim:



Observando o gráfico anterior e chamando de $\mathbf{y_v}$ a ***ordenada*** do vértice da parábola, a imagem será o conjunto de todos os valores de **y** tais que **y** ³ $\mathbf{y_v}$.

Se **a < 0**, ocorre o contrário: a concavidade estará voltada para baixo e a imagem será o conjunto dos números reais tais que **y** £ $\mathbf{y_v}$.

EXEMPLO 4

Consideremos a função $\mathbf{y = x^2 - x + 5}$.
Sabemos que ela tem concavidade voltada para cima, pois $\mathbf{a = 1}$.

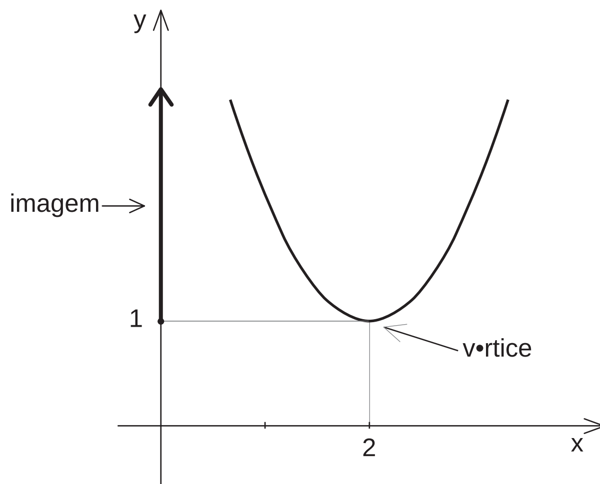
Para fazer um esboço de seu gráfico, determinamos seu vértice. Primeiro, precisamos encontrar sua abscissa:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2\ .\ 1} = 2$$

Substituímos então esse valor de **x** na função para encontrar a ordenada do vértice:

$$y_v = 2^2 - 4\ .\ 2 + 5 = 1$$

Portanto, o vértice é o ponto (2, 1) e, como a concavidade está voltada para cima, o gráfico tem este aspecto:



A imagem da função é então o conjunto dos valores de **y** tais que $\mathbf{y \geq 1}$.

Apêndice

Vamos mostrar agora porque a abscissa do vértice da função do 2º grau é $-\frac{b}{2a}$. Observe as transformações na função: elas criam um quadrado perfeito:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Veja que se **a** é positivo, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre positivo ou nulo. Então, para obter o ponto mais ***baixo*** da parábola, fazemos $x+\frac{b}{2a}=0$, ou seja, $x=-\frac{b}{2a}$. Para esse valor de **x**, temos $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$, que é chamado de ***valor mínimo*** da função.

Da mesma forma, se **a** é negativo, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre negativo ou nulo. Então, para obter o ponto mais ***alto*** dessa parábola, fazemos $x+\frac{b}{2a}=0$, ou seja, $x=-\frac{b}{2a}$ Para essa valor de x, temos $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ que é chamado de ***valor máximo*** da função.

Se existem raízes x_1 e x_2, a abscissa do vértice da parábola é o valor $\frac{x_1+x_2}{2}$. De fato, representando por D (delta) o número b – 4ac temos:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{-b-\Delta}{2a}+\frac{-b+\Delta}{2a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2b)}{2a}=$$

$$=-\frac{b}{2a}$$

Portanto, a ***média*** das raízes é também a abscissa do vértice da parábola.

Procure agora fazer os exercícios propostos.

Exercícios

Exercício 1

Faça o gráfico da função y = x .

Sugestão: Organize uma tabela atribuindo a **x** os valores – 2, – 1, 0, 1 e 2.

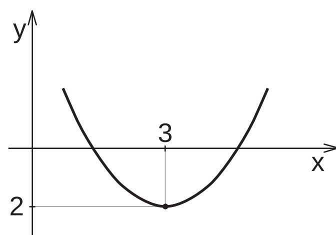
Exercício 2

Observe o exemplo e faça um pequeno esboço do gráfico das funções calculando o vértice da parábola e verificando sua concavidade.

Exemplo:

y = x – 6x + 7

vértice $\begin{cases} x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2\,.\,1} = 3 \\ y_v = 3^2 - 6\,.\,3 + 7 = 9 - 18 + 7 = -2 \end{cases}$



a) $y = x^2 - 4x + 5$

b) $y = - x^2 + 6x - 5$

c) $y = x^2 + 2$

Exercício 3

Faça o gráfico das funções determinando as raízes e o vértice da parábola.

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = - x^2 + 8x - 12$

Exercício 4

Determine as imagens das funções do Exercício 3.

Exercício 5

Faça o gráfico e determine a imagem da função $y = (x - 3)^2$.

AULA

32

Máximos e mínimos

Introdução

Problemas de máximos e mínimos estão presentes em quase todas as atividades do mundo moderno. Por exemplo, você pode imaginar como um carteiro distribui a correspondência? Qual seria seu itinerário para que o tempo de distribuição fosse o menor possível?

Uma variação desse problema é o trajeto do ônibus escolar. Ele deve passar na casa de cada criança para levá-las à escola. Conhecendo os endereços, é preciso planejar o percurso para fazer o serviço no menor tempo possível.

Em qualquer empresa, grande ou pequena, ouvimos falar em *encontrar a receita máxima*, *reduzir o desperdício ao mínimo* entre outras coisas.

Na prática, os problemas de ***máximos*** e ***mínimos*** são, freqüentemente, complexos, porque envolvem muitas variáveis. Entretanto, existem também aqueles que se resolvem por uma simples função do 2º grau. Vamos mostrar alguns desses problemas. Sugerimos que você releia com atenção a Aula 31, para compreender bem as nossas soluções.

Nossa aula

PROBLEMA 1

Os técnicos de uma fábrica de automóveis fizeram diversos testes com um de seus carros populares para examinar o consumo de gasolina. O carro percorria 100 km em uma estrada plana, com velocidade constante. O percurso foi feito muitas vezes e, a cada vez, usou-se uma velocidade diferente. No final de cada viagem, os técnicos verificaram a quantidade de combustível gasta e observaram que o consumo não se mantinha o mesmo, pois era ***função*** da velocidade.

A conclusão foi a seguinte: para velocidade entre 40 e 120 km/h, o consumo desse carro é dado por:

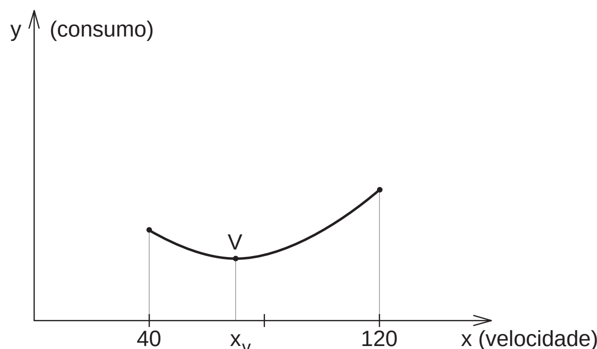
$$y = 0{,}005\, x^2 - 0{,}6\, x + 26$$

onde **x** é a velocidade em quilômetros por hora e **y** é o número de litros de gasolina gastos para percorrer 100 km.

Em que velocidade devemos andar com esse carro, para gastar o ***mínimo*** de combústivel?

Este é um problema interessante. Muita gente acha que andar bem devagar economiza combustível. Não é verdade! É certo que andar muito rápido faz com que o consumo seja alto, mas cada carro possui uma velocidade em que o consumo é o menor possível.

Solução: A função que os técnicos encontraram é do tipo $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$. Como o coeficiente **a** é positivo, sabemos que existe um valor mínimo dessa função. Seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima:



O ponto mais baixo do gráfico é o ***vértice*** (**v**) da parábola e o número $\mathbf{x_v}$ é a velocidade que faz com que o consumo seja o menor possível. Na Aula 31 aprendemos a calcular a abscissa do vértice da parábola. Observe:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-0,6}{2 \times 0,005} = \frac{0,6}{0,01} = 60$$

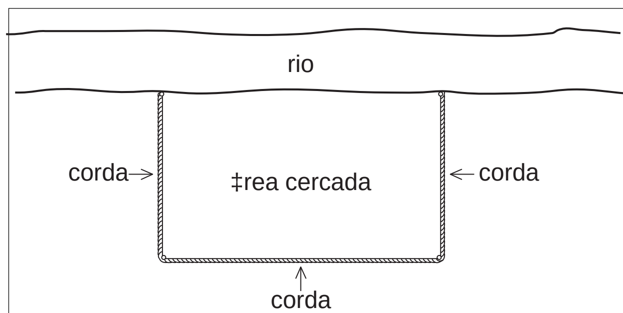
Logo, a velocidade que dá o mínimo consumo é de **60 km/h** para gastar a menor quantidade possível de gasolina. Se, entretanto, desejarmos saber qual o gasto mínimo de combustível para percorrer os 100 km, basta substituir o **x** da função por 60. Teremos então:

$$\begin{aligned} y &= 0,005 \cdot 60^2 - 0,6 \cdot 60 + 26 \\ &= 18 - 36 + 26 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Portanto, andando a 60 km/h, gastaremos apenas **8 litros** de gasolina para percorrer os 100 km.

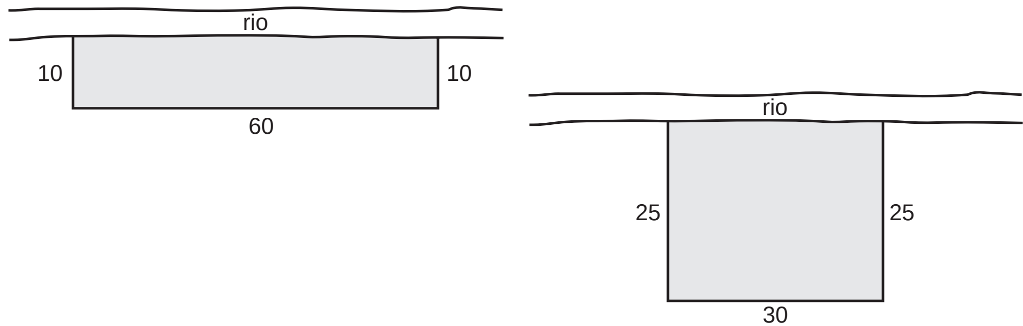
PROBLEMA 2

Com 80 m de corda, um fazendeiro deseja cercar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.



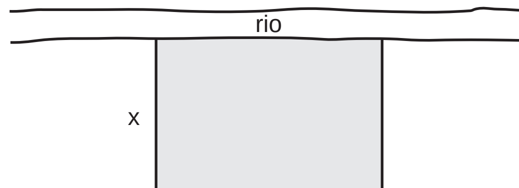
Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

Conhecido o comprimento da corda (80 m) e uma das medidas do retângulo, é facil calcular as outras. Mas, existem muitas opções para formar esse retângulo. Veja duas delas:

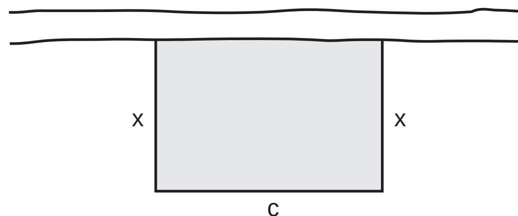


Nos dois exemplos, o comprimento total da corda é 80 m, mas as áreas cercadas são diferentes. No primeiro caso, ela é 10 . 60 = 600 m ^{2} *e no segundo,* 25 . 30 = 750 m^{22} . *Vemos, então, que a área cercada é* ***função*** *das medidas do retângulo.*

Solução: Vamos chamar de **x** uma das medidas do retângulo.



A área será representada por **y**. Como os lados opostos do retângulo são iguais, temos um outro lado de tamanho **x** e o outro de tamanho **c**. Veja:



Se o comprimento total da corda é 80 m, então:

$$x + c + x = 80 \quad \text{ou}$$
$$c = 80 - 2x$$

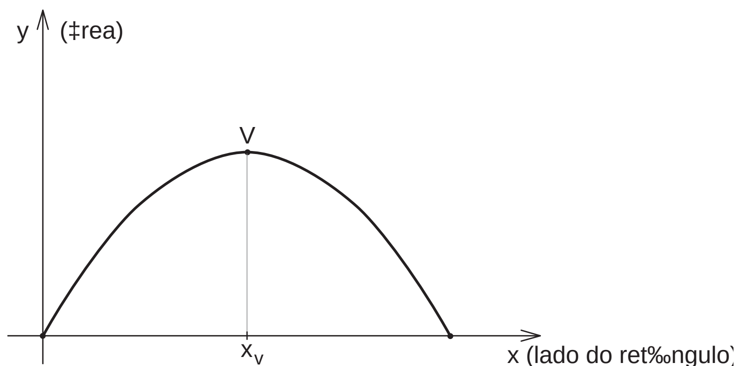
Agora, a área cercada é:

$$y = x \cdot c \qquad \text{ou}$$
$$y = x\,(80 - 2x)$$

Desenvolvendo, temos:

$$y = 80x - 2x^2 \quad \text{ou melhor}$$
$$y = -2x^2 + 80\,x$$

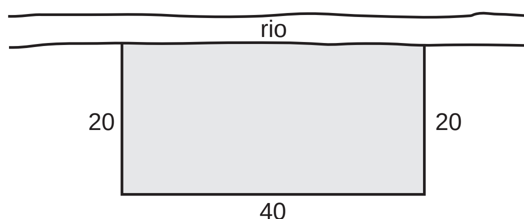
Estamos diante de uma função do 2º grau, que relaciona o lado **x** do retângulo com a área **y**. O gráfico tem a seguinte forma:



O ponto mais alto do gráfico é o vértice **v** da parábola; sua abscissa $\mathbf{x_v}$ é o valor do lado do retângulo que faz com que sua área seja máxima. Calculamos, então, essa abscissa da mesma forma que no problema anterior:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-2)} = \frac{80}{4} = 20$$

Portanto, se fizermos a largura do retângulo igual a 20 m, teremos a certeza de que a área cercada será a maior possível. Veja como ele ficou:



A área, neste caso, será de 20 x 40 = 800 m²; maior, como se pode ver, que as áreas dos retângulos que apareceram nos dois exemplos iniciais.

Exercícios

Exercício 1

Usando a função do Problema 1 da nossa aula, calcule:

a) O consumo de combustível a 50 km/h;

b) O consumo de combustível a 90 km/h;

c) Em que velocidade, maior que 60 km/h, o carro andou se gastou 10 litros para percorrer os 100 km?

Exercício 2

Qual é o valor mínimo da função $y = x^2 - 6x + 13$?

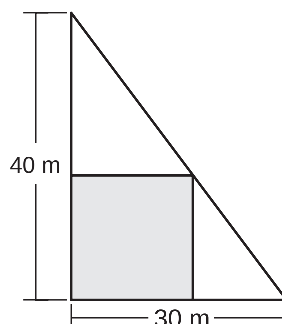
Exercício 3

Qual é o valor máximo da função $y = -3x^2 + 12x + 5$?

Sugestão (para os Exercícios 2 e 3): Calcule a abscissa do vértice pela fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$ e substitua esse valor encontrado no **x** da função.

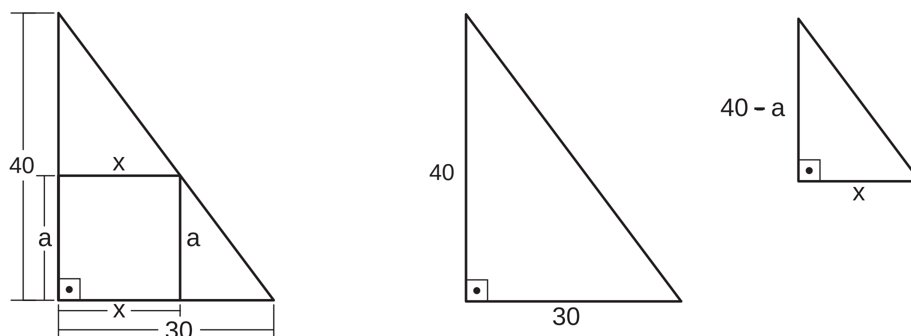
Exercício 4

Desejamos construir um edifício de base retangular no interior de um terreno triangular, como mostra a figura:



Determine as medidas do retângulo de maior área possível que caiba dentro de um triângulo retângulo de catetos 30 m e 40 m.

Sugestão: Seja **x** uma das medidas do retângulo e **y** sua área. Vamos calcular **y** em função de **x** (fig. A):



Os dois triângulos da figura B são semelhantes. Relacione seus elementos e calcule o segmento **a** em função de **x**. A área do retângulo é $y = x \cdot a$. Substituindo **a** pela expressão encontrada, obtém-se uma função do 2º grau. Determine, então, para que valor de **x** encontra-se o máximo de **y**.

Exercício 5

João tem uma pequena fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$ 20,00 cada uma. Entretanto percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima? Qual o valor máximo dessa receita?

Sugestão: Inicialmente ele vendia 300 caixas por R$ 20,00 cada uma. Sua arrecadação era 300 · 20 = R$ 6.000,00. Diminuindo R$ 1,00 no preço, ele venderá 40 caixas a mais. Nesse segundo caso, sua arrecadação será 340 · 19 = R$ 6.460,00. Portanto a arrecadação aumentou. Complete alguns valores da tabela abaixo.

PREÇO	Nº DE CAIXAS VENDIDAS	RECEITA
20	300	6.000
19	340	6.460
18		
17		

Imagine agora que ele dê um desconto de **x** reais em cada caixa. Assim, o preço será **20 - x** e o número de caixas vendidas será **300 + 40x**. Se **y** é a sua receita, você deve observar que **y** é dado por uma função do 2º grau.

Progressões aritméticas

Introdução

Quando escrevemos qualquer quantidade de números, um após o outro, temos o que chamamos de ***seqüência***. As seqüências são, freqüentemente, resultado da observação de um determinado fato ou fenômeno.

Imagine, por exemplo, que uma pessoa da cidade de Magé (Rio de Janeiro) tenha anotado as temperaturas máximas em cada dia do mês de abril de 1995. O resultado pode ser visto na seguinte tabela:

DIA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
TEMPERATURA MÁXIMA (°C)	31	32	32	29	31	34	33	34	26	25	28	27	30	29	...

Na linha de cima, temos a seqüência dos dias e, na de baixo, a seqüência das temperaturas. Nessa seqüência, dizemos que o ***primeiro termo*** é 31, o ***segundo termo*** é 32, o ***sexto termo*** é 34.

É conveniente representar cada termo de uma seqüência pela letra **a**, seguida de um índice que indica a sua ***ordem***.

Assim, na seqüência das temperaturas, temos:

$a_1 = 31$
$a_2 = 32$
$a_6 = 34$
$a_9 = 26$ etc.

Quando desejamos falar sobre um ***termo qualquer*** de uma seqüência, escrevemos $\mathbf{a_n}$. Assim, no exemplo que acabamos de dar, $\mathbf{a_n}$ ***representa a temperatura máxima registrada no dia*** **n.**

Para que você entenda bem o significado desta última frase, e de outras do mesmo tipo, substitua **n** por números naturais: 1, 2, 3 etc. Fazendo isso, você obtém as seguintes frases:

- $\mathbf{a_1}$ representa a temperatura máxima registrada no dia **1**;
- $\mathbf{a_2}$ representa a temperatura máxima registrada no dia **2**; e assim por diante.

Você pode usar as seqüências para registrar diversas observações, como a produção de uma fábrica em cada mês, o número de telefonemas que você dá

por dia, a taxa de inflação mensal etc.

Nesta aula e nas próximas, vamos estudar certas seqüências muito especiais. Por sua regularidade, conhecendo alguns termos, podemos ***calcular*** qualquer outro. A primeira delas chama-se ***progressão aritmética***.

Nossa aula

Uma ***progressão aritmética*** é uma seqüência na qual, dado um primeiro termo, obtemos todos os outros ***acrescentando*** sempre a mesma quantidade. Por exemplo, vamos partir do número 7 e acrescentar 3, diversas vezes:

7 → 10 → 13 → 16 → 19 → 22 ...

+3 +3 +3 +3 +3

O valor que ***acrescentamos*** a cada termo para obter o seguinte chama-se ***razão*** (R). Portanto, nesse exemplo, temos:

$$a_1 = 7 \text{ e } R = 3.$$

Veja agora outros exemplos de progressões aritméticas e sua classificação:

- 3, 7, 11, 15, 19, 23 ...
  Temos R = 4.
  É uma ***progressão crescente***.

- 9, 7, 5, 3, 1, - 1, - 3, - 5, ...
  Temos R = - 2.
  É uma ***progressão decrescente***.

- 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ...
  Temos R = 0.
  É uma ***progressão estacionária***.

Dada uma progressão aritmética, como calculamos sua razão? Pense!

Não é difícil. Como a razão é a quantidade que acrescentamos a cada termo para obter o seguinte, podemos dizer que:

> ***A razão de uma progressão aritmética é a diferença entre qualquer termo e o anterior.***

Assim, retomando os três últimos exemplos, temos:

na 1ª progressão: $R = 7 - 3 = 4$
$R = 11 - 7 = 4$
$R = 15 - 11 = 4$ etc.

na 2ª progressão: $R = 7 - 9 = - 2$
$R = 5 - 7 = - 2$ etc.

na 3ª progressão: $R = 4 - 4 = 0$

Passamos então a generalizar o que vimos nos exemplos. Considere a seguinte progressão aritmética (de agora em diante representada por **PA**) de razão **R**:

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 .... a_n ....

+ R + R + R + R + R + R .... + R

Suponha que você conheça o primeiro termo (a_1), e a razão (R). Como faremos para calcular qualquer outro termo? Observe as igualdades:

$$a_2 = a_1 + R$$
$$a_3 = a_1 + 2R$$
$$a_4 = a_1 + 3R$$
$$a_5 = a_1 + 4R$$
....
$$a_{10} = a_1 + 9R$$

Vemos então que, para calcular um termo qualquer (a_n) é preciso somar ao 1º termo, **n - 1** vezes a razão, ou seja:

Fórmula do termo geral

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)\ R}$$

Para entender bem o que estamos fazendo, imagine que você está no 1º degrau de uma escada e deseja chegar ao 10º. Quantos degraus deve subir? É claro que são 9. Se você está no 1º degrau e deseja chegar ao 25º, quantos deve subir? Deve subir 24, lógico. Então, para chegar ao degrau número **n**, devemos subir **n - 1** degraus.

Observe a aplicação dessa fórmula nos exemplos seguintes.

EXEMPLO 1

Qual é o trigésimo (30º) termo da progressão aritmética: 10, 17, 24, 31, 38, ...?

Solução: A razão da progressão é **R = 17 - 10 = 7** e o primeiro termo é $\mathbf{a_1 = 10}$. Desejamos calcular o trigésimo termo, ou seja, $\mathbf{a_{30}}$.
A partir da fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n - 1)R$$

Substituindo a letra **n** por 30, obtemos:

$$a_{30} = a_1 + (30 - 1)R$$

Daí,

$$a_{30} = 10 + 29 . 7$$

$$a_{30} = 213$$

Portanto, o trigésimo termo da progressão dada é **213**.

EXEMPLO 2

Um aluno escreveu todos os números ímpares desde 17 até 63. Quantos números ele escreveu?

Solução: A progressão desse exemplo é a seguinte:

17, 19, 21, 23, ..., 63.

O primeiro termo é 17, o último termo é 63 e a razão é 2. Escrevemos então:

$a_1 = 17$
$a_n = 63$
$R = 2$

Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, calcularemos **n** que é o ***número de termos*** da progressão:

$$a_n = a_1 + (n - 1)R$$
$$63 = 17 + (n - 1) . 2$$
$$63 - 17 = 2n - 2$$
$$46 = 2n - 2$$
$$48 = 2n$$
$$n = 24$$

A progressão tem, portanto, **24 termos**.

EXEMPLO 3

Em janeiro de certo ano, João estava ganhando R$ 70,00 por mês. Seu patrão prometeu aumentar seu salário em R$ 4,00 todos os meses. Quanto João estará ganhando em dezembro do ano seguinte?

Solução: Se o salário de João aumenta R$ 4,00 todos os meses, então a seqüência dos salários é uma progressão aritmética de razão 4.
Vamos organizá-la assim:

1º ANO	janeiro	→	$a_1 = 70$
	fevereiro	→	$a_2 = 74$
	....		
	....		
	dezembro	→	$a_{12} =$
2º ANO	janeiro	→	$a_{13} =$
	....		
	....		
	dezembro	→	$a_{24} =$

Usando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_{24} = a_1 + 23R$$

$$a_{24} = 70 + 23 . 4$$

$$a_{24} = 70 + 92$$

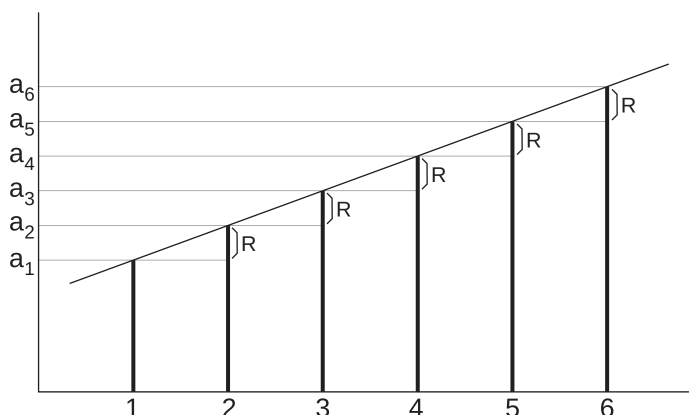
$$a_{24} = 162$$

Portanto, com esses pequenos aumentos mensais, João estará ganhando, em dezembro do ano seguinte, **R$ 162,00**.

Algumas propriedades da progressão aritmética

O gráfico

Podemos visualizar os termos de uma progressão aritmética por meio de um gráfico como este:



Os ***valores dos termos*** são representados pelas barras verticais que formam o desenho de uma escada. Nessa escada, a altura de cada degrau é a ***razão*** da progressão aritmética.

Uma outra fórmula

Se você está no 6º degrau de uma escada e deseja chegar ao 10º, quantos degraus deve subir? A resposta é simples: 4 degraus. Podemos escrever isso em linguagem matemática:

$$\mathbf{a_{10} = a_6 + 4R}$$

De modo geral, se estamos no degrau de número **n** e desejamos chegar ao degrau de número **m**, devemos subir **m - n** degraus. A nossa nova fórmula, que relaciona dois termos quaisquer, é então a seguinte:

$$\mathbf{a_m = a_n + (m - n)R}$$

EXEMPLO 4

Todos os anos, uma fábrica aumenta a produção, em uma quantidade constante. No 5º ano de funcionamento, ela produziu 1.460 peças, e no 8º ano, 1.940. Quantas peças ela produziu no 1º ano de funcionamento?

Se a produção é aumentada a cada ano em uma quantidade constante, temos que a seqüência das produções anuais forma uma progressão aritmética. Nessa progressão, sabemos que $a_5 = 1.460$ e $a_8 = 1.940$. Devemos calcular $\mathbf{a_1}$, ou seja, a produção inicial. Tomemos então nossa última fórmula:

$$a_m = a_n + (m - n)R$$

e façamos **m = 8** e **n = 5**. Ela fica assim:

$$a_8 = a_5 + (8 - 5)R$$

Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$1.940 = 1.460 + 3R$$
$$1.940 - 1.460 = 3R$$
$$480 = 3R$$
$$R = 160$$

Sabemos agora que a razão é 160, ou seja, a produção da fábrica aumenta em 160 peças a cada ano. Para calcular o primeiro termo da progressão, façamos **m = 5** e **n = 1** na fórmula que estamos usando. Ela fica assim:

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)R \qquad \text{ou}$$

$$a_5 = a_1 + 4R$$

Como os valores de a_5 e R são conhecidos, podemos fazer as substituições:

$$1.460 = a_1 + 4 . 160$$

$$1.460 = a_1 + 640$$

$$1.460 - 640 = a_1$$

$$a_1 = 820$$

Concluímos então que, no primeiro ano de funcionamento, essa fábrica produziu **820 peças**.

Para terminar, repare que temos duas fórmulas, muito parecidas, para relacionar dois termos de uma progressão aritmética e sua razão. A segunda é mais geral. Ela é capaz de calcular qualquer termo de uma PA se você conhece a razão e, também, um outro termo qualquer.

Exercício 1

Calcule o 25º termo da PA: 5, 8, 11, 14, ...

Exercício 2

Uma caixa d'água de 1.000 litros está completamente cheia e vaza 7 litros por hora.

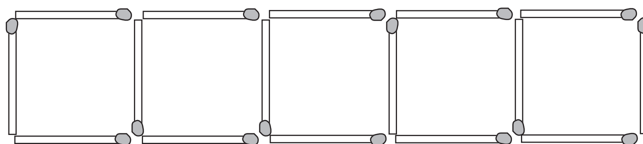
a) Complete alguns termos da progressão sugerida abaixo:

caixa cheia → a_1 = 1.000 litros
1 hora depois → a_2 = 993 litros
2 horas depois → a_3 = ...
3 horas depois → a_4 = ...
4 horas depois → a_5 = ...

b) Quantos litros terá a caixa 24 horas depois do instante em que estava cheia?

Exercício 3

Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforo como mostra o desenho:



Quantos quadrados ela fez com 250 palitos?

Sugestão: Forme uma progressão da seguinte forma:

1 quadrado = 4 palitos → $a_1 = 4$
2 quadrados = ... palitos → a_2 = ...

Exercício 4

Faça um gráfico mostrando os 6 primeiros termos da progressão aritmética de razão - 3 cujo primeiro termo é 11.

Exercício 5

Em uma PA, $a_{10} = 33$ e $a_{17} = 68$. Calcule a_{32}.

Exercício 6

Um menino tem R$ 19,00 no seu cofre e, a partir de certo mês, passou a tirar R$ 0,80 todos os dias para um sorvete.

a) Organize uma PA mostrando a quantia que resta no cofre após o sorvete diário. Assim:

1º dia → a_1 = 18,20
2º dia → a_2 = ...
3º dia → a_3 = ...
4º dia → a_4 = ...
5º dia → a_5 = ...

b) Que quantia havia no cofre após o sorvete do 15º dia?

c) Qual foi o 1º dia em que ele não pôde tomar sorvete?

Exercício 7

No acostamento de uma estrada, existem dois telefones para pedidos de socorro mecânico: um no km 51 e outro no km 117. Entre eles, serão colocados mais 10 telefones, de modo que entre um e o seguinte se tenha sempre a mesma distância. Determine em que quilômetros ficarão os novos telefones.

Sugestão: Se já existem 2 telefones e mais 10 serão colocados entre eles, então a progressão terá, ao todo, 12 termos. Considere então $a_1 = 51$ e $a_{12} = 117$. Com a fórmula do termo geral, você pode calcular a razão.

AULA

34

Somando os termos de uma progressão aritmética

Introdução

Na aula passada, mostramos como calcular qualquer termo de uma progressão aritmética se conhecemos um de seus termos e a razão. Nesta aula, vamos aprender a somar rapidamente qualquer quantidade de termos de uma PA. Deduziremos a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética usando a mesma idéia que um menino de 10 anos teve no ano de 1787. Esse menino, que se tornou um dos maiores matemáticos de todos os tempos, chamava-se Carl Friedrich Gauss, e uma pequena parte de sua história é a que relatamos a seguir:

Um pouco de História

O menino Gauss era alemão e vivia na cidade de Brunswick, onde, aos 10 anos, freqüentava a escola local. Certo dia, para manter a classe ocupada, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de 1 a 100. Mas, para sua enorme surpresa, o pequeno Gauss anunciou a resposta quase imediatamente: "Dá 5.050".

Vamos mostrar como ele calculou "de cabeça" a soma:

$$1 + 2 + 3 + ... + 100$$

Primeiro vamos representar pos S essa soma.

Depois, escrevemos a mesma soma na ordem inversa e, em seguida, somamos as duas, termo a termo.

$$\begin{array}{rcrcrcrcccrcrcr}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & .... & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & .... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & .... & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

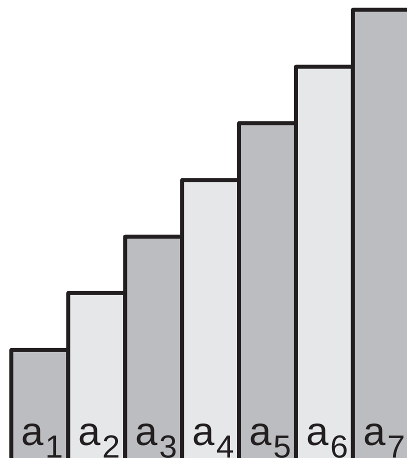
Assim, duas vezes S é igual à soma de 100 parcelas, todas iguais a 101. Logo:

$$\begin{aligned}
2S &= 100 \cdot 101 \\
2S &= 10.100 \\
S &= 5.050
\end{aligned}$$

Não há dúvida de que esse episódio da vida do menino Gauss nos mostra uma idéia brilhante. Vamos aproveitá-la para deduzir a fórmula da soma dos termos de qualquer progressão aritmética.

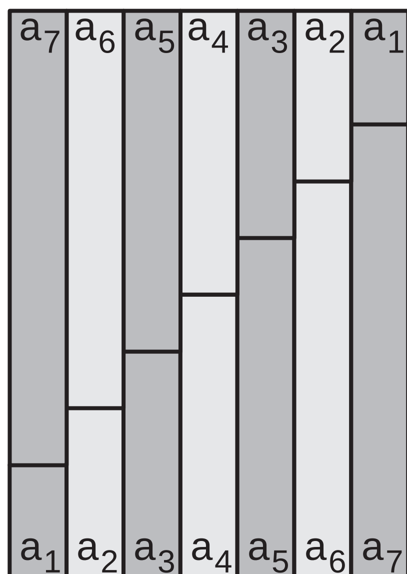
Nossa aula

Como vimos na aula passada, podemos imaginar os termos de uma progressão aritmética como os degraus de uma escada. Veja uma de sete degraus, por exemplo:



Agora, como faremos para calcular a soma das alturas de todos os degraus?

Podemos usar a idéia do menino Gauss. Vamos considerar duas ***escadas iguais*** e encaixar uma na outra, como mostra o desenho a seguir:



Observando o desenho, vemos que $a_1 + a_7$ é igual a $a_2 + a_6$ que é igual a $a_3 + a_5$ e assim por diante. Temos então:

$$S = \boxed{\mathbf{a_1}} + \boxed{\mathbf{a_2}} + \boxed{\mathbf{a_3}} + \boxed{\mathbf{a_4}} + \boxed{\mathbf{a_5}} + \boxed{\mathbf{a_6}} + \boxed{\mathbf{a_7}}$$

$$S = \boxed{\mathbf{a_7}} + \boxed{\mathbf{a_6}} + \boxed{\mathbf{a_5}} + \boxed{\mathbf{a_4}} + \boxed{\mathbf{a_3}} + \boxed{\mathbf{a_2}} + \boxed{\mathbf{a_1}}$$

Somando as duas igualdades, obtemos, do lado esquerdo, 2S e, do lado direito, 7 vezes $a_1 + a_7$. Logo:

$$2S = (a_1 + a_7) \cdot 7$$

$$S = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2}$$

O raciocínio utilizado para obter a soma dos 7 termos da progressão que nos serviu de exemplo pode ser aplicado a qualquer outra. Portanto, se uma progressão tiver **n** termos, a soma de todos eles será:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Nessa fórmula, é bom lembrar que:

$\mathbf{a_1}$ é o primeiro termo,

$\mathbf{a_n}$ é o último termo,

n é o número de termos.

EXEMPLO 1

Calcule a soma dos 30 primeiros números ímpares.
Solução: Os números ímpares são:

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Eles formam uma progressão aritmética de razão 2.
Para calcular o trigésimo (30º) termo dessa progressão, precisamos usar a fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)R$ que aprendemos na aula passada. Substituindo então **n** por 30, obtemos:

$$a_{30} = a_1 + (30 - 1)R$$

$$a_{30} = 1 + 29 \cdot 2$$

$$a_{30} = 59$$

Vamos usar a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, fazendo também **n = 30**:

$$S = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2}$$

Substituindo os valores do primeiro e do último termo, temos:

$$S = \frac{(1 + 59) \cdot 30}{2} = \frac{60 \cdot 30}{2} = 900$$

Concluímos então que a soma dos 30 primeiros números ímpares é:

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ... + 59 = 900

EXEMPLO 2

No Exemplo 3 da aula passada, vimos que João ganhava R$ 70,00 em janeiro de certo ano e passou a receber um aumento de R$ 4,00 todos os meses. Desejamos saber agora qual foi o total que ele recebeu em dois anos de trabalho, ou seja, até dezembro do ano seguinte.

Solução: Nós vimos que o salário de João forma uma progressão aritmética de razão 4. O primeiro termo é 70 e o vigésimo quarto (24°) termo foi calculado.

a_1	a_2	a_3	....	a_{24}
70	74	78	....	162

Vamos agora somar todos esses valores usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. Com 24 parcelas, a fórmula fica assim:

$$S = \frac{(a_1 + a_{24}) \cdot 24}{2}$$

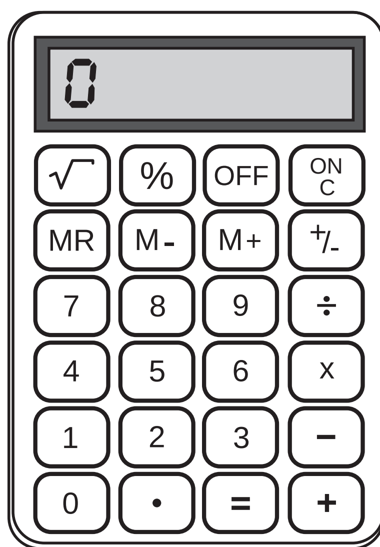
Substituindo os valores do primeiro termo e do último, temos:

$$S = \frac{(70 + 162) \cdot 24}{2} = 2.784$$

Concluímos que João ganhou, ao longo dos dois anos, um total de **R$ 2.784,00**.

A progressão aritmética na máquina de calcular

Hoje em dia, todos nós usamos uma máquina simples para facilitar nossos cálculos: a máquina de calcular. Além de realizar as quatro operações (soma, subtração, multiplicação e divisão), a máquina calcula raiz quadrada e tem memória.



A maioria dessas calculadoras é capaz de mostrar, com muita facilidade, os termos de uma progressão aritmética qualquer. Como exemplo, consideremos a progressão aritmética de razão R = 7, começando em $a_1 = 9$. Para visualizar quantos termos você quiser, digite:

[9] [+] [7] [=] [=] [=] [=] [=] ...

A primeira vez que você apertar a tecla [=] o visor mostrará 16, que é o segundo termo da progressão. Continuando a apertar a tecla [=] diversas vezes, o visor mostrará os termos seguintes da progressão: 23, 30, 37, 44 etc.

A máquina de calcular também soma os termos de uma progressão aritmética. Se não forem muitos os termos que precisamos somar, o uso da calculadora é bastante eficiente. Vamos mostrar então como obter a soma dos 5 primeiros termos de uma PA, cujo primeiro termo é 15,86 e cuja razão é 0,17.

Para obter os 5 termos, procedemos como no exemplo anterior. Devemos apenas, após cada termo que aparecer no visor, apertar a tecla [M+]. Isto faz com que os termos da progressão sejam acumulados na memória da calculadora. Depois que você apertar pela quinta vez a tecla [M+], aperte a tecla [MR] e a soma dos 5 termos da progressão aparecerá no visor.

O esquema da operação que vamos fazer é o seguinte:

[a_1] [M+] [+] [R] [=] [M+] [=] [M+] [=] [M+] [=] [M+] [MR]

Iniciando com $a_1 = 15{,}86$ e com R = 0,17, e procedendo como indicamos acima, encontraremos, para a soma dos 5 termos da progressão, o valor 81.

Exercícios

Exercício 1

Dada a progressão: 5, 16, 27, 38, ..., calcule:

a) o vigésimo (20º) termo;

b) a soma dos 20 primeiros termos.

Exercício 2

Calcule a soma de todos os números ímpares de dois algarismos.

Sugestão: Os números ímpares de dois algarismos formam a progressão 11, 13, 15, 17, ..., 99. É preciso saber ***quantos*** termos ela possui. Para isso, ultilize a fórmula do termo geral: $\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) R}$, com $\mathbf{a_1 = 11}$ **e** $\mathbf{a_n = 99}$. O valor de **n** que você encontrar é o número de termos da progressão. Ultilize então a fórmula da soma.

Exercício 3

Calcule a soma dos 25 primeiros termos da PA:
100, 94, 88, 82, ...

Exercício 4

Um corredor planejou seu treinamento da seguinte forma: pretende correr 5 km no primeiro dia e depois ir aumentando a distância em 500 m todos os dias.

a) Quanto ele estará correndo no trigésimo (30º) dia do treinamento?

b) Nesses 30 dias, qual foi a distância total que ele percorreu?

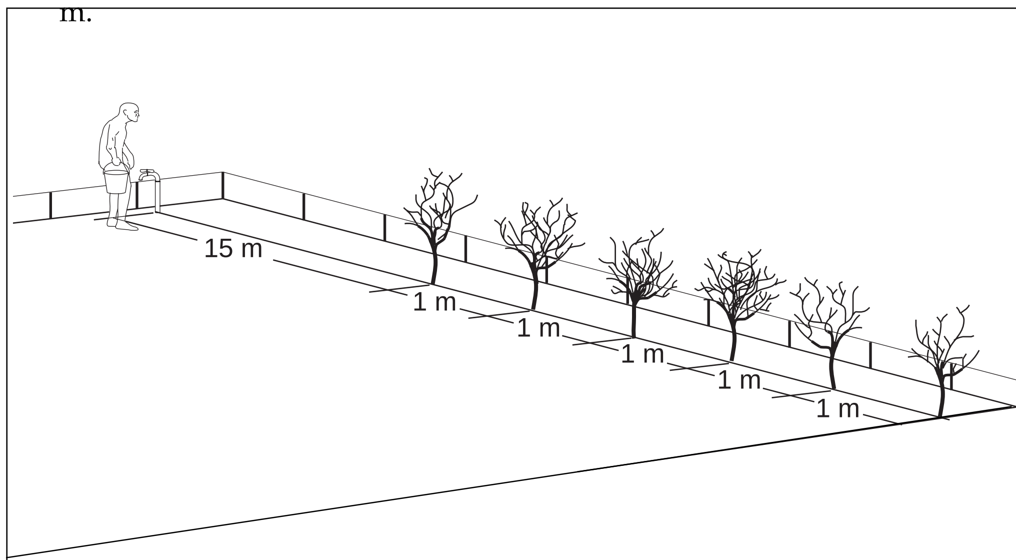
Sugestão: Construa uma PA da seguinte forma a_1 = 5 km, a_2 = 5,5 km etc. Calcule a_{30} pela fórmula do termo geral e depois some todos os termos.

Exercício 5

Qual é a soma de todos os múltiplos de 5 que possuem três algarismos?

Exercício 6

Em uma casa de campo existem, ao longo da cerca, uma torneira e 18 roseiras. A torneira está a 15 m da primeira roseira e o espaço entre as roseiras é de 1 m.



O jardineiro tem apenas um balde. Ele enche o balde na torneira, rega a primeira roseira, volta para encher o balde, rega a segunda roseira, e assim por diante. Após regar a décima oitava (18ª) roseira ele retorna para deixar o balde junto à torneira. Qual foi a distância total percorida pelo jardineiro?

AULA

35

Progressões geométricas

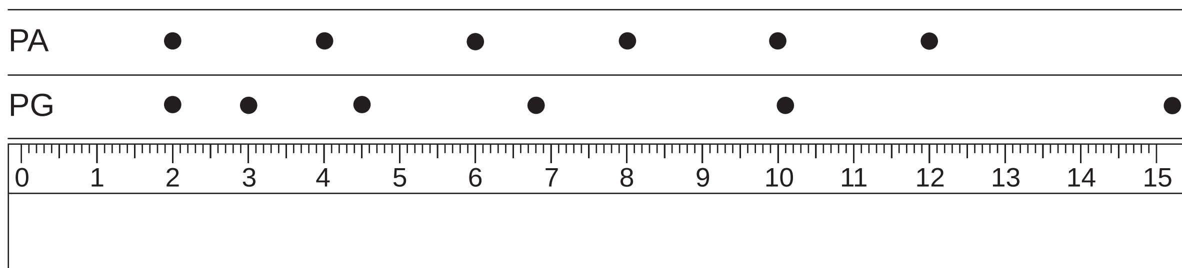
Introdução

Nesta aula, vamos abordar outra importante seqüência: a ***progressão geométrica***. É possível que você já tenha ouvido alguém preocupado com o número de habitantes do nosso planeta dizer a seguinte frase: “ *A produção de alimentos cresce em progressão aritmética enquanto a população mundial cresce em progressão geométrica*”.

O que essa frase significa?

A primeira parte da frase diz que o aumento da produção de alimentos é ***constante***, ou seja, a cada ano aumenta do mesmo valor. A segunda parte da frase fala de uma seqüência cujo crescimento é ***cada vez mais rápido***.

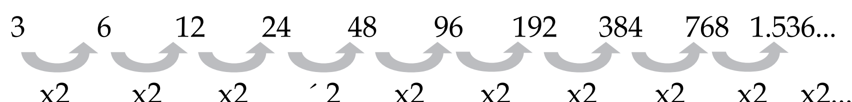
Para que você tenha uma primeira idéia do que vamos estudar, mostramos, no desenho seguinte, alguns termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica, situados sobre uma régua. Observe o crescimento constante da progressão aritmética e o crescimento, ***cada vez mais rápido***, da progressão geométrica.



Nossa aula

Progressão geométrica (ou simplesmente **PG**) é uma seqüência de números não nulos em que cada um deles, ***multiplicado*** por um número fixo, fornece o próximo elemento da seqüência. Esse número fixo chama-se ***razão***, e os elementos da seqüência são os ***termos*** da progressão geométrica.

Por exemplo, vamos obter os termos de uma progressão geométrica de razão 2, partindo do número 3.



Observe como o crescimento é rápido.

Os termos da progressão geométrica são representados, como em qualquer seqüência, por $a_1, a_2, a_3, ... , a_n$, e a razão será representada pela letra **q**. Assim, no exemplo anterior, temos $a_1=3$, $a_2=6$, $a_3=12$ etc. e $q = 2$.

Se cada termo da PG ***multiplicado*** pela razão dá o termo seguinte, então podemos afirmar que:

A razão da PG é igual a qualquer termo dividido pelo anterior.

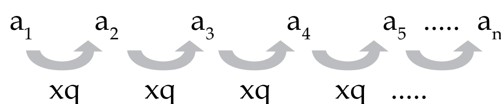
No nosso estudo, vamos considerar apenas progressões geométricas de ***termos positivos***. São as que têm interesse prático e ocorrem em diversos fenômenos naturais.

Observe três exemplos que mostram a classificação das progressões geométricas:

- $a_1 = 2, q = 5$
  PG: 2, 10, 50, 250, 1.250, ...
  É uma progressão ***crescente***.
- $a_1 = 8, q = \frac{1}{2}$
  PG: $8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} ...$
  É uma progressão ***decrescente***.
- $a_1 = 3, q = 1$
  PG: 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...
  É uma progressão ***estacionária***.

Pelo que vimos acima, concluímos que, se a razão for maior que 1, a progressão geométrica é crescente e, se a razão for um número entre 0 e 1, a progressão é decrescente.

Vamos agora obter uma fórmula para determinar qualquer termo de uma PG a partir do primeiro termo e da razão. Observe então uma progressão geométrica qualquer:



A partir da definição de PG, temos que $a_2 = a_1 . q$.

O terceiro termo é $a_3 = a_2 . q = a_1 . q . q = a_1 . q^2$. O quarto termo é $a_4 = a_3 . q = a_1 . q^2 . q = a_1 . q^3$ e assim por diante.

$$a_2 = a_1 . q$$
$$a_3 = a_1 . q^2$$
$$a_4 = a_1 . q^3$$
$$a_5 = a_1 . q^4$$
....

Para obter então o termo de ordem **n**, devemos multiplicar o primeiro termo pela razão n-1 vezes, ou seja,

Fórmula do termo geral

$$\mathbf{a_n = a_1 . q^{n-1}}$$

EXEMPLO 1

Determinar o 12º termo da PG 7, 14, 28, ...

Como a razão da PG é igual a qualquer termo dividido pelo anterior, temos que:

$$q = \frac{14}{7} = 2.$$

Para calcular o 12º termo dessa progressão, substituímos **n** por 12 na fórmula do termo geral. Temos então:

$$a_{12} = a_1 . q^{11}$$

Substituindo os valores do primeiro termo e da razão, encontramos:

$$a_{12} = 7 . 2^{11}$$
$$a_{12} = 7 . 2.048 = 14.336$$

EXEMPLO 2

Existem bactérias que se reproduzem de forma extremamente rápida. Um exemplo é a bactéria que causa a sífilis (chamada *treponema pallidum*): cada uma delas se transforma em 8 iguais no período de 1 hora.
Se uma bactéria desse tipo começa a se reproduzir, quantas elas serão 12 horas depois, supondo que nenhuma delas tenha morrido?

Solução: A população de bactérias forma uma progressão geométrica:

momento inicial	$\rightarrow$	$a_1 = 1$
1 hora depois	$\rightarrow$	$a_2 = 8$
2 horas depois	$\rightarrow$	$a_3 = 64$

....

Vemos então que, 12 horas depois, devemos calcular o 13º termo da progressão geométrica com $a_1 = 1$ e $q = 8$. Aplicando novamente a fórmula do termo geral, com $n = 13$, temos:

$$a_{13} = a_1 . q^{12}$$

Substituindo os valores do primeiro termo e da razão, encontramos:

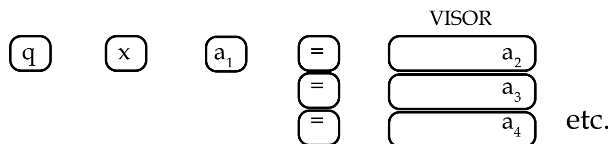
$$a_{13} = 1 . 8^{12}$$

Esse resultado dá o incrível número **68.719.476.736**, ou seja, mais de 68 bilhões de bactérias!

A PG na calculadora

A maioria das calculadoras simples é capaz de mostrar no visor os termos de uma progressão geométrica de forma bastante prática. Basta digitar a razão, o sinal de multiplicação, o primeiro termo e a tecla (=) sucessivas vezes.

Os termos da PG vão aparecendo no visor:



Por exemplo, para obter diversos termos da PG de razão 3 com primeiro termo 2, digite, nesta ordem:

3 x 2 = = = = ...

Você verá então os seguintes números aparecerem no visor:

6 18 54 162 486 1.458 4.374 13.122

EXEMPLO 3

João investiu R$ 500,00 em ações de uma empresa.
Por infelicidade, esse dinheiro sofreu desvalorização de 5% todos os meses.
Quanto João ainda tinha no fim de 1 ano?

Quem perde 5% fica com 95% do que tinha antes.

$$95\% = \frac{95}{100} = 0,95$$

Se ele tinha R$ 500,00, um mês depois passou a ter 500 . 0,95 = 475, ou seja, ele passou a ter apenas 95% do que tinha antes.
O raciocínio continua igual. Se ele agora tem R$ 475,00, no mês seguinte ele passará a ter 475 . 0,95 = 451,25, ou seja, apenas 95% do que tinha. Você observou então que:

Para desvalorizar uma quantia em 5%, devemos multiplicá-la por 0,95.

O dinheiro de João forma então uma progressão geométrica decrescente:

mês inicial → $a_1 = 500$
1 mês depois → $a_2 = 500 \cdot 0,95$
2 meses depois → $a_3 = 500 \cdot 0,95^2$
....
12 meses depois: → $a_{13} = 500 \cdot 0,95^{12}$

Para encontrar esse valor, use a máquina de calcular. Digite primeiro a razão (0,95), o sinal de multiplicação, o primeiro termo (500) e, em seguida, 12 vezes a tecla (=) .
No visor aparecerá o número 270,18. Isso quer dizer que os R$ 500,00 de João foram sendo desvalorizados em 5% a cada mês e, no fim de um ano, ficaram reduzidos a **R$ 270,18**.

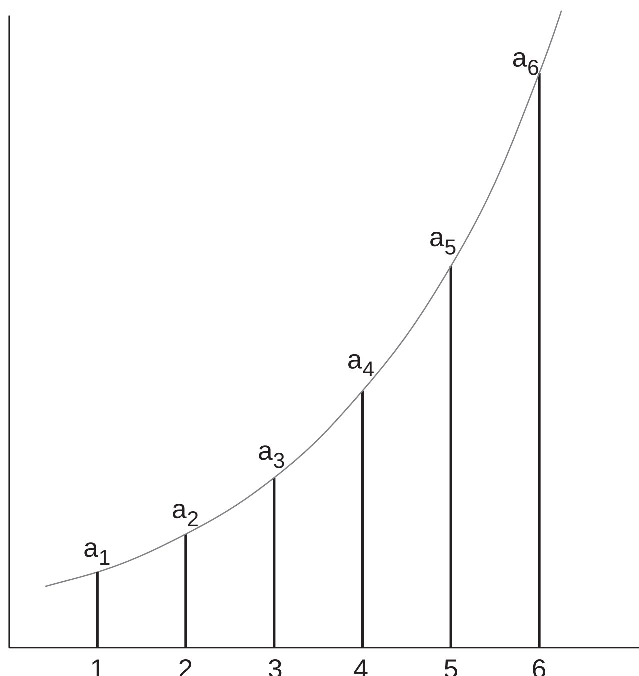
Propriedades da PG

O gráfico

Esse gráfico de barras representa a progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 1,5. O termo geral dessa PG é portanto:

$$a_n = 1 \cdot (1,5)^{n-1}$$

Repare que, na progressão aritmética (Aula 33), as extremidades das barras estão sobre uma reta. Na progressão geométrica, as extremidades das barras estão sobre uma curva. Essa curva, chamada ***curva exponencial***, será objeto de nosso estudo na Aula 58.



Progressão de três termos

Suponha inicialmente que os números **a**, **b**, **c**, formem uma progressão aritmética. Como a razão é igual a **b - a** e também igual a **c - b** temos:

$$b - a = c - b$$
$$2b = a + c$$
$$\boxed{b = \frac{a + c}{2}}$$

Dizemos então que **b** é a ***média aritmética*** entre **a** e **c**.

Agora, se os números positivos **a**, **b**, **c** formam uma progressão geométrica, então a razão é igual a **b/a** e também igual a **c/b**. Daí,

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$
$$b^2 = ac$$
$$\boxed{b = \sqrt{ac}}$$

Dizemos então, nesse caso, que **b** é ***média geométrica*** entre **a** e **c**.

Observe duas progressões, uma aritmética e outra geométrica, ambas com três termos.

PA: 4, 10, 16, → 10 é média aritmética entre 4 e 16.

PG: 4, 8, 16, → 8 é média geométrica entre 4 e 16.

Exercício 1

Escreva os 8 primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é 5 e cuja razão é 2.

Exercício 2

Calcule o valor de **x** em cada uma das progressões geométricas abaixo:

a) 4, 12, **x**
b) 2, **x**, 50
c) **x**, 6, 9

Exercício 3

Uma pequena empresa está em desenvolvimento, e seu faturamento aumenta 20% todos os meses. Se em janeiro ela faturou R$ 7.400,00, quanto ela deverá faturar em outubro do mesmo ano?
Sugestão: Se o faturamento em certo mês é **x**, então no mês seguinte será 20% maior, ou seja,

$$x + \frac{20}{100} \cdot x = x + 0{,}2x = (1 + 0{,}2)\,x = 1{,}2x$$

Esse cálculo mostra que, para conhecer o faturamento do mês seguinte, basta ***multiplicar*** o faturamento atual por 1,2. Portanto, os faturamentos formam uma progressão geométrica de razão 1,2.

janeiro → $a_1 = 7.400$
fevereiro → $a_2 = 7.400 \cdot 1{,}2$
março → $a_3 = 7.400 \cdot 1{,}2^2$
....
outubro → $a_{10} = ?$

Use a máquina de calcular para determinar o faturamento de outubro.

Exercício 4

O número **x** é positivo e os números **8**, **x** e **x + 6** formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Calcule **x**.

Exercício 5

Uma indústria começou a funcionar em 1980 e aumentou sua produção em 10% a cada ano. Em que ano a produção será, pela primeira vez, maior que o dobro da inicial?
Sugestão: Se a produção em certo ano é **x**, no ano seguinte será 10% maior, ou seja,

$$x + \frac{10}{100}\,x = x + 0{,}1x = (1 + 0{,}1)\,x = 1{,}1x$$

Então, para calcular a produção do ano seguinte, basta multiplicar a produção atual por 1,1.
Considere um valor qualquer para a produção inicial, por exemplo, 100. Construa uma PG de razão 1,1 e, com auxílio da máquina de calcular, verifique quando essa produção passará de 200.

Exercício 6

O protozoário chamado *plasmodium vivax* é um dos causadores da malária. Ele se reproduz muito rápido. No espaço de um dia, cada um deles se transforma em 4 iguais.

Se um deles penetra no organismo de uma pessoa, quantos eles serão (aproximadamente) 10 dias depois?

Exercício 7

A partir de 1970 a incidência de certa doença passou a diminuir de 40% a cada ano. Em que ano o número de doentes foi de cerca de 1% do número registrado em 1970?

Sugestão: Construa a progressão geométrica abaixo:

ANO	1970	1971	1972	1973	....
Nº DE DOENTES	100	60	36		

e, com auxílio da máquina de calcular, verifique em que ano aparece um número próximo de 1.

AULA

36

Somando os termos das progressões geométricas

Introdução

Quando estudamos as progressões aritméticas (Aula 34), encontramos uma fórmula bastante prática para calcular a soma de qualquer quantidade de termos. Vamos fazer a mesma coisa nesta aula com as progressões geométricas.

Imagine, por exemplo, a soma:

8 + 24 + 72 + 216 + 648 + 1.944 + 5.832 + 17.496 + 52.488

As parcelas formam uma progressão geométrica de razão 3, começando em 8. Será possível obter o resultado sem precisar somar todas as parcelas? A resposta é ***sim***, como veremos a seguir.

Nossa aula

Vamos representar por S a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão **q**. Para facilitar a compreensão, vamos considerar uma PG com, por exemplo, sete termos. Você perceberá que a dedução da fórmula da soma é exatamente a mesma, qualquer que seja o número de termos. Seja então:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \qquad \textbf{(1)}$$

Agora, vamos multiplicar todos os termos dessa igualdade pela razão da PG:

$$Sq = a_1q + a_2q + a_3q + a_4q + a_5q + a_6q + a_7q$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$Sq = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_7q \qquad \textbf{(2)}$$

Observe que cada termo da PG multiplicado pela razão resulta no próximo, ou seja, $\mathbf{a_1q = a_2}$, $\mathbf{a_2q = a_3}$ e assim por diante.

Em seguida, vamos subtrair as igualdades **(2)** e **(1)**. Veja:

$$\begin{array}{lcl} Sq & = & + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_7q \\ -S & = & -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 - a_7 \\ \hline Sq - S & = & -a_1 + a_7q \end{array}$$

Repare que os outros termos foram cancelados. Como $\mathbf{a_7}$ é igual a $\mathbf{a_1q^6}$, temos:

$$Sq - S = a_1q^6q - a_1$$

Colocando em evidência S do lado esquerdo e $\mathbf{a_1}$ do lado direito encontramos:

$$S(q - 1) = a_1 (q^7 - 1)$$

ou

$$S = \frac{a_1(q^7 - 1)}{q - 1}$$

Essa fórmula calcula a soma de sete termos de uma PG cujo primeiro termo é $\mathbf{a_1}$ e cuja razão é **q**. Temos então que, no caso geral, a soma dos **n** termos de uma progressão é dada por:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

EXEMPLO 1

Calcular, com auxílio da fórmula, a soma que apareceu na introdução da aula.

Solução: A soma que você vê na introdução desta aula tem 9 parcelas. Essas parcelas formam uma progressão geométrica com

$a_1 = 8$ e $q = \frac{24}{8} = 3$

Então, fazendo na fórmula as substituições $a_1 = 8$, $q = 3$ e $n = 9$, encontramos:

$$S = \frac{8\,(3^9 - 1)}{3 - 1} \quad \frac{8\,(19.683 - 1)}{2}$$

$$= 4 \,.\, 19.682$$

$$= \mathbf{78.728}$$

Aí está o resultado da soma proposta.

Usando a máquina de calcular

Para utilizar a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, precisamos calcular o número $\mathbf{q^n}$ que nela aparece. Quando a razão não é um número inteiro ou quando **n** é grande, essa conta é trabalhosa. Devemos usar a calculadora da seguinte forma:

[q] [×] [=] [=] [=] ... [=] → q^n

n – 1 vezes

Assim, no exemplo anterior, para calcular 3^9, digitamos:

[3] [×] [=] [=] [=] ... [=] → 19.683

8 vezes

EXEMPLO 2

Uma indústria iniciou suas atividades produzindo 5.000 objetos por ano e, a cada ano, a produção aumentou em 10% em relação ao ano anterior. Qual foi o total de objetos produzidos em 10 anos de atividade?

Solução: Repare que se, em um ano qualquer, a produção foi de **x** objetos, então, no ano seguinte, será de:

$$x + 10\% \text{ de } x =$$

$$= x + \frac{10}{100} \cdot x =$$

$$= x + 0{,}1 \cdot x =$$

$$= x\,(1 + 0{,}1) =$$

$$= x \cdot 1{,}1$$

Assim, se a produção em um ano é igual à do ano anterior ***multiplicada*** por 1,1, temos que as produções anuais formam uma progressão geométrica de razão 1,1.

$a_1 = 5.000$
$a_2 = 5.000 \cdot 1{,}1$
$a_3 = 5.000 \cdot 1{,}1$
.... etc.

Para calcular o número total de objetos produzidos em 10 anos, usamos nossa fórmula com $a_1 = 5.000$, $q = 1{,}1$ e $n = 10$

$$S = \frac{5.000(1{,}1^{10} - 1)}{1{,}1 - 1}$$

O número $1{,}1^{10}$ é calculado com auxílio da máquina de calcular, como mostramos anteriormente. Lembramos, ainda, que devemos fazer uma ***aproximação*** do resultado que vemos no visor, porque o número de casas decimais já é grande demais. Temos então:

$$S = \frac{5.000(2{,}5937 - 1)}{1{,}1 - 1}$$

$$S = \frac{5.000 \cdot 1{,}5937}{0{,}1}$$

$$S = 79.685$$

Essa indústria produziu, em 10 anos de atividade, aproximadamente **79.690** objetos. Repare que, no cálculo de $1{,}1^{10}$, nossa aproximação foi para ***menos***. Então, o número real de objetos produzidos foi, certamente, um pouco superior ao calculado. Portanto, o número 79.690 é uma ***estimativa***, que sabemos estar próxima da realidade.

EXEMPLO 3

Em certa região do país, a pesca predatória fez com que a produção de pescados caísse em 20% a cada ano. Se, em 1991, foram pescados nessa região 2,5 toneladas de peixe, qual foi a produção total de 1991 até 1995?

Solução: Se a produção em certo ano foi de **x** toneladas, então, no ano seguinte, será 20% menor, ou seja, será:

$$x - 20\% \text{ de } x =$$

$$= \quad x - \frac{20}{100} \cdot x =$$

$$= \quad x - 0{,}2x =$$

$$= \quad x\,(1 - 0{,}2) =$$

$$= \quad x \cdot 0{,}8$$

Logo, se a produção em cada ano é igual à do ano anterior multiplicada por 0,8, temos a seguinte progressão:

1991 → $a_1 = 2{,}5$ toneladas

1992 → $a_2 = 2{,}5 \cdot 0{,}8$

1993 → $a_3 = 2{,}5 \cdot 0{,}8$

1994 → $a_4 = 2{,}5 \cdot 0{,}8$

1995 $a_5 = 2{,}5 \cdot 0{,}8^4$

Para somar esses resultados, podemos usar a nossa fórmula:

$$S = \frac{2{,}5(0{,}8^5 - 1)}{o{,}8 - 1} =$$

$$= \frac{2{,}5(0{,}32768 - 1)}{0{,}8 - 1} =$$

$$= \frac{2{,}5(-0{,}67232)}{-0{,}2} =$$

$$= 8{,}404$$

Concluímos então que, nesses 5 anos, foram pescados, aproximadamente, **8,4 toneladas** de peixe.

A PG decrescente

Observe que, quando um número entre 0 e 1 é elevado a potências cada vez maiores, vai sempre diminuindo, como se pode ver no exemplo abaixo:

$$
\begin{aligned}
0{,}4^1 &= 0{,}4 \\
0{,}4^2 &= 0{,}16 \\
0{,}4^3 &= 0{,}064 \\
0{,}4^4 &= 0{,}0256 \\
0{,}4^5 &= 0{,}01024
\end{aligned}
$$

e assim por diante. Os resultados diminuem sempre. Para que você tenha uma idéia da rapidez com que eles diminuem, calculamos $0{,}4^{16}$ e o resultado foi (aproximadamente) 0,000000429. Portanto, quando **q** está entre 0 e 1, as potências de **q** diminuem quando o expoente aumenta. Elas se tornam ***cada vez mais próximas de zero***. Assim, se $\mathbf{0 < q < 1}$, e se o número de termos da PG é muito grande, o termo $\mathbf{q^n}$ que aparece na fórmula é tão pequeno que, na prática, pode ser desprezado. A fórmula então fica assim:

$$S = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Retirando o termo q^n, ficamos com:

$$\lim S = \frac{a_1\ (-1)}{q - 1}$$

$$\boxed{\lim S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Esse resultado chama-se ***limite da soma da PG decrescente***. Daí o símbolo l**im S** colocado no lugar de **S**.

Ele fornece um resultado muito próximo da soma dos termos da PG quando o número de parcelas é muito grande.

Quanto maior o número de parcelas, mais a soma ficará próxima de lim S.

Por exemplo, considere a soma:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots =$$

As parcelas formam uma PG com $a_1 = 1$ e $q = 0{,}5$.

Se somarmos 20 parcelas, encontraremos como resultado:

$$S = \frac{1(0{,}5\quad - 1)}{0{,}5 - 1} \cong 1{,}999998$$

enquanto que a fórmula do ***limite da soma*** nos diz que:

$$\lim\ S = \frac{1}{1 - 0{,}5} = \frac{1}{0{,}5} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Portanto, quanto maior for o número de parcelas, mais próxima de 2 estará a soma.

Exercícios

Exercício 1

Calcule a soma S = 1 + 2 + 4+ 8 + ... , com 10 parcelas.

Exercício 2

Calcule a soma S = 2 + 10 + 50 + 250 + ... , com 8 parcelas.

Exercício 3

Calcule a soma $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$, com 6 parcelas.

Exercício 4

João ganhou em janeiro R$ 70,00 e, a partir daí, passou a ganhar um aumento de 10% todos os meses. Qual foi o total que ele ganhou em todo esse ano?

Sugestão: Considere a PG formada pelos salários de João:

$a_1 = 70$
$a_2 = 70 \cdot 1{,}1$
$a_3 = 70 \cdot 1{,}1$
....

Use a fórmula da soma para obter o resultado.

Exercício 5

Uma loja de eletrodomésticos vende uma televisão de duas maneiras:

a) à vista por R$ 540,00;

b) pelo "plano maluco", no qual você paga prestações durante toda sua vida, sendo a primeira de R$ 256,00 e cada uma das outras igual à metade da anterior.

Qual delas você deve preferir?
Sugestão: Calcule o limite da soma das prestações do "plano maluco".

AULA

37

A Matemática e o dinheiro

Introdução

Muita gente pensa que a Matemática, em relação ao dinheiro, só serve para fazer troco e para calcular o total a pagar no caixa. Não é bem assim. Sem a Matemática, não conseguiríamos entender nossos contracheques, calcular nossos aumentos de salário, perceber os produtos que aumentaram demasiadamente de preço etc...

Nesta aula, vamos conhecer as porcentagens, os juros compostos e diversas outras coisas que fazem parte do nosso dia-a-dia, como aumentos e descontos. Aconselhamos que você confira os cálculos desta aula usando uma calculadora, a qual também deverá ser usada para a resolução dos exercícios.

Nossa aula

Porcentagens

Vamos começar com um exemplo.

Se o preço de um artigo era de R$ 4,00 e passou a ser de R$ 5,00, o aumento de preço foi de R$ 5,00 - R$ 4,00 = R$ 1,00. Portanto, o aumento foi de R$ 1,00 sobre um preço de R$ 4,00, e a fração que representa o aumento do preço, chamada de ***taxa de aumento***, é $\frac{1}{4}$. Comumente preferimos representar essas frações em centésimos, que são chamados de ***por cento*** e representados por %. Como $\frac{1}{4} = 0,25$ ou seja, 25 centésimos, a taxa de aumento do preço foi de 25%.

Vejamos mais alguns exemplos.

EXEMPLO 1

O preço de um artigo era de R$ 36,00 e sofreu uma diminuição de 15%. Para quanto passou?

Solução: Como 15% = 0,15, a diminuição de preço foi de 0,15 . 36 = 5,40, ou seja, o novo preço é R$ 36,00 - R$ 5,40 = **R$ 30,60**.

EXEMPLO 2

Uma loja oferece um desconto de 20% nos preços, para pagamento à vista. Quanto custa, à vista, um artigo cujo preço é de R$ 45,00?
Solução: O desconto é de 0,20 · 45 = 9. O preço para pagamento à vista é R$ 45,00 - R$ 9,00 = **R$ 36,00**.

Aumentos e descontos sucessivos

Imagine que um produto sofra um aumento de 30% em um mês e um de 20% no mês seguinte. Qual será a taxa de aumento total que sofrerá o preço do produto nesses dois meses?

Essa é uma pergunta interessante, porque a maioria das pessoas pensa, erroneamente, que a taxa de aumento total foi de 30% + 20% = 50%. Se o preço do produto era de 100 (sempre podemos tomar o preço igual a 100; basta tomar como unidade de preço um centésimo do preço do produto), o primeiro aumento foi de 30% de 100, isto é, de 0,30 . 100 = 30, o que elevou o preço do produto para 100 + 30 = 130; o segundo aumento foi de 20% de 130, isto é, de 0,20 . 130 = 26, o que elevou o preço do produto para 130 + 26 = 156. O aumento total foi de 156 - 100 = 56 sobre o preço de 100. A taxa total de aumento foi de

$$\frac{56}{100} = 0,56 = 56\%$$

Vejamos mais alguns exemplos:

EXEMPLO 3

O preço de um artigo sofreu dois descontos sucessivos, de 30% e de 20%. Qual foi a taxa total de desconto?
Solução: Se o preço do artigo era 100, o primeiro desconto foi de 0,30 . 100= 30, o que baixou o preço para 100 - 30 = 70; o segundo desconto foi de 0,20 . 70 = 14, o que mudou o preço para 70 - 14 = 56. A redução total do preço foi de 100 - 56 = 44 sobre um preço de 100. A taxa total de desconto foi de

$$\frac{44}{100} = 0,44 = 44\%$$

EXEMPLO 4

Um artigo é vendido, em uma promoção, com um desconto de 30%. Encerrada a promoção, o artigo retorna ao preço normal. Em quantos por cento aumenta o preço do artigo?
Solução: Se o preço era 100, o preço com desconto é de:

100 - 0,30 . 100 = 100 - 30 = 70

Para retornar ao preço normal, ele deve sofrer um aumento de 30 em relação a um preço de 70. A taxa de aumento é de

$$\frac{30}{70} \cong 0,43 = 43\%$$

Juros

A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C_0 (chamado de ***principal***), empresta-o a outra pessoa por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C_0 de volta, acrescido de uma remuneração **J** pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de ***juro***. A soma $C_0 + J$ é chamada de ***montante***. A razão $i = \frac{J}{C_0}$, que é a taxa de aumento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de ***taxa de juros***.

Por exemplo, se Pedro tomou um empréstimo de R$ 100,00 e, dois meses depois, pagou R$ 120,00, os juros pagos por Pedro são de R$ 20,00, e a taxa de juros é $\frac{20}{100} = 0,20 = 20\%$ ao bimestre.

O principal, que é a dívida inicial de Pedro, é igual a R$ 100, e o montante, que é a dívida de Pedro na época do pagamento, é igual a R$ 120,00.

Note que Pedro e quem lhe emprestou o dinheiro concordaram que R$ 100,00 no início do referido bimestre têm o mesmo valor que R$ 120,00 no final do referido bimestre.

É importante notar que o valor de uma quantia depende da época à qual ela se refere. Na próxima aula este fato será abordado com mais detalhes.

Agora vamos falar um pouco sobre juros compostos. Imagine que Paulo tomou um empréstimo de R$ 100,00, a juros de taxa 10% ao mês. Após um mês, a dívida de Paulo será acrescida de 0,10 . 100, ou seja, R$ 10,00 de juros, pois $J = i\ C$, passando a R$ 110,00.

Se Paulo e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por R$ 121,00, pois os juros relativos ao segundo mês serão de 0,10 . 110, ou seja, R$ 11,00.

Esses juros aqui calculados são chamados de ***juros compostos***. Mais precisamente, no regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

Um fato extremamente importante é que:

> ***No regime de juros compostos de taxa*** i,
> ***um principal*** C_0 ***transforma-se, após*** n ***períodos de tempo,***
> ***em um montante*** $C_n = C_0\,(1 + i)^n$.

Com efeito, se um capital **C** recebe, em um período de tempo, juros de taxa **i**, ele se transforma, ao fim do período, em $C + i\,C = (1 + i)\,C$. Ou seja, após cada período de tempo, a dívida sofre uma multiplicação por 1 + i. Então, depois de dois períodos de tempo, a dívida inicial C_0 sofrerá duas multiplicações por 1 + i, isto é, ficará multiplicada por $(1 + i)^2$.

Prosseguindo nesse raciocínio, a dívida em **n** períodos de tempo será igual à dívida inicial multiplicada por $(1 + i)^n$, ou seja, será igual a:

$$C_n = C_0\,(1 + i)^n$$

EXEMPLO 5

Cristina toma um empréstimo de R$ 150,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Cristina três meses depois?

Solução: Temos que o principal é C_0 = 150, a taxa de juros é i = 0,12 e n = 3. O montante da dívida será:

$$C_3 = C_0\ (1 + i)^3 =$$
$$= 150 \,.\, (1 + 0{,}12)^3 =$$
$$= 150 \,.\, 1{,}12^3 =$$
$$= 150 \,.\, 1{,}404928 =$$
$$= 210{,}7392$$

Portanto, a dívida de Cristina ao fim desses três meses será de **R$ 210,7**4.

EXEMPLO 6

Uma inflação mensal de 3% ao mês equivale a uma inflação anual de quanto?

Solução: A taxa de inflação é a taxa média de elevação dos preços dos produtos e serviços. Se o preço médio inicial é 100, após 12 meses ele será igual a 100 **.** $(1 + 0{,}03)^{12}$. Com auxílio de uma calculadora, como vimos na Aula 35, obtemos 142,58, aproximadamente. O aumento médio foi de 42,58 sobre um preço de 100, isto é, a taxa de inflação anual foi de 42,58%, aproximadamente.

Exercícios

Exercício 1

O quilo do açúcar custava R$ 0,48 e passou a custar R$ 0,58 enquanto o pacote de meio quilo de café custava R$ 2,80 e passou a custar R$ 3,20. Quais foram os aumentos porcentuais desses dois produtos? Qual deles aumentou mais?

Exercício 2

O salário mensal bruto de Severino é de R$ 120,00. Se ele é descontado em 8% para a Previdência Social, qual é o seu salário líquido?
Observação: Salário líquido é o salário bruto menos os descontos.

Exercício 3

Depois de um aumento de 15%, um televisor passou a custar R$ 460,00. Qual era o preço do televisor antes do aumento?
Sugestão: Se **x** é o preço antigo, então x + 0,15x = 460.

Exercício 4

Aumentos sucessivos de 20% e de 10% equivalem a um aumento único de quanto? E descontos sucessivos de 20% e de 10% equivalem a um desconto único de quanto?

Exercício 5

Se um artigo aumentou em 25%, de quanto ele deve diminuir para voltar ao preço antigo?

Exercício 6

Os trabalhadores de certa categoria estão reivindicando uma reposição salarial de 29% mais um aumento real de 5%. Qual é o aumento total que está sendo pleiteado?

Exercício 7

Investindo seu dinheiro a juros de 5% ao mês, qual é o rendimento trimestral que você obtém?

Sugestão: Faça o principal igual a 100 e determine o montante.

Exercício 8

Uma inflação de 15% em 4 meses é gerada por uma inflação mensal média de quanto?

Sugestão: Lembre-se de que a raiz quarta de um número pode ser obtida, na calculadora, apertando duas vezes a tecla de raiz quadrada.

AULA

38

À vista ou a prazo?

Introdução

Um dos problemas matemáticos mais comuns no dia-a-dia é a decisão entre comprar à vista ou a prazo. As lojas costumam atrair os consumidores com promoções como esta:

20% DE DESCONTO À VISTA
OU EM 3 VEZES SEM ACRÉSCIMO

Para o consumidor, qual é a melhor opção? É claro que, se ele não dispõe no momento da quantia necessária para o pagamento à vista, não há o que discutir. Mas, mesmo que ele disponha do dinheiro para comprar à vista, pode ser que ele prefira investir esse dinheiro e fazer a compra a prazo. A decisão nem sempre é a mesma para todos, como veremos nesta aula.

Nossa aula

O valor do dinheiro

Vimos, na aula passada, um fato extremamente importante: o valor de uma quantia depende da época à qual ela se refere. Por exemplo, se Pedro consegue investir seu dinheiro a juros de 5% ao mês, é indiferente para ele pagar R$ 100,00 agora ou pagar R$ 105,00 daqui a um mês; portanto, para Pedro, R$ 100,00 agora têm o mesmo valor que R$ 105,00 daqui a um mês, ou seja, ***o dinheiro vale***, ***para Pedro***, ***5% ao mês***.

Portanto, o valor do dinheiro não é o mesmo para todas as pessoas. Todas as decisões em matéria de dinheiro passam sempre por esta questão: "Quanto você consegue fazer render o seu dinheiro?"

Por exemplo, se a caderneta de poupança está rendendo 3% ao mês, então R$ 100,00 hoje valerão R$ 103,00 em um mês, R$ 106,09 depois de dois meses, R$ 109,27 depois de três meses e assim por diante. Observe ainda que valores são traduzidos por quantias iguais apenas se as quantias se referem à mesma época.

Vimos na aula passada que, no regime de juros compostos de taxa **i**, um capital principal C_0 transforma-se, após **n** períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0 (1 + i)^n$. Logo, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de **n** períodos de tempo, a uma quantia $F = A (1 + i)^n$.

Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais:

***Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por* $(1+i)^n$.**
***Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por* $(1+i)^n$.**

Todos os problemas de matemática financeira são apenas aplicações dessa fórmula fundamental, conforme mostraremos nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 1

O juro do cheque especial está em 12% ao mês. Se João ficar com saldo negativo de R$ 80,00 durante um mês, quanto terá de pagar?

Solução: Para transportar R$ 80,00 para o futuro (1 mês depois) devemos multiplicá-lo por 1 + i. Como i = 0,12, temos:

$$80\,(1 + 0{,}12) =$$
$$= 80 \cdot 1{,}12 = 89{,}60$$

Logo, João pagará **R$ 89,60** para zerar sua conta.

EXEMPLO 2

Pedro prometeu pagar a João R$ 100,00 no dia 15 de agosto. Mas, um mês antes, no dia 15 de julho, resolveu saldar sua dívida. Se eles tinham combinado um juro de 6% ao mês, quanto Pedro deverá pagar?

Solução: Pedro resolveu antecipar o pagamento. Então, a dívida de R$ 100,00 deverá ser transformada do futuro para o presente (1 mês antes). Para isso, devemos dividi-la por 1 + i. Como i = 0,06, temos:

$$\frac{100}{1+0{,}06} = \frac{100}{1{,}06} = 94{,}34$$

Logo, a dívida de R$ 100,00 em 15 de agosto poderá ser saldada em 15 de julho com um pagamento de **R$ 94,34**.

EXEMPLO 3

Geraldo tomou um empréstimo de R$ 300,00 a juros mensais de 15%. Dois meses depois, Geraldo pagou R$ 150,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Solução: Os esquemas de pagamento a seguir são equivalentes. Logo, R$ 300,00 na data 0 (zero) têm o mesmo valor de R$ 150,00 dois meses depois, mais um pagamento igual a P, na data 3. Isso é representado assim:



Para resolver o problema, devemos igualar os valores pagos e recebidos, em uma mesma época (0, por exemplo). O valor 300 já está referido à época 0. O valor 150 deve retroceder dois meses; para isso devemos dividi-lo por $(1 + i)^2$. O valor P, que devemos retroceder três meses, deverá ser dividido por $(1 + i)^3$.

Como i = 0,15, obtemos:

$$300 = \frac{150}{(1 + 0{,}15)^2} + \frac{P}{(1 + 0{,}15)^2}$$

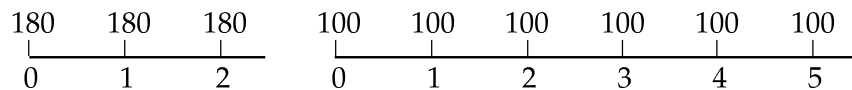
Daí, multiplicando todos os termos por $1{,}15^3$, obtemos:

$$300 \cdot 1{,}15^3 = 150 \cdot 1{,}15 + P$$
$$456{,}2625 = 172{,}5 + P$$
$$P = 456{,}2625 - 172{,}5 \cong 283{,}76$$

O último pagamento foi de **R$ 283,76**.

EXEMPLO 4

Telma tem duas opções de pagamento na compra de um vídeo: três prestações mensais de R$ 180,00 cada, ou seis prestações mensais de R$ 100,00 cada.Se o dinheiro vale 10% ao mês para Telma, o que ela deve preferir?
Solução: As alternativas de pagamento estão representadas deste modo:



Para resolver o problema, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2.
Temos na primeira opção:

$$V_1 = 180\,(1 + 0{,}10)^2 + 180\,(1 + 0{,}10) + 180 = 595{,}80$$

e, na segunda opção,

$$V_2 = 100\,(1 + 0{,}10)2 + 100\,(1 + 0{,}10) + 100 + \frac{100}{1+0{,}10} + \frac{100}{(1+0{,}10)^2} + \frac{100}{(1+0{,}10)^3} \cong 579{,}69$$

Logo, Telma deve preferir o pagamento em seis prestações, porque o valor total é menor.

Você deve ter observado que a matemática financeira faz o dinheiro viajar pelo tempo. Podemos transportar uma quantia do presente para o futuro ou do futuro para o presente. Mas os cálculos variam de pessoa para pessoa. Tudo depende de quanto cada um consegue fazer render o seu dinheiro. No exemplo anterior, Telma tinha um ótimo investimento, que lhe dava 10% ao mês, e todos os cálculos foram feitos em função disso. Continue aprendendo com os próximos exemplos.

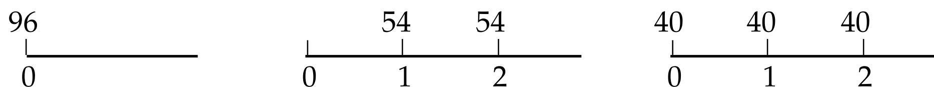
EXEMPLO 5

João tem três opções de pagamento na compra de vestuário:

a) À vista, com 20% de desconto.
b) Em duas prestações mensais iguais, com desconto de 10%, vencendo a primeira um mês após a compra.
c) Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para João, se o dinheiro vale, para ele, 10% ao mês?

Solução: Fixando o preço em 120 unidades, temos os três esquemas:



Comparando os valores na época 2 (por exemplo), obtemos:

a) $V_1 = 96\ (1 + 0{,}10)^2 = 116{,}16$
b) $V_2 = 54\ (1 + 0{,}10) + 54 = 113{,}40$
c) $V_3 = 40\ (1 + 0{,}10)^2 + 40\ (1 + 0{,}10) + 40 = 132{,}40$

A melhor alternativa para João é a compra em duas prestações, e a pior é a compra em três prestações.
É interessante observar que a melhor alternativa para João pode não ser a melhor para José.
Se José é pessoa de poucas posses e compra a prazo, tendo dinheiro para comprar à vista, é provável que ele invista o dinheiro que seria usado na compra à vista em uma caderneta de poupança, que lhe renderia, digamos, 5% ao mês. Então, para ele seria indiferente comprar à vista ou a prazo com juros de 5% ao mês.
Se João é um comerciante, por exemplo, ele poderia fazer render o dinheiro a, digamos, 10% ao mês. Então, seria atrativo para João comprar a prazo com juros de 5% ao mês.
Logo, ***o dinheiro tem valores diferentes para João e para José***. A taxa de juros que representa o valor do dinheiro para cada pessoa e que é, em suma, a taxa à qual a pessoa consegue fazer render seu capital, é chamada de ***taxa mínima de atratividade***. O motivo do nome é claro: para essa pessoa, um investimento será atrativo se render, no mínimo, a essa taxa.

O exemplo a seguir mostra uma situação ocorrida no Rio de Janeiro, em uma época na qual a inflação era de cerca de 15% ao mês. Veja que absurdo!

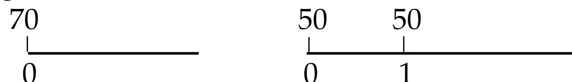
EXEMPLO 6

Uma loja oferece duas opções de pagamento:
a) À vista, com 30% de desconto.
b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira sendo p a g a

no ato da compra.

Qual a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo?

Solução: Fixando o preço em 100 unidades, temos os esquemas de pagamento a seguir:



Igualando os valores na época 1, por exemplo, obtemos:

$$\begin{aligned} 70\,(1+i) &= 50\,(1+i) + 50 \\ 20\,(1+i) &= 50 \\ 1+i &= 2{,}5 \\ i &= 1{,}5 = 150\% \end{aligned}$$

A loja cobrava o extorsivo juro de **150%** ao mês nas vendas a prazo!

O cálculo de prestações

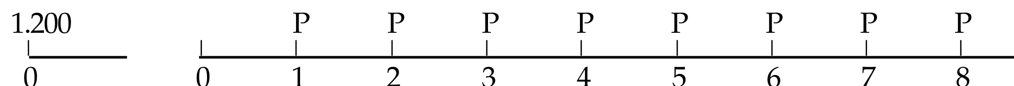
Quando compramos um artigo a prazo, efetuamos geralmente seu pagamento em uma série de prestações iguais e igualmente espaçados no tempo. Essa série de prestações é equivalente a um pagamento único, que seria o pagamento à vista.

Vamos mostrar como se faz o cálculo das prestações no próximo exemplo.

EXEMPLO 7

Um televisor, cujo preço à vista é R$ 1.200,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 9% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução: Os dois esquemas de pagamento aqui representados são equivalentes:



Igualando os valores na época 0 (zero), obtemos:

$$1.200 = \frac{P}{1,09} + \frac{P}{1,09^2} + \frac{P}{1,09^3} + \ldots + \frac{P}{1,09^9}, \quad \text{ou}$$

$$1.200 = P\left(\frac{1}{1,09} + \frac{1}{1,09^2} + \frac{1}{1,09^3} + \ldots + \frac{1}{1,09^8}\right)$$

Para facilitar, calculamos $q = \frac{1}{1,09} = 0,9174311$. Portanto, a soma que apareceu entre parênteses é $q + q^2 + q^3 + ... + q^8$, que é a soma dos termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é **q** e cuja razão também é igual a **q**.
Aplicando a nossa conhecida fórmula dos termos da PG, temos:

$$\text{Soma} = \frac{a_1 \ (q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{q(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{q^9 - q}{q - 1}$$

Calculamos na máquina $q^9 = 0,4604272$. Então, a soma da progressão geométrica será:

$$\frac{0,4604272 - 0,9174311}{0,9174311 - 1} = \frac{0,4570039}{0,0825689} = 5,5348187$$

Agora, que já calculamos a soma dos termos da progressão geométrica, podemos finalmente calcular o valor da prestação:

$$1.200 = P \ . \ 5,5348187 \qquad \text{ou}$$

$$P = \frac{1.200}{5,5348187} = 216,81$$

Concluímos que cada prestação na compra a prazo será de **R$ 216,81**.

Exercícios

Exercício 1
Você fez um empréstimo de R$ 250,00 a juros de 8% ao mês.
Quanto você deverá pagar dois meses depois?

Exercício 2
João comprou tijolos para sua construção no valor de R$ 150,00. O vendedor da loja fez a seguinte oferta: R$ 50,00 no ato da compra e R$ 100,00 dois meses depois. Se a loja cobra 10% de juros ao mês, qual seria o preço à vista que João deveria pagar pelos tijolos?

Sugestão: Transfira a dívida de R$ 100,00 do futuro para o presente.

Exercício 3
Na introdução da nossa aula mostramos duas opções de venda em certa loja. Se um artigo custa R$ 120,00. Determine:
a) o preço à vista com desconto de 20%;
b) se a loja cobra 10% de juros ao mês, qual é o valor à vista equivalente ao financiamento?

Exercício 4

Uma geladeira custa R$ 800,00 à vista e pode ser paga em três prestações mensais iguais. Se são cobrados juros de 12% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo a primeira prestação paga:

a) um mês após a compra;
b) no ato da compra;
c) dois meses após a compra.

Exercício 5

Jussara deveria efetuar seis pagamentos mensais sucessivos, de R$ 150,00 cada. Renegociou a dívida, para efetuar apenas dois pagamentos iguais, nas épocas do segundo e do quinto pagamentos. Se a taxa de juros é de 10% ao mês, qual o valor desses novos pagamentos?

Sugestão: Transfira tudo para a época do 1º pagamento. Na primeira opção esse valor seria de:

$$150+\frac{150}{1{,}1}+\frac{150}{1{,}1^2}+\ldots+\frac{150}{1{,}1^5}$$

Faça o mesmo com a segunda opção e iguale os dois resultados.

Exercício 6

Lúcia comprou um exaustor, pagando R$ 180,00 um mês após a compra e R$ 200,00 dois meses após a compra. Se são pagos juros de 25% sobre o saldo devedor, qual é o preço à vista?

Exercício 7

Uma loja, no Rio de Janeiro, oferecia, no Natal, as alternativas de pagamento:

a) pagamento de uma só vez, um mês após a compra;
b) três pagamentos mensais iguais sem juros, o primeiro no ato da compra.

Se você fosse cliente dessa loja e o dinheiro valesse para você 10% ao mês, qual seria sua opção?

Exercício 8

Investindo todo mês R$ 50,00 em um fundo de investimentos que rende 4% ao mês, qual será o montante, imediatamente após o 20º depósito?

Sugestão: Transfira tudo para a data do último depósito. O primeiro depósito sofreu 19 correções, ou seja, ficou multiplicado por $1{,}04^{19}$. O segundo depósito sofreu 18 correções, e assim por diante. Você terá de calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica.

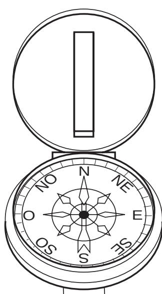
AULA

39

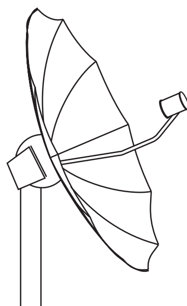
Medida de ângulos

Introdução

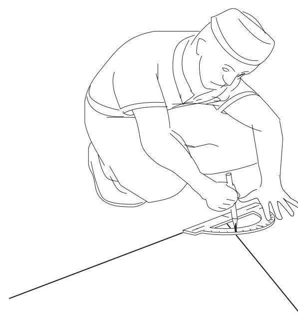
Há muitas situações em que uma pequena mudança de ângulo causa grandes modificações no resultado final. Veja alguns casos nos quais a precisão dos ângulos é fundamental:



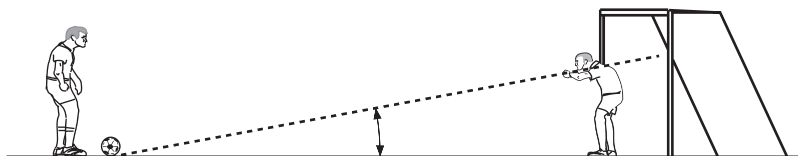
Para saber a direção a seguir



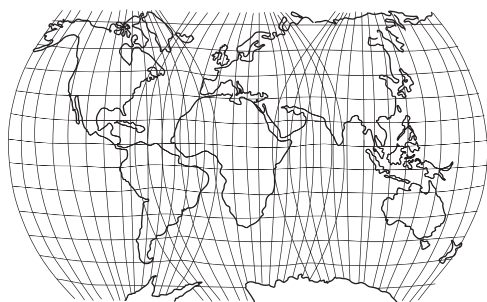
Para instalar uma antena parabólica



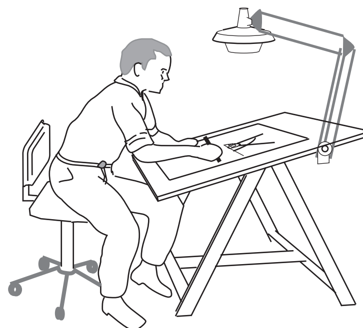
Na construção civil



No futebol



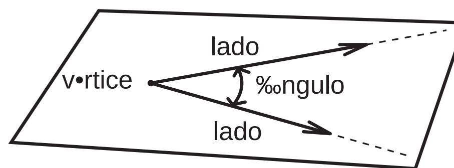
Na localização no mapa



Na arquitetura

São tantos os exemplos que você já deve estar se lembrando de outros. Mas o que é ângulo?

Ângulo é o nome que se dá à abertura formada por duas semi-retas que partem de um mesmo ponto.

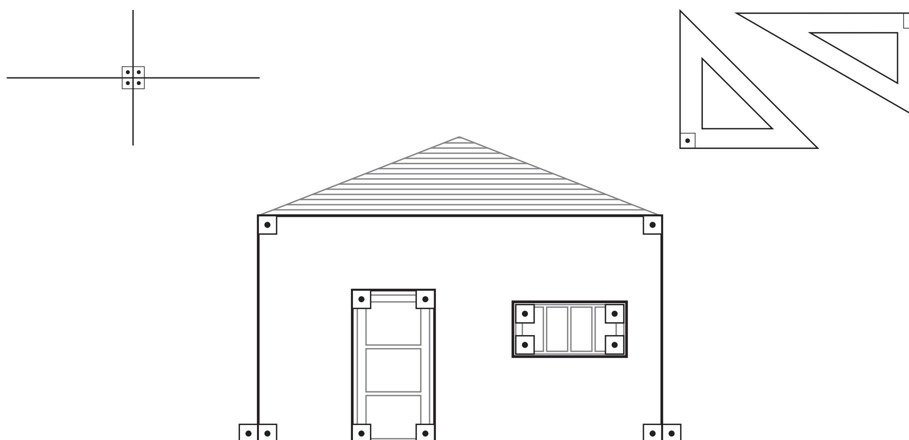


As semi-retas que formam o ângulo são os ***lados do ângulo***, e o ponto de origem das semi-retas é chamado ***vértice do ângulo***.

Nesta aula vamos estudar um pouco mais sobre os ângulos, como medi-los (que instrumentos usar e qual a unidade de medida) e alguns exemplos e aplicações importantes.

Nossa aula

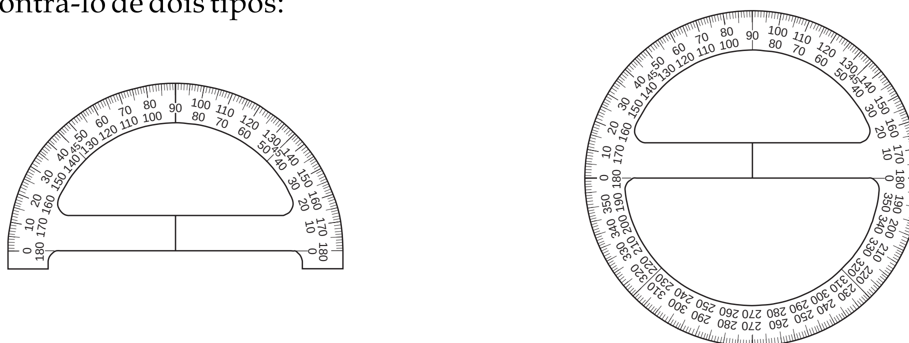
O ângulo mais famoso, justamente por ser o mais comum, é o ***ângulo reto***. Você se lembra dele? O ângulo reto é aquele ângulo formado por duas retas perpendiculares e que está sempre presente nos esquadros. Você deve lembrar também que o ângulo reto mede 90º.



Falando em medida de um ângulo, neste caso o ângulo reto, perguntamos:

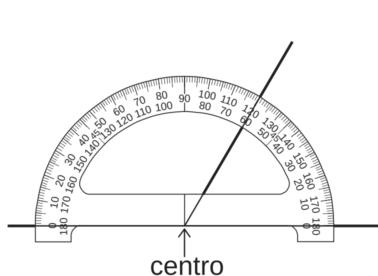
Como medir um ângulo?

O instrumento utilizado para medir ângulos é o ***transferidor***, e você pode encontrá-lo de dois tipos:

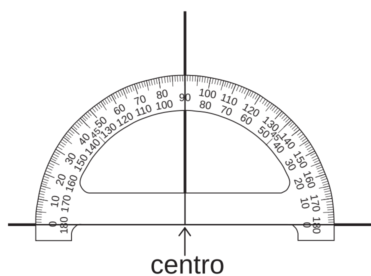


Usar o transferidor é muito simples. Observe estes exemplos e depois pratique desenhando ângulos e medindo-os com seu transferidor.

Dado um ângulo, devemos fazer coincidir seu vértice com o centro do transferidor e um de seus lados com a marca do zero do transferidor, como mostram as figuras:



marca de 60º



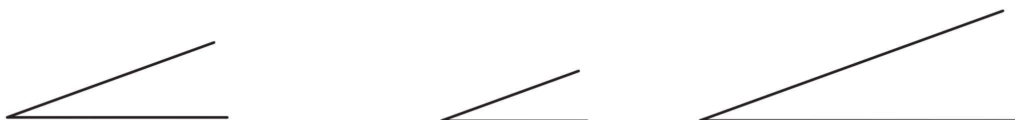
marca de 90º

A unidade de medida de ângulo é o ***grau***. Desenhando uma circunferência e dividindo-a em 360 pequenos ângulos iguais, obtemos um ângulo de um grau. Usando o transferidor, desenhamos um ângulo de 1º (um grau). Verifique como ele é pequeno!



EXEMPLO 1

Qual destes ângulos é maior?



Usando um transferidor, você pode verificar que os três ângulos possuem a mesma abertura (20 graus) e portanto são do mesmo tamanho.

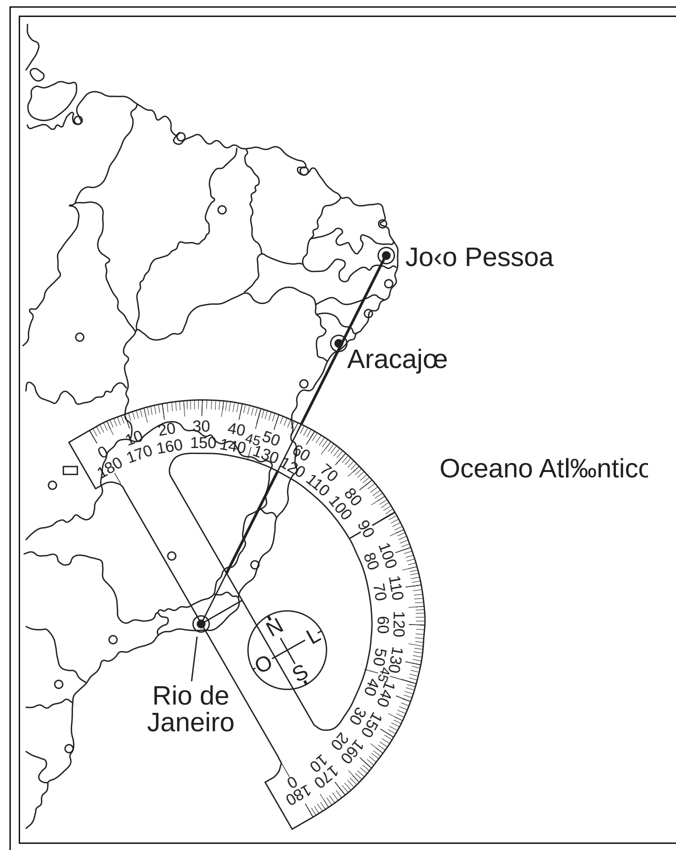
Se dois ângulos têm a mesma abertura, também têm a mesma medida.

EXEMPLO 2

Na ilustração que está na próxima página, você pode observar uma parte do litoral brasileiro. Vamos ver como calcular a direção, da rota de um avião, supondo que ele viaje usando sempre a menor distância entre dois pontos, ou seja, em linha reta.

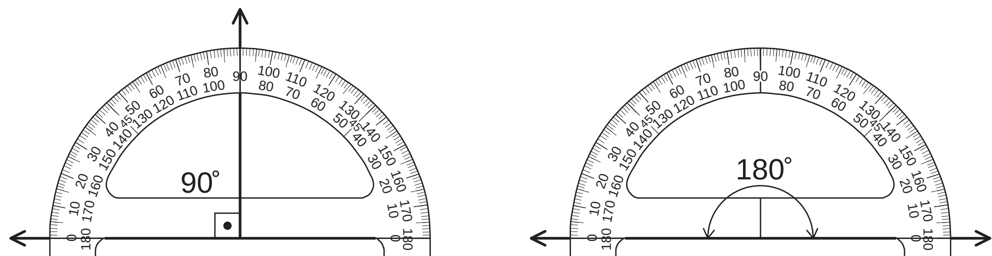
Nos mapas usados pela aviação, encontramos pequenas bússolas desenhadas sobre algumas cidades. Para calcular o ângulo de uma rota, o piloto coloca um transferidor sobre o mapa e faz a leitura do ângulo. O diâmetro do transferidor deve ter a mesma direção que a direção Norte-Sul da bússola, sendo que 0º corresponde ao norte magnético.

Nesta ilustração, você pode conferir que a rota de um vôo do Rio de Janeiro a Aracaju é de 56º. Observe que a rota do Rio de Janeiro a João Pessoa também é de 56º, porém a distância desta viagem é maior do que a da primeira.

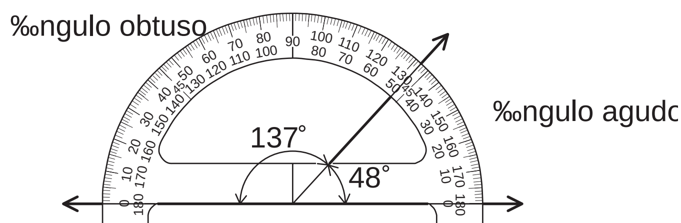


Classificando ângulos

Você já sabe que o ângulo que mede 90º é chamado ***ângulo reto***. Outro ângulo que recebe nome especial é o ângulo que mede 180º. Neste tipo de ângulo, as duas semi-retas que formam os lados estão sobre uma mesma reta, e ele é chamado ***ângulo raso***.

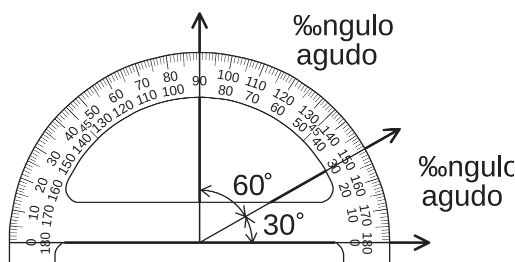


Ângulos com medidas entre 0º e 90º são chamados ***ângulos agudos***, e ângulos com medidas entre 90º e 180º são chamados ***ângulos obtusos***.



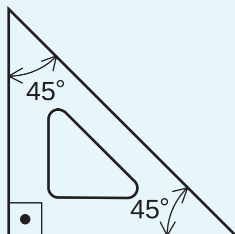
Na figura anterior, temos um ângulo agudo e um ângulo obtuso e, além disso, a soma de suas medidas é igual a 180º. Quando a soma de dois ângulos é 180º, eles são chamados ***ângulos suplementares***.

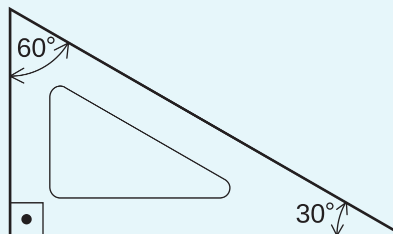
Quando dois ângulos agudos somam 90º, eles são chamados ***ângulos complementares***.



Curiosidade

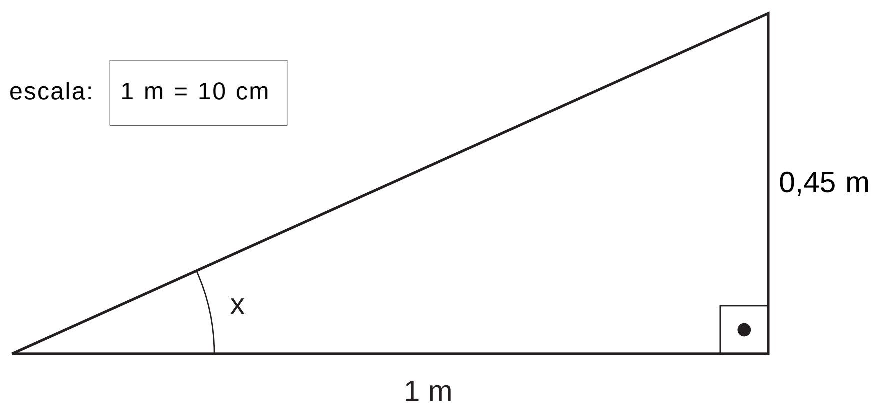
Você já observou um par de esquadros? Existem dois tipos de esquadro. Um deles é formado por um ângulo reto e dois ângulos de 45º, e o outro possui um ângulo reto, um ângulo de 30º e outro de 60º. Confira!



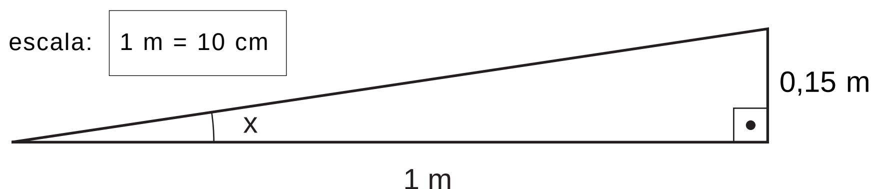


EXEMPLO 3

Para decidir com um carpinteiro qual o ângulo de inclinação que seu telhado terá, você precisa saber que tipo de telha irá utilizar.
Um carpinteiro nos informou que, para usar telhas francesas, o telhado pode ter um caimento de 45%. Isso significa que, nesse caso, para cada metro horizontal, o telhado "cai" 45% de metro. Representamos essa situação com um desenho em escala a seguir:

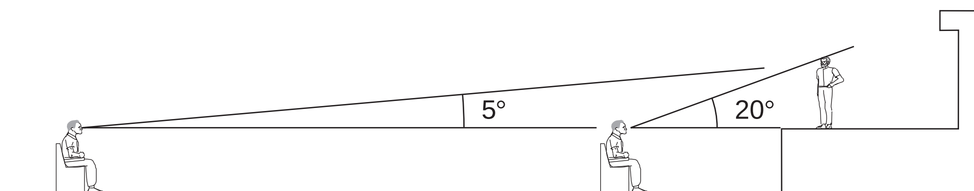


Medindo com o transferidor o ângulo *x* de inclinação do telhado, encontramos 25º.
Se você decidir usar telha de amianto, o ângulo de inclinação pode ser um ângulo de 10º. Nesse caso, o caimento do telhado seria aproximadamente de 15%. Confira usando o desenho a seguir.



EXEMPLO 4

Você já reparou que, quando observamos um automóvel que se distancia ao longo de uma grande avenida, ele parece estar diminuindo de tamanho? Ou que, quando assistimos a um grande show, quanto mais longe do palco, menores parecem ser os artistas?



Observe a ilustração abaixo. Nela, um homem foi desenhado maior do que o outro para dar a impressão de que está mais perto de nós. Como vemos o homem "menor" sob um ângulo de visão menor, nosso cérebro interpreta a cena como se esse homem estivesse mais afastado do que o primeiro.



Podemos concluir que o ângulo de visão que temos de um objeto depende da distância desse objeto e da posição que estamos em relação a ele. E nosso ângulo de visão máximo, sem mexer a cabeça, é de 180º.

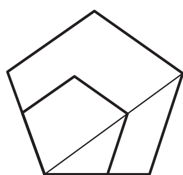
Os ângulos e a semelhança

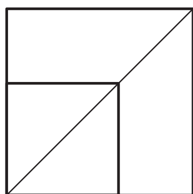
Na Aula 21, você estudou semelhança de figuras planas. Relembre agora o importante papel que os ângulos exercem no caso de figuras semelhantes.

Sempre que dois polígonos são semelhantes, seus ângulos são iguais e seus lados são proporcionais e vice-versa.

Observe os polígonos abaixo.

Como são polígonos semelhantes, você pode medir os ângulos correspondentes em cada par e verificar que suas medidas são iguais.

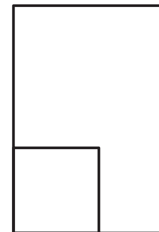






Mas será que a recíproca é verdadeira? Ou seja, será que, sempre que os ângulos forem iguais, os polígonos serão semelhantes?

Não! Basta verificar que isso não vale para um exemplo. Veja:



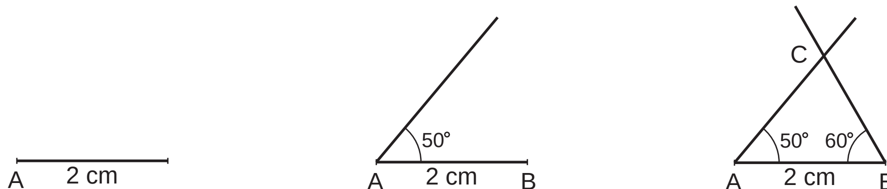
Um quadrado e um retângulo não são semelhantes. No entanto, ambas as figuras possuem quatro ângulos retos.

Mas existe um caso especial. Quando o nosso polígono for um ***triângulo*** é verdadeiro afirmar que ***se os três ângulos correspondentes de dois triângulos são iguais, então os triângulos são semelhantes***.

Podemos verificar este fato construindo pares de triângulos com ângulos iguais. Observe o exemplo seguinte.

EXEMPLO 5

Construa dois triângulos diferentes com ângulos medindo 50°, 60° e 70°.



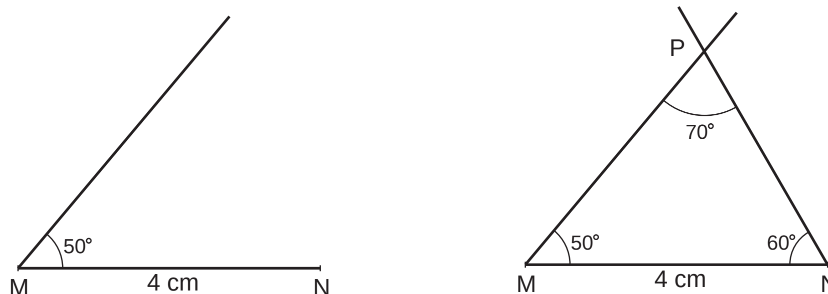
Vamos construir o primeiro triângulo e chamá-lo de ABC. Desenhamos um segmento qualquer que será sua base AB. Usando o transferidor, marcamos em A um ângulo de 50° e em B um ângulo de 60°. Traçando as semi-retas que formam o segundo lado de cada um desses ângulos, o ponto onde elas se encontram é o vértice C do triângulo ABC.

Verifique que o ângulo com vértice em C mede 70°.

$$(50^o + 60^o + 70^o = 180^o)$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

Vamos agora utilizar o mesmo processo para desenhar outro triângulo MNP com ângulos de 50°, 60° e 70°. Já que queremos um triângulo diferente, vamos começar com uma base maior.



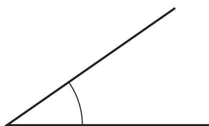
Agora, medindo os lados dos dois triângulos podemos verificar que são proporcionais. Dobramos o comprimento da base, e os outros 2 lados, automaticamente, dobraram suas medidas.

Exercícios

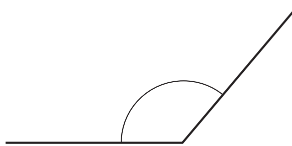
Exercício 1

Use o transferidor e meça os ângulos abaixo:

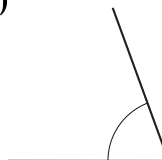
a)



b)



c)



Exercício 2

Desenhe ângulos conforme o que se pede:

a) agudo
b) reto
c) obtuso
d) raso

Exercício 3

Utilize o mapa do Exemplo 2 e determine os ângulos das rotas abaixo:

a) Rio-Vitória;
b) Rio-São Paulo

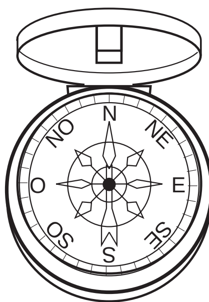
Exercício 4

No mesmo mapa, podemos observar que a rota Rio-Belém é de 15º. Se o piloto errar e marcar nos aparelhos uma rota de 150º, o que acontece?

Exercício 5

Observe a bússola da figura e descubra, usando um transferidor, a quantos graus correspondem as direções NE (Nordeste), SE (Sudeste), NW (Noroeste), SW (Sudoeste).

Estas abreviaturas no texto referem-se à bússola, que sempre traz as direções em inglês.



Exercício 6

Construa um triângulo MNP semelhante a qualquer triângulo cujos ângulos meçam 110º, 30º e 40º.

Exercício 7

Determine o ângulo suplementar (ou o suplemento) de:

a 120º
b) 43º

Exercício 8

Determine o ângulo complementar (ou o complemento) de:

a) 37º
b) 25º

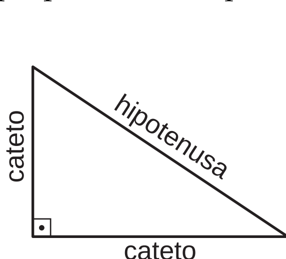
AULA

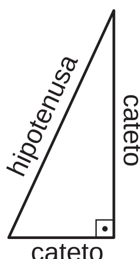
40

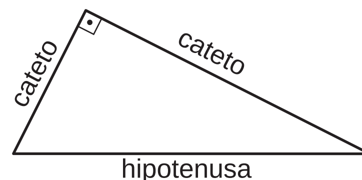
A trigonometria do triângulo retângulo

Introdução

Hoje vamos voltar a estudar os triângulos retângulos. Você já sabe que triângulo retângulo é qualquer triângulo que possua um ângulo reto e que, para este tipo de triângulo, há várias propriedades importantes.







- Dois de seus lados são perpendiculares entre si e são, portanto, alturas do triângulo, o que facilita o ***cálculo de sua área***:

$$\mathbf{A = \frac{cateto \cdot cateto}{2}}$$

- Teorema de Pitágoras:

$$\mathbf{(hipotenusa)^2 = (cateto)^2 + (cateto)^{22}}$$

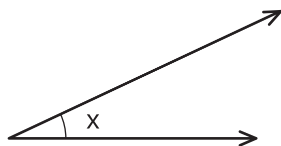
- Como a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180º, num triângulo retângulo um dos ângulos é reto (90º) e os outros dois são sempre ***agudos e complementares*** (soma = 90º).

Nesta aula, vamos descobrir como podemos estabelecer relações entre os ângulos de um triângulo retângulo (ângulos agudos) e seus lados. “Será que existem tais relações?” É essa nossa primeira preocupação. A seguir, caso existam, serão respondidas perguntas naturais como: “Valem sempre?”; “Como enunciá-las?” etc.

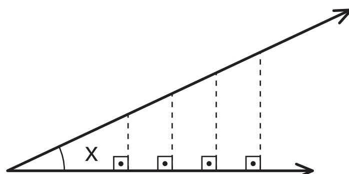
Construindo triângulos retângulos semelhantes

Nossa aula

Dado um ângulo agudo qualquer, é possível desenhar um triângulo retângulo?



Sim, podemos desenhar, na verdade, uma infinidade de triângulos retângulos.



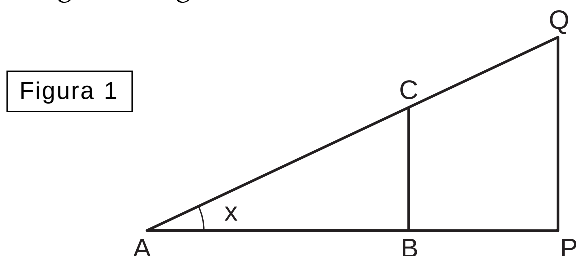
Vamos anotar algumas observações sobre esses triângulos retângulos:

- Para todos eles, um dos ângulos mede **x**.
- O outro ângulo agudo mede **90º - x**, pois é o complemento de **x**.
- O terceiro ângulo, como não poderia deixar de ser, é reto.
- Então todos eles possuem os ***mesmos ângulos***.
- Lembrando a aula anterior, podemos concluir que: ***todos estes triângulos retângulos são semelhantes***
- Se são semelhantes, então ***seus lados são proporcionais***.

Podemos então afirmar que, fixado um ângulo agudo, todos os triângulos retângulos, construídos com esse ângulo serão semelhantes e, portanto, terão lados proporcionais. Observe que acabamos de descobrir que há uma relação entre ângulos agudos e lados de um triângulo retângulo.

Precisamos agora verificar como podemos enunciar essa relação mais claramente, usando linguagem matemática.

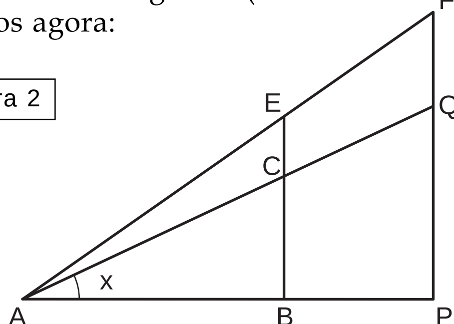
Observe a figura a seguir:



Os triângulos ABC e APQ são semelhantes. Como seus lados são proporcionais, podemos escrever:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ} \text{ ou } \frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{AQ} \text{ ou } \frac{BC}{AB} = \frac{PQ}{AP}$$

E se aumentarmos o ângulo **x** (ou 0 diminuirmos)? Essas proporções se alteram. Teríamos agora:



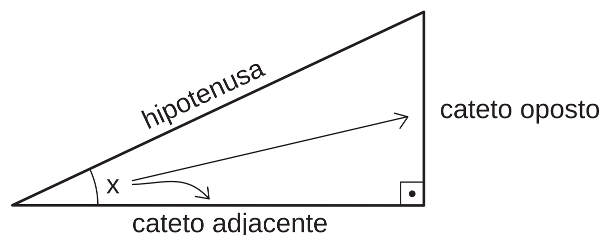
$$\frac{AB}{AE} = \frac{AP}{AF} \text{ ou } \frac{BE}{AE} = \frac{PF}{AF} \text{ ou } \frac{BE}{AB} = \frac{PF}{AP}$$

Essas proporções - que se alteram conforme o ângulo varia - confirmam nossa suspeita de que há uma relação entre lados e ângulos agudos de um triângulo retângulo. Tais relações recebem nomes especiais como veremos ainda nesta aula.

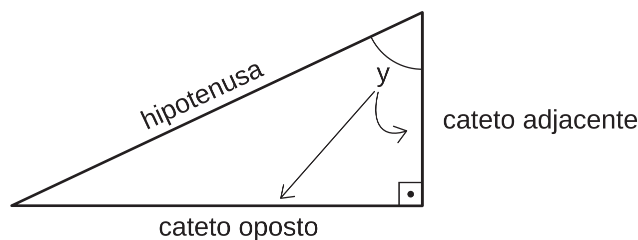
Relacionando lados e ângulos

Você já sabe que, em todo triângulo retângulo, os lados são chamados ***hipotenusa*** (o maior lado) e ***catetos*** (lados perpendiculares). Precisamos, em função do ângulo, diferenciar a nomenclatura dos catetos. Veja a figura abaixo.

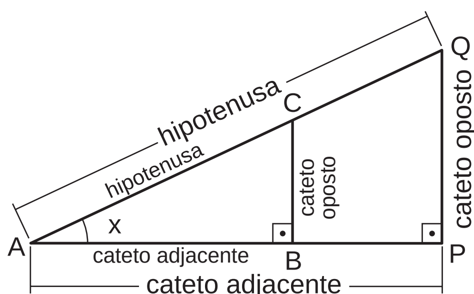
O cateto que fica "em frente" ao ângulo agudo que estamos utilizando chama-se ***cateto oposto***, e o cateto que está sobre um dos lados desse ângulo chama-se ***cateto adjacente***.



Observe que, se o ângulo do problema for o outro ângulo agudo do triângulo, a nomenclatura ***oposto*** e ***adjacente*** troca de posição (veja a figura ao lado), pois depende do ângulo utilizado.



Vamos então reescrever as proporções obtidas na Figura 1 usando essa nomenclatura. Em relação ao ângulo **x**, temos:



$$\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{AQ} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{PQ}{AP} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Relações trigonométricas

As relações que acabamos de generalizar são chamadas ***relações trigonométricas*** e recebem nomes especiais.

A primeira é chamada ***seno do ângulo*** **x** e escreve-se:

$$\textbf{sen x} = \frac{\textbf{cateto oposto}}{\textbf{hipotenusa}}$$

A segunda é chamada ***co-seno do ângulo*** **x** e escreve-se:

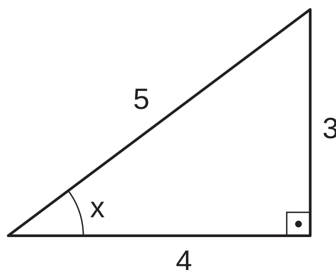
$$\textbf{cos x} = \frac{\textbf{cateto adjacente}}{\textbf{hipotenusa}}$$

A última denomina-se ***tangente do ângulo x*** e escreve-se:

$$\textbf{tg x} = \frac{\textbf{cateto oposto}}{\textbf{cateto adjacente}}$$

EXEMPLO 1

Você já conhece o triângulo pitagórico. Vamos obter as relações trigonométricas para um de seus ângulos agudos.



$$\text{sen x} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\text{cos x} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

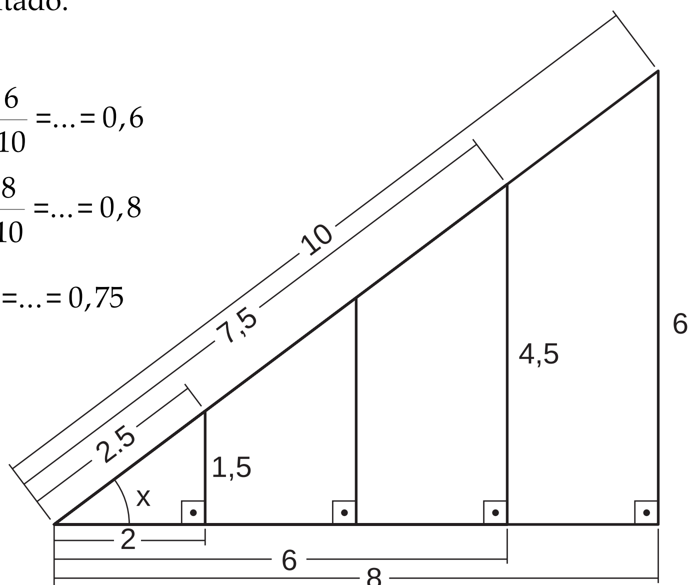
$$\text{tg x} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Observe agora que, para qualquer outro triângulo semelhante a este, obtemos o mesmo resultado.

$$\text{sen } x = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{6}{10} = \ldots = 0,6$$

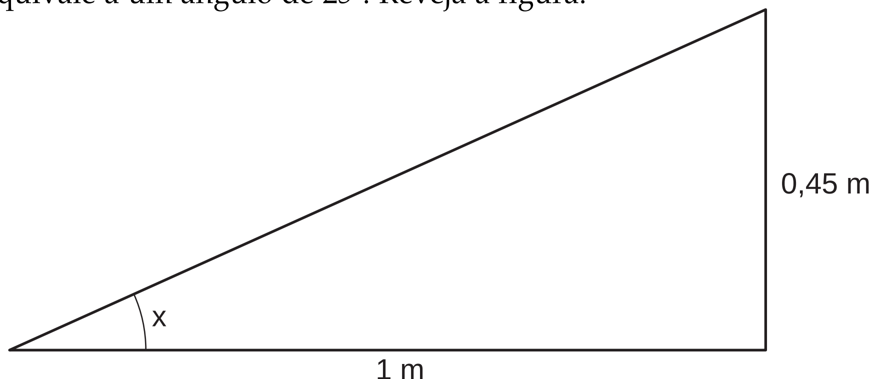
$$\cos x = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5} = \frac{6}{7,5} = \frac{8}{10} = \ldots = 0,8$$

$$\text{tg } x = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} = \frac{6}{8} = \ldots = 0,75$$



EXEMPLO 2

Na aula anterior, você viu um exemplo da utilização de ângulos para o cálculo da inclinação do telhado. No caso da utilização de telhas francesas, ficamos sabendo que o telhado poderá ter um caimento de 45%, o que equivale a um ângulo de 25º. Reveja a figura:



Observe que 45% = 0,45 é a tangente do ângulo **x**, que já sabemos ser igual a 25º. Em linguagem matemática, podemos escrever:

$$\text{tg } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \quad \text{ou} \quad \text{tg } 25^{\circ} = \frac{0,45}{1} = 0,45$$

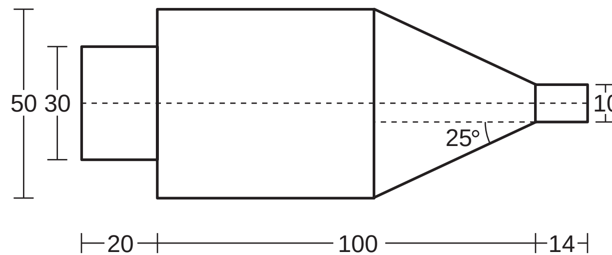
Na realidade, esse é um cálculo aproximado, feito com base na experiência do carpinteiro e conferido por nós com instrumentos de desenho. Mais precisamente teríamos:

$$\text{tg } 25^{\circ} = 0,46631$$

Esse resultado pode ser obtido consultando-se uma tabela trigonométrica como a que reproduzimos no final desta aula.

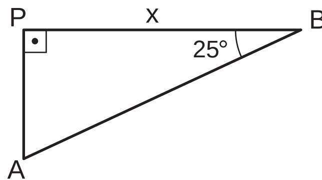
EXEMPLO 3

Um torneiro mecânico precisa moldar uma peça e recebe o projeto a seguir. Todas as medidas necessárias à fabricação constam na figura. No entanto, como saber exatamente onde ele deve começar a fazer a inclinação para obter um ângulo de 25º, como mostra o projeto?

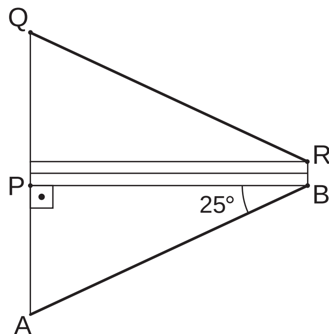


Esse é um exemplo de aplicação da trigonometria dos triângulos retângulos na indústria.

Para resolver o problema, o que precisamos é determinar o cateto **x** do triângulo retângulo a seguir:



Com os dados do projeto, podemos calcular AP:



$$AQ = 50 \;\; \text{e} \;\; BR = 10$$

$$\text{Assim, } AP = \frac{50 - 10}{2} = 20$$

Sendo o ângulo $\hat{B}$ de 25º no triângulo ABP, podemos escrever:

$$\text{tg } 25^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AP}{BP} = \frac{20}{x}$$

No Exemplo 2, vimos que tg 25º = 0,46631. Usando apenas 3 casas decimais, temos:

$$0,466 = \frac{20}{x} \quad \text{ou} \quad x = \frac{20}{0,466} \cong 43$$

Dessa maneira, o torneiro descobre que o comprimento 100 da figura está dividido em duas partes, uma valendo 43 e a outra 67. Em 67 unidades de comprimento não há inclinação, e nas outras 43 ele deve inclinar a peça de tal maneira que seu final fique com 14 unidades de comprimento.

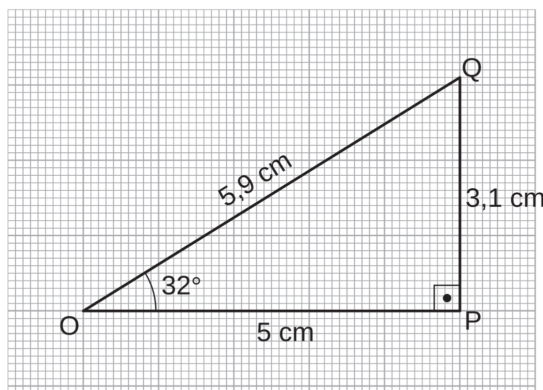
Usando a tabela trigonométrica

Como vimos, para calcular o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo, basta desenhar um triângulo retângulo que possua esse ângulo, medir com bastante precisão os seus lados e calcular as razões:

$$\text{sen } x = \frac{\text{cat.op.}}{\text{hip.}} \qquad \cos x = \frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}} \qquad \text{tg } x = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}}$$

Vejamos como calcularíamos essas razões para um ângulo de 32º.

Vamos utilizar um papel milimetrado (papel quadriculado onde os lados de cada quadradinho medem 1 milímetro = 1 mm) para tentar ser bastante precisos.



Observe que construímos um ângulo de 32º e o triângulo OPQ. Medindo seus lados temos:

OP = 50 mm, PQ = 31 mm, OQ = 59 mm

$$\text{sen } 32^\circ \cong \frac{31}{59} = 0{,}52$$

$$\cos 32^\circ \cong \frac{50}{59} = 0{,}84$$

$$\text{tg } 32^\circ \cong \frac{31}{50} = 0{,}62$$

No entanto, esses valores, obtidos por processos gráficos, por melhor que seja nosso desenho, apresentam sempre imprecisões. Além disso, seria muito trabalhoso obter os valores de senos, co-senos e tangentes de ângulos graficamente, cada vez que precisássemos desses valores.

Existem processos para calcular senos, co-senos e tangentes com muitas casas decimais exatas. Hoje em dia, muitas calculadoras já trazem teclas com essas funções. Para usá-las, basta digitar a medida do ângulo e depois a tecla correspondente à função desejada.

Minutos (′) e segundos (′′) são dubdivisões do grau, dando mais precisão às medidas dos ângulos..

Outro recurso muito utilizado é consultar uma ***tabela trigonométrica***, como a que consta no final desta aula.

Nessa tabela, podemos encontrar os valores de seno, co-seno e tangente com uma aproximação de 5 casas decimais para todos os ângulos com medidas inteiras entre 1º e 90º, de 10 em 10 minutos.

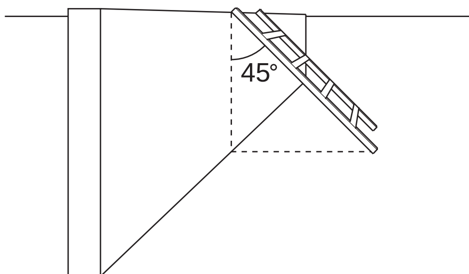
Consulte a tabela e confirme que:

sen 41º = 0,65606 cos 41º = 0,75471 tg 41º = 0,86929

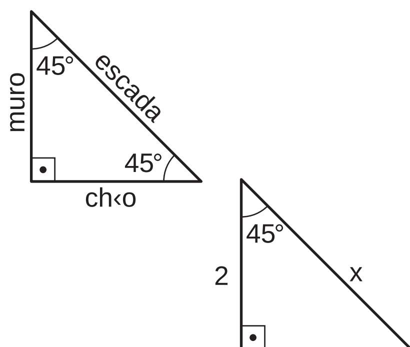
sen 80º = 0,98481 cos 80º = 0,17365 tg 80º = 5,67128

EXEMPLO 4

Uma escada está apoiada em um muro de 2 m de altura, formando um ângulo de 45º. Forma-se, portanto, um triângulo retângulo isósceles. Qual é o comprimento da escada?



Representando a vista lateral geometricamente, podemos construir o triângulo retângulo a seguir:



Usando o co-seno do ângulo de 45º que a escada forma com o muro, descobrimos o valor de **x**, que será o comprimento da escada.

$$\cos 45^\circ = \frac{2}{x}$$

$0{,}707 \,.\, x = 2 \rightarrow \mathbf{x} \cong \mathbf{2{,}83}$

Exercícios

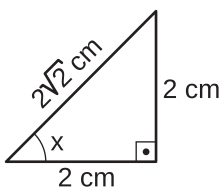
Exercício 1

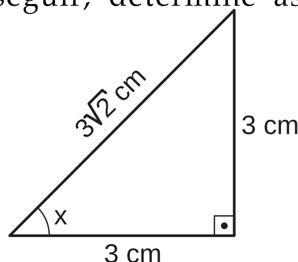
Consulte a tabela trigonométrica e dê os valores de:

a) sen 52º, cos 52º, tg 52º
b) sen 38º, cos 38º, tg 38º
c) sen 20º e cos 70º
d) sen 70º e cos 20º

Exercício 2

Usando os triângulos retângulos a seguir, determine as razões trigonométricas para o ângulo **x**.





Exercício 3

No Exercício 2, o que podemos concluir sobre o ângulo **x**? Quanto mede esse ângulo?

Exercício 4

Com auxílio da tabela e dos exercícios anteriores, responda:

a) A tangente de um ângulo agudo pode ser igual a 1?
Em caso afirmativo, para que ângulo isso acontece?

b) A tangente de um ângulo agudo pode ser maior do que 1?
Em caso afirmativo, para que ângulos isso acontece?

Exercício 5

Nos itens (**c**) e (**d**) do Exercício 1, você encontrou na tabela o seno e o co-seno dos ângulos 20º e 70º, que são ângulos complementares (20º + 70º = 90º). Encontre na tabela os valores de seno e co-seno de outros ângulos complementares como: 30º e 60º, 40º e 50º ... O que podemos concluir a partir da observação desses valores?

Exercício 6

a) Com os valores que você anotou no Exercício 5, calcule, agora com o auxílio da máquina de calcular, o valor das frações:

$$\frac{\text{sen } 20^{o}}{\cos 20^{o}} \quad \frac{\text{sen } 70^{o}}{\cos 70^{o}} \quad \frac{\text{sen } 52^{o}}{\cos 52^{o}} \quad \frac{\text{sen } 38^{o}}{\cos 38^{o}}$$

b) Comparando esses resultados com o valor da tangente desses ângulos, o que podemos concluir?

Tabelas trigonométricas

TABELA DE SENOS
0° - 45°

minutos / graus	0	10	20	30	40	50
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929
						0,35565
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748
						0,51254
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056
						0,65386
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505
45	0,70711	0,70916	0,71121	0,71325	0,71529	0,71732

TABELA DE SENOS
45º - 90º

graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
45	0,70711	0,70916	0,71121	0,71325	0,71529	0,71732
46	0,71934	0,72136	0,72337	0,72537	0,72737	0,72937
47	0,73135	0,73333	0,73531	0,73728	0,73924	0,74120
48	0,74314	0,74509	0,74703	0,74896	0,75088	0,75280
49	0,75471	0,75661	0,75851	0,76041	0,76229	0,76417
50	0,76604	0,76791	0,76977	0,77162	0,77347	0,77531
51	0,77715	0,77897	0,78079	0,78261	0,78442	0,78622
52	0,78801	0,78980	0,79158	0,79335	0,79512	0,79688
53	0,79864	0,80038	0,80212	0,80386	0,80558	0,80730
54	0,80902	0,81072	0,81242	0,81412	0,81580	0,81748
55	0,81915	0,82082	0,82248	0,82413	0,82577	0,82741
56	0,82904	0,83066	0,83228	0,83389	0,83549	0,83708
57	0,83867	0,84025	0,84182	0,84339	0,84495	0,84650
58	0,84805	0,84959	0,85112	0,85264	0,85416	0,85567
59	0,85717	0,85866	0,86015	0,86163	0,86310	0,86457
60	0,86603	0,86748	0,86892	0,87036	0,87178	0,87321
61	0,87462	0,87603	0,87743	0,87882	0,88020	0,88158
62	0,88295	0,88431	0,88566	0,88701	0,88835	0,88968
63	0,89101	0,89232	0,89363	0,89493	0,89623	0,89752
64	0,89879	0,90007	0,90133	0,90259	0,90383	0,90507
65	0,90631	0,90753	0,90875	0,90996	0,91116	0,91236
66	0,91355	0,91472	0,91590	0,91706	0,91822	0,91936
67	0,92050	0,92164	0,92276	0,92388	0,92499	0,92609
68	0,92718	0,92827	0,92935	0,93042	0,93148	0,93252
69	0,93358	0,93462	0,93565	0,93667	0,93769	0,93869
70	0,93969	0,94068	0,94167	0,94264	0,94361	0,94457
71	0,94552	0,94646	0,94740	0,94832	0,94924	0,95015
72	0,95106	0,95195	0,95284	0,95372	0,95459	0,95545
73	0,95630	0,95715	0,95799	0,95882	0,95964	0,96046
74	0,96126	0,96206	0,96285	0,96363	0,96440	0,96517
75	0,96593	0,96667	0,96742	0,96815	0,96887	0,96959
76	0,97030	0,97100	0,97169	0,97237	0,97304	0,97371
77	0,97437	0,97502	0,97566	0,97630	0,97692	0,97754
78	0,97815	0,97875	0,97934	0,97992	0,98050	0,98107
79	0,98163	0,98218	0,98272	0,98325	0,98378	0,98430
80	0,98481	0,98531	0,98580	0,98629	0,98676	0,98723
81	0,98769	0,98814	0,98858	0,98902	0,98944	0,98986
82	0,99027	0,99067	0,99106	0,99144	0,99182	0,99219
83	0,99255	0,99290	0,99324	0,99357	0,99390	0,99421
84	0,99452	0,99482	0,99511	0,99540	0,99567	0,99594
85	0,99619	0,99644	0,99668	0,99692	0,99714	0,99736
86	0,99756	0,99776	0,99795	0,99813	0,99831	0,99847
87	0,99863	0,99878	0,99892	0,99905	0,99917	0,99929
88	0,99939	0,99949	0,99958	0,99966	0,99973	0,99979
89	0,99985	0,99989	0,99993	0,99996	0,99998	0,99999
90	1,00000	-	-	-	-	-

TABELA DE CO-SENOS
0º - 45º

graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
0	1,00000	0,99999	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462
21	0,93358	0,93252	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916
45	0,70711	0,70505	0,70298	0,70091	0,69883	0,69675

TABELA DE CO-SENOS
45º - 90º

graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
45	0,70711	0,70505	0,70298	0,70091	0,69883	0,69675
46	0,69466	0,69256	0,69046	0,68835	0,68624	0,68412
47	0,68200	0,67987	0,67773	0,67559	0,67344	0,67129
48	0,66913	0,66697	0,66480	0,66262	0,66044	0,65825
49	0,65606	0,65386	0,65166	0,64945	0,64723	0,64501
50	0,64279	0,64056	0,63832	0,63608	0,63383	0,63158
51	0,62932	0,62706	0,62479	0,62251	0,62024	0,61795
52	0,61566	0,61337	0,61107	0,60876	0,60645	0,60414
53	0,60182	0,59949	0,59716	0,59482	0,59248	0,59014
54	0,58779	0,58543	0,58307	0,58070	0,57833	0,57596
55	0,57358	0,57119	0,56880	0,56641	0,56401	0,56160
56	0,55919	0,55678	0,55436	0,55194	0,54951	0,54708
57	0,54464	0,54220	0,53975	0,53730	0,53484	0,53238
58	0,52992	0,52745	0,52498	0,52250	0,52002	0,51753
59	0,51504	0,51254	0,51004	0,50754	0,50503	0,50252
60	0,50000	0,49748	0,49495	0,49242	0,48989	0,48735
61	0,48481	0,48226	0,47971	0,47716	0,47460	0,47204
62	0,46947	0,46690	0,46433	0,46175	0,45917	0,45658
63	0,45399	0,45140	0,44880	0,44620	0,44359	0,44098
64	0,43837	0,43575	0,43313	0,43051	0,42788	0,42525
65	0,42262	0,41998	0,41734	0,41469	0,41204	0,40939
66	0,40674	0,40408	0,40142	0,39875	0,39608	0,39341
67	0,39073	0,38805	0,38537	0,38268	0,37999	0,37730
68	0,37461	0,37191	0,36921	0,36650	0,36379	0,36108
69	0,35837	0,35565	0,35293	0,35021	0,34748	0,34475
70	0,34202	0,33929	0,33655	0,33381	0,33106	0,32832
71	0,32557	0,32282	0,32006	0,31730	0,31454	0,31178
72	0,30902	0,30625	0,30348	0,30071	0,29793	0,29515
73	0,29237	0,28959	0,28680	0,28402	0,28123	0,27843
74	0,27564	0,27284	0,27004	0,26724	0,26443	0,26163
75	0,25882	0,25601	0,25320	0,25038	0,24756	0,24474
76	0,24192	0,23910	0,23627	0,23345	0,23062	0,22778
77	0,22495	0,22212	0,21928	0,21644	0,21360	0,21076
78	0,20791	0,20507	0,20222	0,19937	0,19652	0,19366
79	0,19081	0,18795	0,18509	0,18224	0,17937	0,17651
80	0,17365	0,17078	0,16792	0,16505	0,16218	0,15931
81	0,15643	0,15356	0,15069	0,14781	0,14493	0,14205
82	0,13917	0,13629	0,13341	0,13053	0,12764	0,12476
83	0,12187	0,11898	0,11609	0,11320	0,11031	0,10742
84	0,10453	0,10164	0,09874	0,09585	0,09295	0,09005
85	0,08716	0,08426	0,08136	0,07846	0,07556	0,07266
86	0,06976	0,06685	0,06395	0,06105	0,05814	0,05524
87	0,05234	0,04943	0,04653	0,04362	0,04071	0,03781
88	0,03490	0,03199	0,02908	0,02618	0,02327	0,02036
89	0,01745	0,01454	0,01164	0,00873	0,00582	0,00291
90	0,00000	-	-	-	-	-

TABELA DE TANGENTES
0º - 45º

graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41424	0,41763	0,42105
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691
31	0,60086	0,60483	0,60681	0,61280	0,61681	0,62083
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420
45	1,00000	1,00583	1,01170	1,01761	1,02355	1,02952

TABELA DE TANGENTES
45º - 90º

graus \ minutos	0	10	20	30	40	50
45	1,00000	1,00583	1,01170	1,01761	1,02355	1,02952
46	1,03553	1,04158	1,04766	1,05378	1,05994	1,06613
47	1,07237	1,07864	1,08496	1,09131	1,09770	1,10414
48	1,11061	1,11713	1,12369	1,13029	1,13694	1,14363
49	1,15037	1,15715	1,16398	1,17085	1,17777	1,18474
50	1,19175	1,19882	1,20593	1,21310	1,22031	1,22758
51	1,23490	1,24227	1,24969	1,25717	1,26471	1,27230
52	1,27994	1,28764	1,29541	1,30323	1,31110	1,31904
53	1,32704	1,33511	1,34323	1,35142	1,35968	1,36800
54	1,37638	1,38484	1,39336	1,40195	1,41061	1,41934
55	1,42815	1,43703	1,44598	1,45501	1,46411	1,47330
56	1,48256	1,49190	1,50133	1,51084	1,52043	1,53010
57	1,53987	1,54972	1,55966	1,56969	1,57981	1,59002
58	1,60033	1,61074	1,62125	1,63185	1,64256	1,65337
59	1,66428	1,67530	1,68643	1,69766	1,70901	1,72047
60	1,73205	1,74375	1,75556	1,76749	1,77955	1,79174
61	1,80405	1,81649	1,82906	1,84917	1,85462	1,86760
62	1,88073	1,89400	1,90741	1,92098	1,93470	1,94858
63	1,96261	1,97680	1,99116	2,00569	2,02039	2,03526
64	2,05030	2,06553	2,08094	2,09654	2,11233	2,12832
65	2,14451	2,16090	2,17749	2,19430	2,21132	2,22857
66	2,24604	2,26374	2,28167	2,29984	2,31826	2,33693
67	2,35585	2,37504	2,39449	2,41421	2,43422	2,45451
68	2,47509	2,49597	2,51715	2,53865	2,56046	2,58261
69	2,60509	2,62791	2,65100	2,67462	2,69853	2,72281
70	2,74748	2,77254	2,79802	2,82391	2,85023	2,87700
71	2,90421	2,93189	2,96004	2,98869	3,01783	3,04749
72	3,07768	3,10842	3,13972	3,17159	3,20406	3,23714
73	3,27085	3,30521	3,34023	3,37594	3,41236	3,44951
74	3,48741	3,52609	3,56557	3,60588	3,64705	3,68909
75	3,73205	3,77595	3,82083	3,86671	3,91364	3,96165
76	4,01078	4,06107	4,11256	4,16530	4,21933	4,27471
77	4,33148	4,38969	4,44942	4,51071	4,57363	4,63825
78	4,70463	4,77286	4,84300	4,91516	4,98940	5,06584
79	5,14455	5,22566	5,30928	5,39552	5,48451	5,57638
80	5,67128	5,76937	5,87080	5,97576	6,08444	6,19703
81	6,31375	6,43484	6,56055	6,69116	6,82694	6,96823
82	7,11537	7,26873	7,42871	7,59575	7,77035	7,95302
83	8,14435	8,34496	8,55555	8,77689	9,00983	9,25530
84	9,51436	9,78817	10,07803	10,38540	10,71191	11,05943
85	11,43005	11,82617	12,25051	12,70621	13,19688	13,72674
86	14,30067	14,92442	15,60478	16,34986	17,16934	18,07498
87	19,08114	20,20555	21,47040	22,90377	24,54176	26,43160
88	28,63625	31,24158	34,36777	38,18846	42,96408	49,10388
89	57,28996	68,75009	85,93979	114,58865	171,88540	343,77371
90	-	-	-	-	-	-

Gabaritos das aulas 21 a 40

Aula 21 - Semelhança e áreas

1.

a) x = 16 , y = 20 , z = 10

b) 112 e 140

2. 125 m^{22}

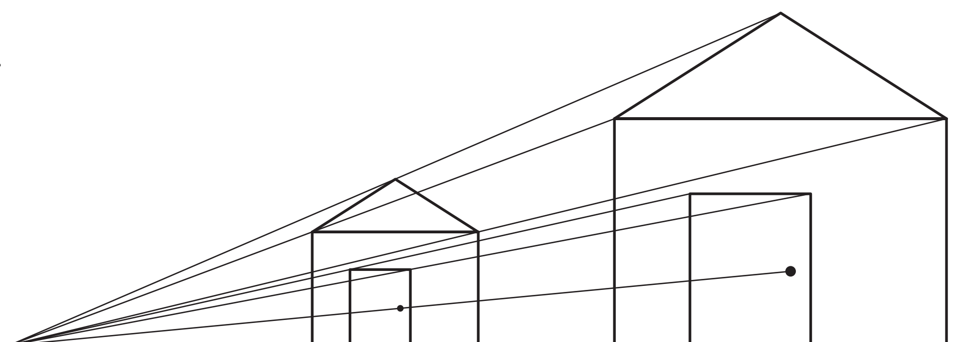
3.

a) 96, 108 e 156 cm

b) 144 vezes

4. 3.840 tacos

5.



6. 95 gramas

Aula 22 - Plantas e mapas

1. 36 m

2. 405 km aproximadamente

3.

	PERÍMETRO	ÁREA
A	100 m	600 m^{22}
B	150 m	1.250 m^{22}
C	210 m	2.200 m^{22}

4. 20 . 30 = 600, perímetro = 100
15 . 40 = 600, perímetro = 110 (existem outras soluções)

5. 14,2 km aproximadamente

6. 22,36 m aproximadamente

Aula 23 - A casa

1.

1,50 . 2,80	4,20
4,00 . 2,80	11,20
1,80 . 2,80	5,04

2. **a** = 6,30 m **b** = 4,60 m
c = 7,60 m **d** = 1,25 m
e = 1,30 m **f** = 3,35 m

3. 20,7 m

4. 30,6 m^{22} aproximadamente

5. Pelo menos 511 lajotas.

6.
a) **x** = 8,85 m **y** = 12,05 m
b) 23 m aproximadamente

7.
a) 14 telhas
b) 56 telhas
c) 1.568 telhas

8. 1.005 azulejos aproximadamente

Aula 24 - A equação do 2º grau

1.
a) $x = 6, \; x = -6$

b) $x = \sqrt{3}, \; x = -\sqrt{3}$

c) $x = 2, \; x = -2$

2.
a) $x = \sqrt{3}, \; x = -\sqrt{3}$

b) $x = \sqrt{5}, \; x = -\sqrt{5}$

c) $x = \frac{3}{4}, \; x = -\frac{3}{4}$

3.

a) $x = 1, \ x = -3$

b) $x = 2 + \sqrt{15} \cong 5{,}873, \ x = 2 - \sqrt{15} \cong -1{,}873$

c) $x = \sqrt{3} - 5 \cong 3{,}268, \ x = -\sqrt{3} - 5 \cong -6{,}732$

4.

b) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^{22}$

c) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^{22}$

d) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = (x + \frac{3}{2})^{22}$

5.

a) $x = 2 + \sqrt{12}, \ x = 2 - \sqrt{12}$

b) $x = 2, \ x = -8$

6. $(x - 1)^2 = -3$. Um número elevado ao quadrado não pode ser negativo.

7.

a) $x = 10, x = -4$
b) $x = 2, x = 3$
c) $x = 0, x = 4$

Aula 25 - A fórmula da equação do 2º grau

1.

a) $x = 3, x = -3$
b) não tem solução

c) $x = \sqrt{3}, \ x = -3$

2.

a) $x = 0, \ x = 3$
b) $x = 0, \ x = -4$

3.

a) $x = 2, \ x = 3$
b) $x = -2, x = 5$
c) $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

d) $x = 3$
e) não tem solução

4.

a) $x = 0{,}85, \ x = -2{,}35$
b) $x = 2{,}55, \ x = 0{,}78$

Aula 26 - Problemas do 2º grau

1. 11

2. 36

3. $49m^{22}$

4. 9;
a) $xy = 72$;
b) $x - 3$;
c) $(x - 3) . (y = 4) = 72$
5. 24 linhas e 20 colunas

Aula 27 -A noção de função

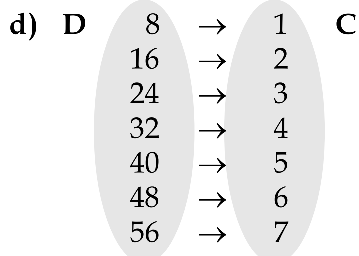
1.
a) 100 cm^{22}
b) 49 cm^{22}
c) Sim.
d) 40 cm e 28 cm
e) Sim, pois depende da medida do lado.
f) $y = 4x$

2.
a)

8	16	24	32	40	48	56
1	2	3	4	5	6	7

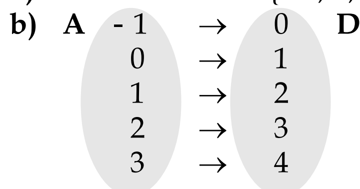
b) Sim.

c) $y = \frac{x}{8}$

d)


3. Imagem = {8, 14, 18}

4.
a) 0 min $\leq x \leq$ 1 20 min
b) 0 km $\leq x \leq$ 40 km

5.
a) Domíno = A = {- 1, 0, 1, 2, 3}
b)


c) f(- 1) = 0 f(0) = 1 f(1) = 2 f(2) = 3 f(3) = 4

d) Imagem = B = {0, 1, 2, 3, 4}

Aula 28 - O gráfico de uma função

1.

a) Na terra.

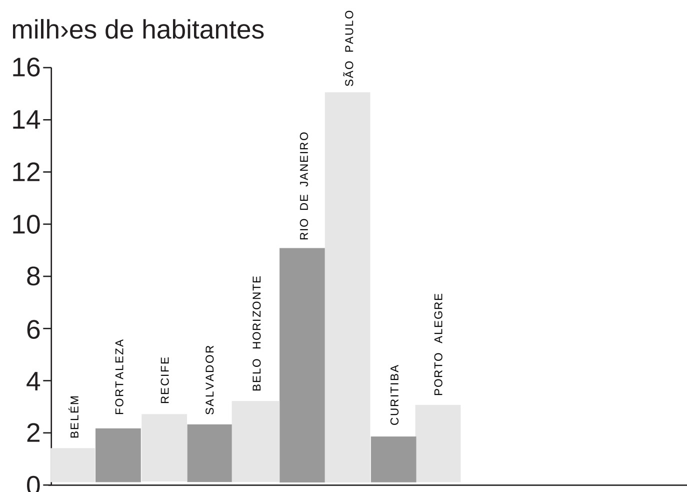
b) No mar.

c) {1970, 1975, 1980, 1985}

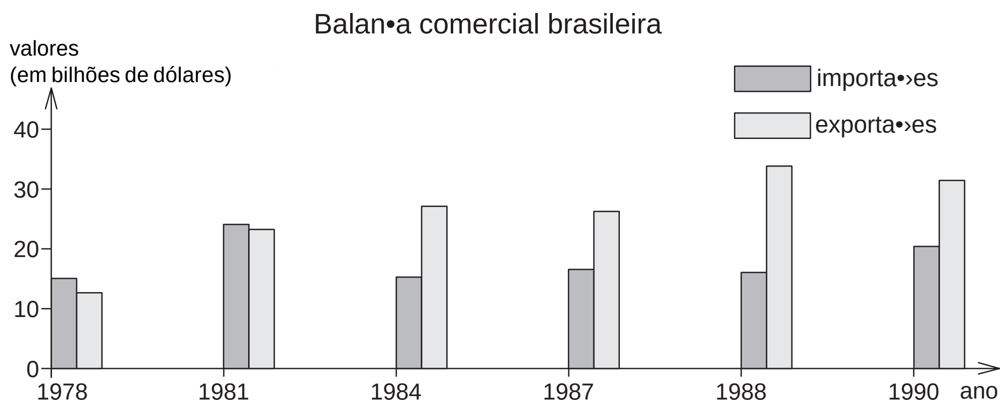
d) 16,5 bilhões de barris

e) 1985

2.



3a)



b) Duas: importações e exportações.

c) $\frac{24-15}{81-78}=3; \frac{15,2-24}{84-81}= -2,9333...; \frac{16,5-15,2}{87-84}=0,4333...; \frac{16-16,5}{88-87}=0,5; \frac{20,4-16}{90-88}=2,2$

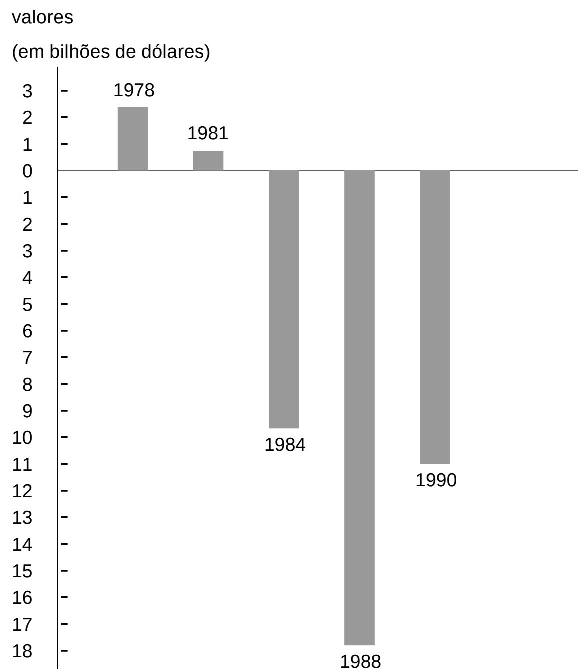
A maior taxa ocorreu entre 1987 e 1988 e a menor entre 1981 e 1984.

d) $\frac{23,2-12,6}{81-78}=3,5333...; \frac{27-23,2}{84-81}=1,2666; \frac{26,2-27}{87-84}= -0,2666...; \frac{33,8-26,2}{88-87}=7,6; \frac{31,4-33,8}{90-88}=-1,2$

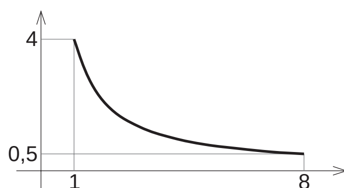
A maior taxa ocorreu entre 1987 e 1988 e a menor entre 1988 e 1990.

e)

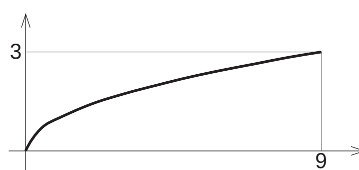
1978	2,4
1981	0,8
1984	-9,7
1988	-17,8
1990	-11



4.



5.



6.

a) x = 3
b) x = 8
c) y = 1
d) y = 6
e) $3 \leq x \leq 8$
f) $1 \leq x \leq 3$ e $8 \leq x \leq 10$

7.

a) 7ºC, junho/julho
b) 12ºC, junho/julho
c) Oeste de RS
d) novembro/dezembro
e) dezembro

Aula 29 - Os gráficos estão na vida

1.

a) 80; 65
b) Março, abril, junho e novembro.
c) **A** Máxima em junho: 80.
Mínima em março: 65.

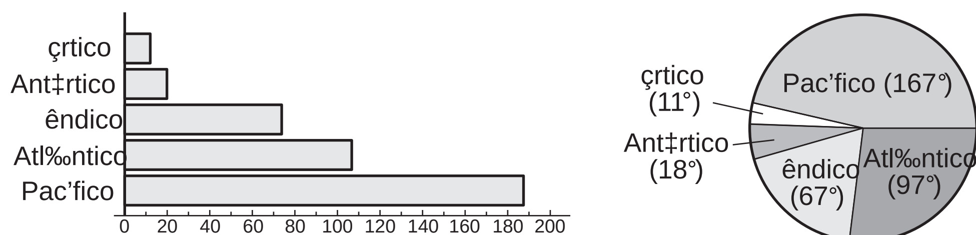
B Máxima em outubro: 85.
Mínima em março: 55.

d) Crescente de março a junho e de outubro a novembro.
Decrescente de junho a agosto.
Constante de agosto a outubro.
e) Não.
f) A

2.
- (**a**)
- 30 min.

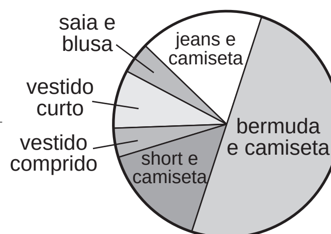
3.
a) Sim, porque esse resultado é a média.
b) Sim, colunas verticais, linha poligonal.
c) Não, porque não se trata de um conjunto de dados com um total fixo, são apenas dados comparativos.

4.



5. Média = 1,84.

6.
a) Bermuda e camiseta
b)
100 ⇒ 15°
200 ⇒ 30°
400 ⇒ 60°
1.200 ⇒ 180°

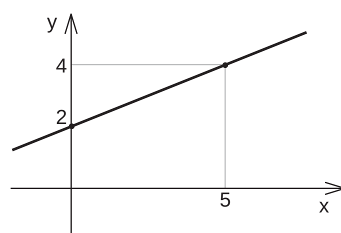


Aula 30 -A função y = ax + b

1
a) 3
b) - 6
c) x = 2
d) Sim.

2.
a) 1
b) - 0,3

3..



4.

a) $y = 2x - 5$

b) $y = -x + 4$

5. $\frac{5}{9}$

6

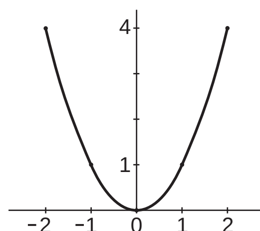
a) $y = 0{,}4x + 1{,}8$

b) 9,8 UTs

Aula 31 - A função do 2º grau

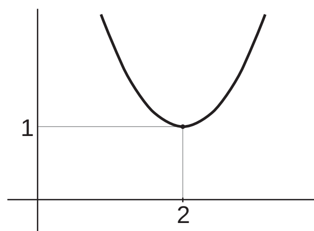
1.

x	y
- 2	4
- 1	1
0	0
1	1
2	4

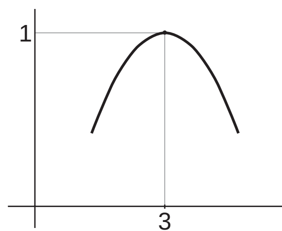


2.

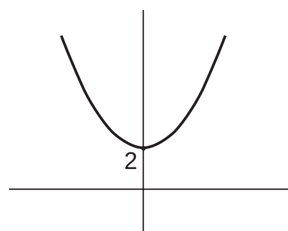
a) v = (2, 1)



b) v = (3, 4)

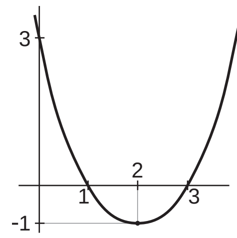


c) v = (0, 2)

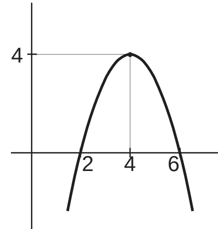


3.

a)



b)

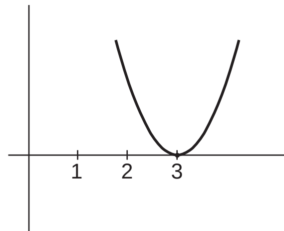


4.

a) $y \geq -1$

b) $y \leq 4$

5.



Aula 32 - Máximos e mínimos

1.

a) 8,5 litros

b) 12,5 litros

c) 80 km/h

2. 4, quando x = 3

3. 17, quando x = 2

4. 15 m e 20 m

5. Cobrando R$ 13,75 por caixa, ele arrecada R$ 7.562,50.

Aula 33 - Progressões aritméticas

1. 77

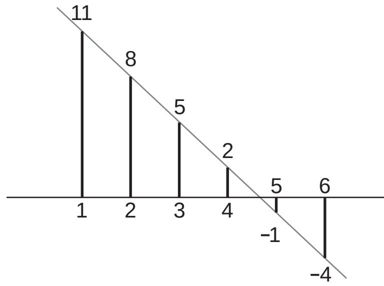
2.

a) 1.000, 993, 986, 979, 972

b) 839

3. 83

4.



5. 143

6.

a) $a_1 = 18{,}20$
$a_2 = 17{,}40$
$a_3 = 16{,}60$
$a_4 = 15{,}80$
$a_5 = 15{,}00$

b) 7,00

c) Dia 24.

7. 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99, 105 e 111.

Aula 34 - Somando os termos das progressões aritméticas

1.

a) 214

b) 2.190

2. 2.475

3. 700

4.

a) 19,5 km

b) 367,5 km

5. 98.550

6. 846 m

Aula 35 - Progressões geométricas

1. 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640

2.

a) 36

b) 10

c) 4

3. R$ 38.182,37

4. x = 12

5. 1988

6. Aproximadamente 1 milhão.

7. 1979

Aula 36 - Somando os termos das progressões geométricas

1. 1.023

2. 195.312

3. 364
243

4. R$ 1.496,90

5. O "plano maluco". O limite da soma é de R$ 512,00.

Aula 37 -A Matemática e o dinheiro

1. 21% (açúcar) e 14% (café), aproximadamente. O açúcar aumentou mais.

2. R$ 110,20

3. R$ 200,00

4. 32% (aumentos) e 28% (descontos).

5. 20%

6. 35,45%

7. 15,76% aproximadamente

8. 3,56% aproximadamente

Aula 38 -À vista ou a prazo?

1. R$ 291,60

2. R$ 136,64

3.
a) R$ 96,00
b) R$ 109,42

4.
a) R$ 333,08
b) R$ 297,39
c) R$ 373,05

5. R$ 451,36

6. R$ 272,00

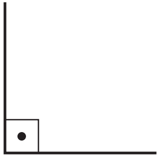
7. A opção (**a**).

8. R$ 1.488,93

Aula 39 - Medida de ângulos

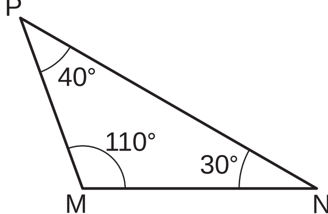
1.
a) 45º
b) 130º
c) 70º

2.
a) Qualquer ângulo menor que 90º.
b)



c) Qualquer ângulo maior que 90º.

d)

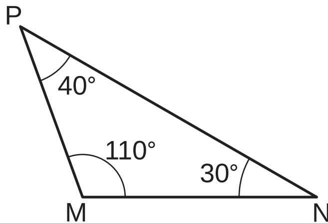


3.
a) 80º
b) 286º

4. O avião seguirá na direção do Oceano Atlântico.

5. NE - 45º
SE - 135º
NW - 315º
SW - 225º

6.



(Se o seu triângulo está em outra posição, você pode girá-lo e verificar que é semelhante a este.)

7.
a) 60º
b) 137º

8.
a) 53º
b) 65º

Aula 40 - A trigonometria do triângulo retângulo

1.
a) 0,78801; 0,61566; 1,27994
b) 0,61566; 0,78801; 0,78129
c) 0,34202; 0,34202
d) 0,93969; 0,93969

2.
a) $\text{sen } x = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } x = \frac{2}{2} = 1$

b) $\text{sen } x = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } x = \frac{3}{3} = 1$

3. O ângulo **x** tem a mesma medida para os dois triângulos.
Como esses triângulos são retângulos e isósceles, **x** = 45º.

4.
a) Sim, 45º.
b) Sim, para os ângulos maiores que 45º até 89º.

5. sen 30º = cos 60º = 0,5
sen 60º = cos 30º = 0,86603
sen 40º = cos 50º = 0,64279
sen 50º = cos 40º = 0,76604
Podemos concluir que o seno de um ângulo é igual ao co-seno de seu ângulo complementar.

6.
$$\frac{\text{sen } 20^o}{\cos 20^o} = \frac{0,34202}{0,93969} = 0,36397$$

$$\frac{\text{sen } 70^o}{\cos 70^o} = \frac{0,93969}{0,34202} = 2,74747$$

$$\frac{\text{sen } 52^o}{\cos 52^o} = \frac{0,78801}{0,61566} = 1,27994$$

$$\frac{\text{sen } 38^o}{\cos 38^o} = \frac{0,61566}{0,78801} = 0,78128$$

7. Concluímos que a tangente do ângulo é igual ao seno dividido pelo co-seno desse ângulo.

Para suas anotações

Para suas anotações

Para suas anotações

Para suas anotações

Para suas anotações

Para suas anotações

AULA

41

Triângulos especiais

Introdução

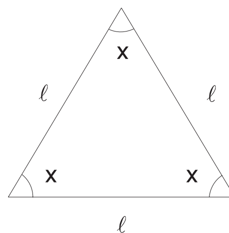
Nesta aula, estudaremos o caso de dois triângulos muito especiais – ***o equilátero e o retângulo*** – seus lados, seus ângulos e suas razões trigonométricas.

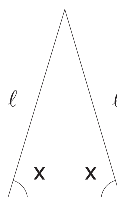
Antes, vamos relembrar alguns pontos importantes.

- A soma dos ângulos de um triângulo qualquer é sempre 180º

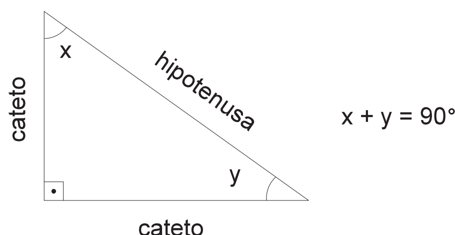
- O ***triângulo equilátero*** possui todos os lados e iguais. Por isso, cada um de seus ângulos mede 60º.

- O ***triângulo isósceles*** possui dois lados iguais e dois ângulos iguais.





- Um ***triângulo retângulo*** possui um ângulo reto e dois ângulos agudos e complementares. Os lados de um triângulo retângulo chamam-se ***catetos*** e ***hipotenusa***. Os catetos são sempre perpendiculares e formam um ângulo reto.

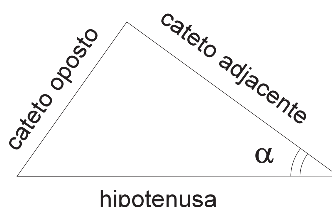


- Na aula anterior, nós estudamos as razões trigonométricas dos triângulos retângulos, que são:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

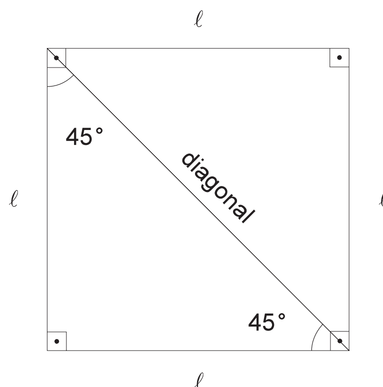


Nesta aula, esses conceitos serão aplicados em casos especiais de triângulos que aparecem com freqüência em nosso dia-a-dia.

Nossa aula

A diagonal do quadrado

Uma figura geométrica muito simples e bastante utilizada é o quadrado. Traçando um segmento de reta unindo dois vértices não-consecutivos do quadrado – uma diagonal – dividimos o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles.



Em qualquer um desses triângulos, dois lados são iguais aos lados do quadrado, a hipotenusa é igual à diagonal do quadrado, e os dois ângulos agudos são iguais a 45º. Sabendo que os dois catetos medem ℓ podemos calcular o comprimento **d** da hipotenusa usando o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2$$
$$d = \sqrt{2\ell^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$

Assim, para qualquer quadrado de lado ***l***, calculamos facilmente o comprimento da diagonal multiplicando ℓ por $\sqrt{2}$.

EXEMPLO 1

Num quadrado de 4 cm de lado qual a medida da diagonal **d**?

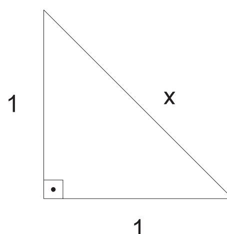
Solução

$d = \ell\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\text{cm}$

Este raciocínio pode ser aplicado sempre que encontrarmos um triângulo retângulo isósceles.

EXEMPLO 2

No triângulo da ilustração, quanto mede a hipotenusa?



Solução:

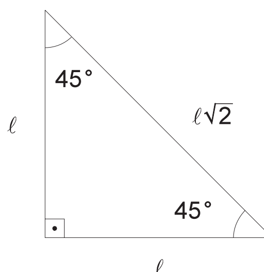
$x = 1\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Razões trigonométricas do ângulo de 45º

Veremos agora como determinar, a partir do triângulo, as razões trigonométricas de um ângulo de 45º.

Num triângulo retângulo, se um dos ângulos mede 45º, o outro ângulo agudo também mede 45º, pois são ângulos complementares. Podemos então concluir que temos um ***triângulo retângulo isósceles***.

Observe que para qualquer um dos ângulos de 45º que escolhermos, o cateto oposto é igual ao cateto adjacente. Usando as fórmulas que revimos na introdução, vamos obter os valores abaixo. Acompanhe:



$$\text{sen}\,45° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\,45° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjaccente}} = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Na tabela trigonométrica os valores de sen, cos e tg de 45º são:

sen 45º = 0,70711
cos 45º = 0,70711
tg 45º = 1,00000

Considerando $\sqrt{2}$ = 1,41421, nas fórmulas, você confirmará estes valores. Observe que racionalizamos os denominadores das frações $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou seja, multiplicamos o denominador e o numerador da fração por $\sqrt{2}$ e encontramos $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Fazemos isso por ser muito mais simples dividir 1,41421 por 2 do que dividir 1 por 1,41421; mas nos dois casos o resultado seria 0,70711.

A altura de um triângulo equilátero

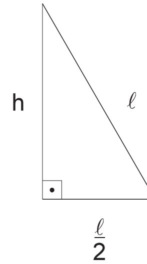
Em qualquer triângulo podemos sempre traçar três alturas. Num triângulo equilátero, já que os três lados são iguais, bem como os três ângulos (cada um mede 60º), as três alturas terão a mesma medida. No triângulo equilátero da ilustração do meio, traçamos uma delas (relativa à base):

O bserve que, num triângulo equilátero qualquer, a altura é também ***mediana*** (divide o lado oposto em duas partes iguais) e ***bissetriz*** (divide o ângulo do vértice em dois ângulos iguais), conforme se vê nas figuras.

Observe também que a altura divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos com as mesmas medidas de ângulos e lados.

Usando o Teorema de Pitágoras podemos calcular a medida da altura h em função do lado ℓ:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$



$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4\ell^2 - \ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Assim, conhecendo a medida do lado de um triângulo equilátero, você pode calcular sua altura pela fórmula que acabamos de encontrar. No entanto você pode sempre refazer nosso raciocínio, aplicando o Teorema de Pitágoras, tal como acabamos de fazer; é sempre uma ótima solução.

Observação importante

Se o triângulo não for equilátero, mas sim retângulo, com ângulos agudos medindo 30º e 60º, um dos catetos será sempre a metade da hipotenusa, e o outro é a altura de um triângulo equilátero, cujo lado será igual à hipotenusa (faça uma figura para verificar isso!).

EXEMPLO 3

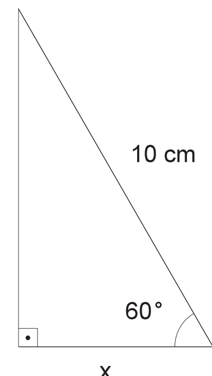
Calcule a altura de um triângulo equilátero de lado 6 cm.

Solução:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

EXEMPLO 4

Num triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede 60º e a hipotenusa mede 10 cm. Calcule a medida do cateto adjacente ao ângulo dado.



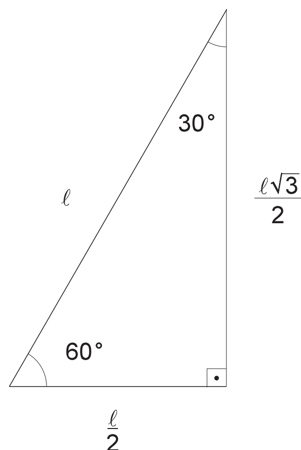
Solução:

O triângulo descrito no problema pode ser representado como na figura. Pelas relações que acabamos de observar, o cateto adjacente ao ângulo de 60º é igual à metade da hipotenusa, e a resposta será x = 5 cm.

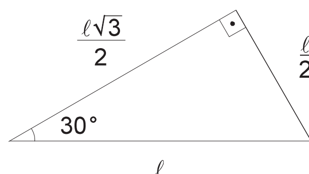
Razões trigonométricas dos ângulos de 30º e 60º

Podemos agora utilizar as razões trigonométricas para expressar as relações entre ângulos e lados de um triângulo retângulo com ângulos agudos de 30º e 60º.

Já vimos que, num triângulo desse tipo (veja a figura), se a hipotenusa mede ℓ, os catetos medem $\frac{\ell}{2}$ e $\ell\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Considerando primeiramente o ângulo de 30º, teremos:



$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2}\cdot\frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\ell\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Procedendo da mesma forma para o ângulo de 60º , encontramos:

$$\text{sen}\,60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2}\cdot\frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjaccente}} = \frac{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\ell} = \sqrt{3}$$

No exercício 5, da Aula 40, você verificou que, se dois ângulos são complementares, o seno de um é igual ao co-seno do outro.

Nesta aula, confirmamos esse fato, mais uma vez, para os ângulos de 30º e 60º.

$$\text{sen } 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Usando a tabela trigonométrica, você encontra:

ÂNGULO	SENO	CO-SENO	TANGENTE
30º	0,50000	0,86603	0,57735
60º	0,86603	0,50000	1,73205

Considerando então $\sqrt{3}$ » 1,73205, você pode confirmar os valores.

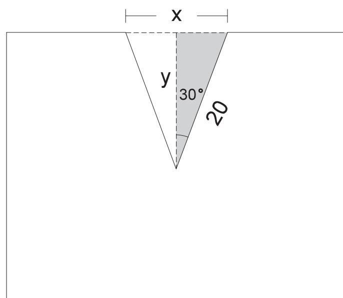
Resumindo:

ÂNGULO	SENO	CO-SENO	TANGENTE
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Um exemplo na indústria

Um bloco de aço deve receber uma fenda como se vê no projeto (vista frontal). Observe que as medidas podem ser suficientes para descrever a peça, mas não são as medidas necessárias para quem fará o corte. Essa pessoa precisará mesmo é da largura do corte e sua profundidade. Só assim poderá marcar na peça os pontos de corte.

Primeiro, vejamos o que se pode concluir sobre a largura **x** do corte. O triângulo cortado é isósceles (dois lados medindo 20), contém um ângulo de 60º (fig. 1). Como os outros dois ângulos devem ser iguais (porque o triângulo é isósceles) então cada um vai medir:



$$\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

Assim, descobrimos que, na verdade, trata-se de um triângulo equilátero, e a largura só pode ser 20:

largura = 20

Agora corte esse triângulo equilátero em dois triângulos retângulos para descobrir a medida da profundidade **y** do corte. Você pode observar na figura acima que essa medida é igual à altura do triângulo equilátero. Como já sabemos que essa altura é $\ell\frac{\sqrt{3}}{2}$, basta substituir o valor de ℓ, que é 20, e obter:

$$\text{Profundidade} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \cong 17,32$$

Outro exemplo prático

Uma pessoa com problemas no joelho foi ao ortopedista. O médico recomendou fisioterapia diária, que consistia em sentar-se numa cadeira alta e elevar a perna até o ângulo de 60º com um peso no pé.

Como a pessoa não podia ir diariamente ao fisioterapeuta decidiu fazer o exercício em casa. Sua dúvida é: como marcar a elevação de 60º?

Vamos desenhar um triângulo retângulo com ângulos agudos de 30º e 60º, de modo que a hipotenusa do triângulos seja do tamanho da perna da pessoa.

Sabemos que a altura **x** é a metade do comprimento da perna porque:

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{\text{perna}} = \frac{1}{2}$$

Como $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, temos $\frac{x}{\text{perna}} = \frac{1}{2}$. Logo, **x** é metade da perna.

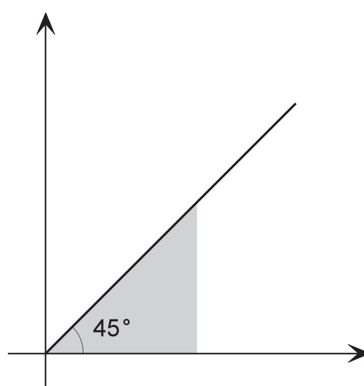
Veja como fica fácil marcar a altura que a perna deve ser elevada, basta medir a perna (abaixo do joelho), dividir por dois e marcar essa altura na parede, por exemplo.

Uma aplicação em gráficos

Observe os gráficos da figura. Nesse gráfico estão representadas as três retas que ilustram o desempenho de três empresas num certo setor pesquisado. Podemos comparar esses desempenhos apenas visualmente ou com maior precisão, dependendo dos objetivos da análise.

É fácil concluir que o melhor desempenho foi o da empresa A, e o pior, o da empresa C: basta uma comparação visual dos gráficos. No entanto, poderemos fazer um estudo mais preciso das diferenças de crescimento, se descobrirmos os ângulos que cada uma dessas retas faz com o eixo horizontal.

Usando os conhecimentos desta aula e observando que o gráfico da empresa B passa sempre pela diagonal dos quadradinhos, podemos dizer que temos um ângulo de 45º.

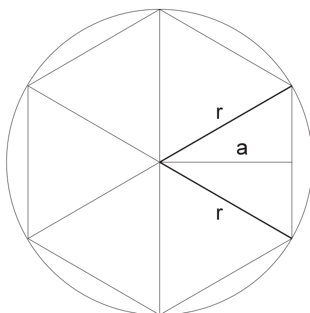


Com o auxílio de uma régua também podemos descobrir os ângulos formados pelas outras duas retas.

Confirme no gráfico original as medidas obtidas nas figuras. Como vê, um dos catetos é a metade da hipotenusa e podemos marcar, então, os ângulos. No primeiro caso (da empresa A), o ângulo formado com o eixo horizontal é de 60º, já que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. No segundo caso (da empresa C), o ângulo formado com o eixo horizontal é de 30º, pois $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Exercício 1

Nos projetos ilustrados, quanto medem o ângulo α e a altura **h**?



Exercício 2

Num hexágono regular (lados e ângulos iguais), o segmento **a** da figura chama-se ***apótema*** e o segmento **r** é o raio da circunferência circunscrita. Sabendo-se que um hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros, obtenha **a** e **r** em função do lado ℓ do hexágono.

Exercício 3

No exercício 6 da aula 40 verificamos que $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$. Obtenha tg 30º, tg 45º e tg 60º, usando essa relação.

Exercício 4

Determine a medida do lado de um quadrado cuja diagonal é:

a) $4\sqrt{2}$

b) 2 cm

Exercício 5

Uma parede foi azulejada, como mostra a figura. Calcule a altura aproximada da parede, sabendo que cada azulejo é um quadrado de 15 cm de lado e que, na vertical, cabem 13 azulejos inteiros, enfileirados.

AULA

42

A lei dos co-senos

Introdução

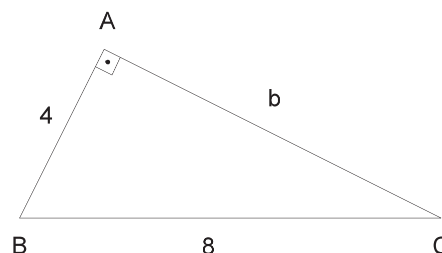
Utilizando as razões trigonométricas nos triângulos retângulos, podemos resolver vários problemas envolvendo ângulos e lados. Esse tipo de problema é conhecido como resolução de triângulos. Conhecendo dois elementos de um triângulo retângulo, quase sempre podemos determinar os outros elementos, como veremos nos exemplos a seguir:

Conhecendo dois lados, e usando o Teorema de Pitágoras, determinamos a medida do terceiro lado:

$$b^2 = 8^2 - 4^2$$

$$b = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$$

$$b = 4\sqrt{3} \cong 6,92$$



Usando as razões trigonométricas e consultando a tabela trigonométrica, determinamos os ângulos agudos.

$$\cos \hat{B} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

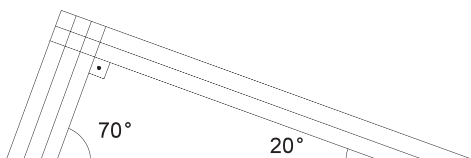
Se conhecermos um lado e um ângulo, poderemos determinar os outros dois lados:

$$\text{sen}\,50^\circ = \frac{6}{a} \Rightarrow a = \frac{6}{\text{sen}\,50^\circ} = \frac{6}{0,766} \cong 7,83$$

$$\text{tg}\,50^\circ = \frac{6}{c} \Rightarrow c = \frac{6}{\text{tg}\,50^\circ} = \frac{6}{1,192} \cong 5,03$$

Sabendo que os ângulos agudos são complementares, determinamos o outro ângulo: $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$

Conhecendo os dois ângulos agudos, podemos construir vários triângulos semelhantes (com os mesmos ângulos). Portanto, essa é a única situação indeterminada na resolução de triângulos retângulos.



A hipotenusa unitária

Vimos nas aulas anteriores que as razões trigonométricas de um ângulo agudo não dependem do triângulo retângulo escolhido. Na figura abaixo temos:

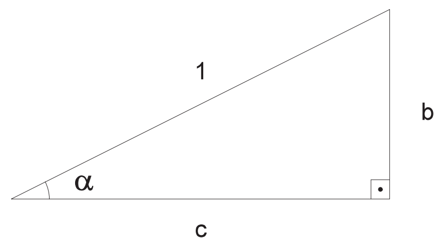
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_3}{a_3} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

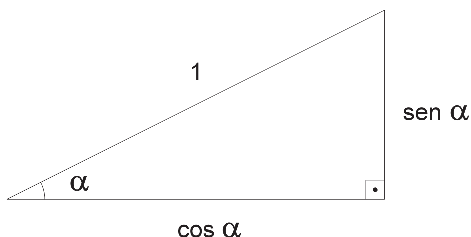
Observamos que, para o cálculo do seno e do co-seno de um ângulo, dividimos um dos catetos pela hipotenusa do triângulo retângulo correspondente. Já que podemos obter esse valor com qualquer um dos triângulos semelhantes, é muito prático trabalharmos com um triângulo retângulo cuja hipotenusa seja igual a 1.

$$\text{sen}\, a = \frac{b}{1} = b$$

$$\cos a = \frac{c}{1} = c$$

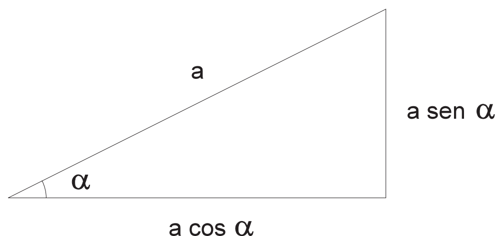


Apenas nesse caso, em que a hipotenusa do triângulo retângulo é igual a 1, podemos obter a medida dos catetos conhecendo seus ângulos agudos.



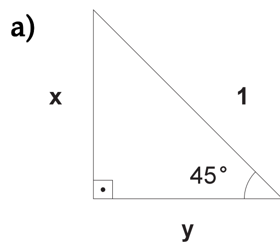
Observação

Para uma hipotenusa qualquer teríamos:

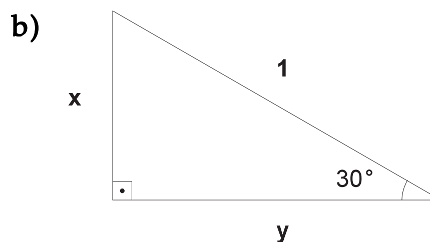


Veja, nos triângulos retângulos abaixo, a medida dos catetos:

a)



b)



$x = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$

$y = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ @ 0,866

A variação do seno e do co-seno

Na figura a seguir, temos uma circunferência cujo raio é igual a 1 dm (um decímetro). Para vários ângulos diferentes, podemos obter os valores do seno e do co-seno (em decímetros) apenas medindo os catetos dos triângulos formados.

BP = sen AÔP OB = cos AÔP
CQ = sen AÔQ OC = cos AÔQ
DR = sen AÔR OD = cos AÔR
e assim por diante...

A partir dessa figura, podemos concluir que:

I) Quanto maior o ângulo, maior a medida do cateto oposto (ou seja, maior o valor do seno).
II) Quanto maior o ângulo, menor a medida do cateto adjacente (ou seja, menor o valor do co-seno).

Senos e co-senos de ângulos obtusos

Para obtermos um ângulo α obtuso (maior que 90º), desenhamos um triângulo retângulo (semelhante aos que desenhamos para os ângulos agudos do item anterior) e, como estamos considerando a hipotenusa igual a um (1 dm), definimos que:

sen α = HM e cos α = OH

Note que o seno do ângulo obtuso α é igual ao seno do ângulo agudo 180º – α e que o co-seno do ângulo α é do mesmo comprimento que o co-seno de 180º – α. Entretanto, como está do "outro lado" em relação ao centro do círculo, terá sinal negativo.

Resumindo:
sen α = sen (180º – α)
cos α = – cos (180º – α)

Veja alguns exemplos:

a) 30º + 150º = 180º

sen 150º = sen 30º = $\frac{1}{2}$

cos 150º = – cos 30º = – $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) 80º + 100º = 180º

sen 100º = sen 80º = 0,98481

cos 100º = – cos 80º = – 0,17365

c) 45º + 135º = 180º

sen 135º = sen 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos 135º = – cos 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Veja agora a relação entre lados e ângulos de um triângulo não-retângulo (acutângulo ou obtusângulo).

O triângulo acutângulo

No triângulo acutângulo ABC (que tem três ângulos agudos), traçamos uma de suas alturas e obtemos dois triângulos retângulos:

o triângulo ABH e o triângulo ACH.

Chamando de **x** a medida de BH, a base BC do triângulo ABC fica dividida em dois segmentos de medidas **x** e **a − x**.

Usando o Teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos retângulos, temos:

1º triângulo: $b^2 = h^2 + (a - x)^2$
2º triângulo: $c^2 = h^2 + x^2$

Subtraindo essas duas equações:

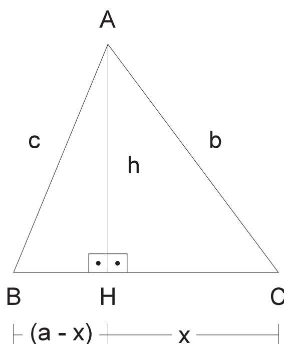
$b^2 - c^2 = (a - x)^2 - x^2$
$b^2 - c^2 = a^2 - 2ax + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}$
$b^2 - c^2 = a^2 - 2ax$

Sabendo que: $\cos \hat{B} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = c \cdot \cos \hat{B}$, efetuamos a substituição:

$b^2 - c^2 = a^2 - 2ac \cos \hat{B}$

Logo, $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}}$

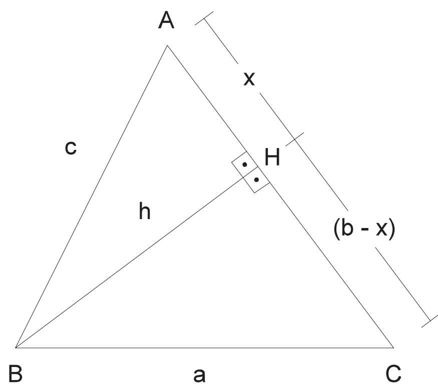
Da mesma forma, podemos achar **c**, conhecendo a medida dos dois outros lados e seu ângulo oposto. Para isso, fazemos HC medindo **x** e BH medindo **a − x**.



$$
\begin{array}{rl}
 & c^2 = h^2 + (a - x)^2 \\
- & b^2 = h^2 + x^2 \\
\hline
 & c^2 - b^2 = (a - x)^2 - x^2 \\
 & c^2 - b^2 = a^2 - 2ax
\end{array}
$$

Como **x** agora é igual a $b \cos \hat{C}$, temos: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}}$

Para obter uma expressão para o cálculo de **a**, podemos traçar outra altura **h** do triângulo ABC, relativa ao lado AC.



$$
\begin{array}{rl}
 & a^2 = h^2 + (b - x)^2 \\
- & c^2 = h^2 + x^2 \\
\hline
 & a^2 - c^2 = (b - x)^2 - x^2 \\
 & a^2 - c^2 = b^2 - 2bx \quad \text{e} \quad x = c \cdot \cos \hat{A}
\end{array}
$$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$

Resumindo:

Num triângulo acutângulo, valem as relações:

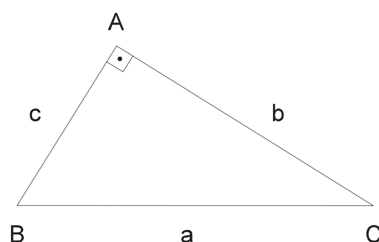
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Para você saber mais

Ao transformar um triângulo retângulo num triângulo acutângulo, o ângulo reto diminui e, conseqüentemente, o lado oposto também diminui.

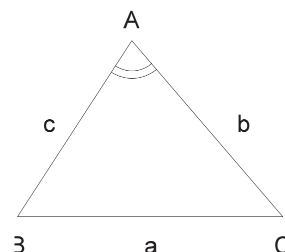
Observe as figuras:

Triângulo retângulo



$a^2 = b^2 + c^2$

Triângulo acutângulo



$a^2 < b^2 + c^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

O triângulo obtusângulo

Veja o que ocorre quando um triângulo retângulo se transforma num triângulo obtusângulo:

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 > b^2 + c^2$

Procedendo como no caso do triângulo acutângulo, descobrirmos de quanto a soma $\mathbf{b^2 + c^2}$ precisa ser acrescida para se igualar a $\mathbf{a^2}$.

A fim de facilitar a visualização, vamos girar o triângulo obtusângulo, colocando o lado AC como base:

Traçando a altura relativa ao lado AC, formamos um novo segmento AH, que mede **x** e dois triângulos retângulos: triângulo BHA e triângulo BHC.

Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos BHA e BHC e subtraindo as equações obtidas, temos:

$$\begin{array}{rl} & a^2 = h^2 + (b + x)^2 \\ - & c^2 = h^2 + x^2 \\ \hline & a^2 - c^2 = (b + x)^2 - x^2 \\ & a^2 - c^2 = b^2 + 2bx \quad \rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bx \end{array}$$

No triângulo retângulo triângulo BHA, temos $\cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{x}{c}$

$$\text{logo } x = \cos(180^\circ - \hat{A})$$

$$\cos(180^\circ - \hat{A}) = -\cos \hat{A}$$

$$x = -c \cos \hat{A}$$

Substituindo **x** na equação:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cdot \cos \hat{A}) \quad \text{ou}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$$

Assim, concluímos que as expressões obtidas para triângulos acutângulos são válidas para triângulos obtusângulos.

EXEMPLO 1

Uma pessoa viajou de A para C passando por B. De A até B, percorreu 25 km e de B até C, 42 km. Os percursos AB e BC formam entre si um ângulo de 150º. Se fosse possível ir em linha reta de A para C, qual seria a economia de quilometragem?

Solução:

$x^2 = 25^2 + 42^2 - 2 \cdot 25 \cdot 42 \cdot \cos 150^\circ$

$x^2 = 625 + 1764 - 2 \cdot 1050\ (- \cos 30^\circ)$

$x^2 = 2389 + 2100 \cdot 0{,}866$

$x^2 = 2389 + 1818{,}6$

$x^2 = 4207{,}6$

x @ 65 km

Indo de A para C, passando por B, gasta-se 25 + 42 = 67 km; e de A para C em linha reta, aproximadamente, 65 km. Desse modo, a economia de quilometragem seria de 2 km.

EXEMPLO 2

Se o ângulo entre as direções AB e BC fosse menor, o caminho direto seria mais vantajoso?

Solução:

Vejamos, como exemplo, duas situações:

a) Se o ângulo for reto:

$x^2 = 25^2 + 42^2$

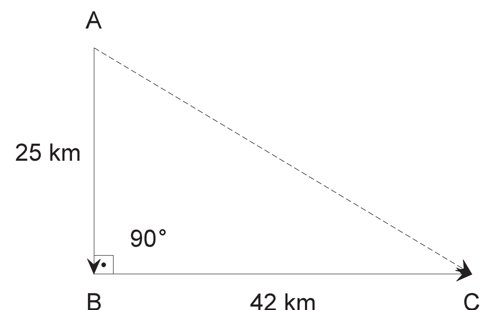
$x^2 = 625 + 1764$

$x^2 = 2389$

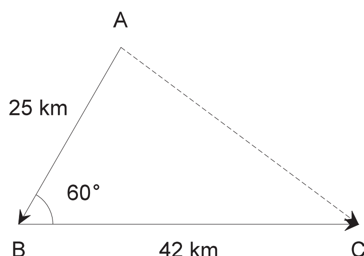
x @ 49 km

67 km – 49 km = 18 km

Seriam economizados 18 km.



b) Se o ângulo for agudo igual a 60º:



$x^2 = 25^2 + 42^2 - 2 \cdot 25 \cdot 42 \cdot \cos 60^\circ$

$x^2 = 625 + 1764 - 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 1239$

$x \cong 35$ km

67 km – 35 km = 32 km

Seriam economizados 32 km.

Quanto menor o ângulo entre AB e BC, melhor seria ir direto de A para C, pois essas cidades seriam mais próximas e a diferença entre os dois percursos aumentaria.

Exercícios

Exercício 1

Dados os seguintes elementos de um triângulo ABC: $\hat{A} = 30^\circ$, AB = 8 m, CB = 5 m. Calcule AC.

Exercício 2

Os lados de um triângulo medem 5 cm, 7 cm e 10 cm.

a) Classifique esse triângulo quanto aos ângulos.

b) Obtenha o valor aproximado do maior ângulo do triângulo.

Exercício 3

Determine:

a) sen 120º

b) cos 120º

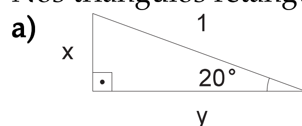
c) sen 95º

d) cos 95º

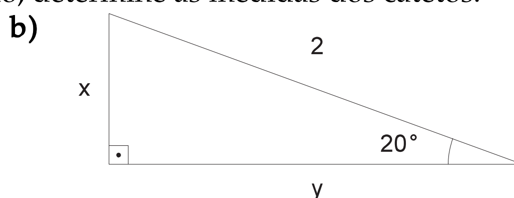
Exercício 4

Nos triângulos retângulos abaixo, determine as medidas dos catetos.

a)



b)



Exercício 5

Complete com = , > ou <.

a) sen 30º .... sen 45º

b) cos 30º .... cos 45º

c) sen 70º .... sen 110º

d) cos 70º .... cos 110º

e) sen 70º .... cos 20º

f) cos 30º .... sen 60º

g) cos 120º .... cos 150º

h) sen 130º .... sen 100º

AULA

43

A lei dos senos

Introdução

Na Aula 42 vimos que a Lei dos co-senos é uma importante ferramenta matemática para o cálculo de medidas de lados e ângulos de triângulos quaisquer, isto é, de triângulos de "forma" arbitrária.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Note que se $\hat{A} = 90^o$, então $\cos \hat{A} = 0$ e $a^2 = b^2 + c^2$, confirmando o Teorema de Pitágoras.

Para utilizar a lei dos co-senos no cálculo da medida de um dos lados de um triângulo, precisamos conhecer as medidas dos outros dois lados e a medida do ângulo oposto ao lado desconhecido. Nem sempre temos esses dados. O que podemos fazer quando conhecermos, por exemplo, um lado e dois ângulos? A solução para problemas desse tipo é o assunto desta aula.

Nossa aula

Calculando a área de um triângulo qualquer

Sabemos que a área de um triângulo pode ser obtida pela fórmula:

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$ ou, simplesmente, $$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

em que **b** é a base e **h** a altura.

Percebemos, então, que é preciso saber a medida de um dos lados do triângulo e da altura relativa a esse lado, como nos exemplos a seguir:

Nos três casos temos, $S = \frac{b \cdot h}{2}$ sendo que no triângulo retângulo há a facilidade de termo **h = c**. Assim, a área é calculada multiplicando os dois catetos e dividindo o resultado por 2. Nos outros dois casos precisamos calcular **h**.

Para o triângulo acutângulo, conhecendo o ângulo Â, temos:

$$\text{sen}\ \hat{A} = \frac{h}{c} \qquad \text{ou} \qquad c \cdot \text{sen}\ \hat{A} = h$$

No triângulo obtusângulo, conhecendo o ângulo Â e considerando o triângulo retângulo formado pela altura, pelo prolongamento do lado **a** e pelo lado **c**, temos:

$$\text{sen}\ (180^o - \hat{A}) = \frac{h}{c} \qquad \text{ou} \qquad c \cdot \text{sen}\ (180^o - \hat{A}) = h$$

Já vimos na Aula 42, que sen (180º – Â) = sen Â. Sabendo que o seno de um ângulo qualquer é igual ao seno do seu suplemento, concluímos que, nos dois casos, h = c · sen Â e substituindo **h** na fórmula de cálculo da área, encontramos:

$$S = \frac{b \cdot c\,\text{sen}\,\hat{A}}{2}$$

EXEMPLO 1

Calcule a área total da figura:

Solução:

A área do triângulo ABC é:

$$S_1 = \frac{12 \cdot 30 \cdot \text{sen}120^\circ}{2} =$$

$$= 180 \cdot \text{sen } 60^\circ =$$

$$= 180 \cdot \frac{1}{2} = 90 \text{ mm}^2$$

A área do triângulo DBC é:

$$S_2 = \frac{50 \cdot 50 \cdot \text{sen}45^\circ}{2} = 1250 \cdot \text{sen } 45^\circ \cong 1250 \cdot 0{,}7 = 875 \text{ mm}^2$$

Portanto, a área total da figura $S = S_1 + S_2 =$ **965 mm²** ou **9,5 cm²**.

Observação:

Essa fórmula para o cálculo da área é válida para qualquer triângulo, inclusive para o triângulo retângulo.

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } 90^\circ}{2}$$ e, como sen 90º = 1,

temos:

$$\boxed{S = \frac{b \cdot c}{2}}$$

Obtendo a lei dos senos

Para obter a fórmula $S = \frac{1}{2}\, b \cdot c \text{ sen } \hat{A}$, utilizamos o seno do ângulo $\hat{A}$ para encontrar **h**. Mas também poderíamos utilizar o seno do ângulo $\hat{C}$:

$h = a \text{ sen } \hat{C}$ e $S = \frac{1}{2}\, b \cdot a \text{ sen } \hat{C}$.

Como $h = c \text{ sen } \hat{A}$ e $h = a \text{ sen } \hat{C}$, temos:

$$c \cdot \text{sen } \hat{A} = a \text{ sen } \hat{C}$$

ou

$$\frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{a}{\text{sen}\hat{A}}$$

Generalizando esta conclusão também para o ângulo $\hat{B}$ e seu lado oposto **b**:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

A igualdade das razões entre cada um dos lados de um triângulo e o seno do respectivo ângulo oposto é chamada de **lei dos senos**.

O triângulo e a circunferência

No dicionário, encontramos as seguintes definições:

Inscrito → Traçado dentro.

Circunscrito → Limitado totalmente por uma linha.

Em geometria, esses termos são usados com um pouco mais de precisão. Observe os exemplos:

a) O retângulo está inscrito no losango ou o losango está circunscrito ao retângulo

(observe que todos os vértices do retângulo tocam os lados do losango).

b) A esfera está inscrita no cubo ou o cubo está circunscrito à esfera

(todas as faces do cubo tocam a esfera).

c) O hexágono está inscrito no círculo ou o círculo está circunscrito ao hexágono

(todos os vértices do hexágono tocam o círculo).

d) O círculo está inscrito no triângulo retângulo ou o triângulo retângulo está circunscrito ao círculo

(todos os lados do triângulo tocam o círculo).

Mais uma vez, o triângulo se confirma como uma figura especial. É sempre possível inscrever uma circunferência em um triângulo; além disso, sempre podemos circunscrever uma circunferência a um triângulo.

Para a circunferência circunscrita ao triângulo, e cujo raio é R, temos o seguinte resultado:

$$2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Observe ainda que, no caso do triângulo retângulo, sen $\hat{A}$ = sen 90º = 1 e

$$2R = a = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

EXEMPLO 2

Calcular os outros dois lados de um triângulo que mede 5 cm de um lado e tem ângulo de 80º e outro de 40º, como mostra a figura:

Solução:

$$\frac{5}{\text{sen } 60°} = \frac{b}{\text{sen } 80°} \qquad \frac{5}{0,866} = \frac{b}{0,985}$$

$$b = \frac{5 \cdot 0,985}{0,866} = \mathbf{5,687}$$

$$\frac{5}{\text{sen } 60°} = \frac{c}{\text{sen } 40°} \qquad \frac{5}{0,866} = \frac{c}{0,643} \qquad c = \frac{5 \cdot 0,643}{0,866} = \mathbf{3,712}$$

EXEMPLO 3

Um triângulo de lados 6, 8 e 8 está inscrito num círculo. Determine seus ângulos e o raio do círculo.

Solução:

O triângulo do problema é isósceles, como o representado na figura abaixo. Inicialmente, vamos descobrir a medida do ângulo do vértice ($\hat{A}$):

$$6^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos \hat{A}$$

$$36 = 128 - 128 \cos \hat{A}$$

$$-92 = -128 \cos \hat{A} \quad \rightarrow \quad \cos \hat{A} = \frac{92}{128} \approx 0,719$$

Consultando a tabela trigonométrica, $\hat{A} \approx 44º$.

Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ da base são iguais e medem: $\hat{B} = \hat{C} » \frac{180° - 44°}{2} » 68°$

Para determinar o raio do círculo, podemos utilizar qualquer um dos lados e o respectivo ângulo oposto. Temos, então:

$$2R = \frac{6}{\text{sen } 44°} \qquad 2R = \frac{6}{0,695} @ 8,6 \qquad R \cong 4,3 \qquad \text{ou}$$

$$2R = \frac{8}{\text{sen } 68°} \qquad 2R = \frac{8}{0,927} @ 8,6 \qquad R \cong 4,3$$

Assim, os ângulos são $\hat{A}$ = 44º e $\hat{B}$ = $\hat{C}$ = 68º. E o raio mede, aproximadamente, 4,3.

Exercícios

Exercício 1

a) Calcule o raio do círculo circunscrito num triângulo equilátero de lado **a**.

b) Calcule a área do triângulo equilátero de lado **a**.

Exercício 2

Calcule a área do hexágono regular de lado **a**, formado por seis triângulos equiláteros.

Exercício 3

Para calcular a área aproximada de um terreno irregular, os agrimensores subdividem o terreno em triângulos formados a partir de um mesmo vértice no interior do terreno. Usando o teodolito, eles marcam os ângulos formados ao redor desse ponto e medem as distâncias do ponto até a fronteira do terreno.

Observe a figura e calcule a área aproximada do terreno, usando as medidas tomadas por um agrimensor:

OA = 52 m

OB = 63 m

OC = 59 m

OD = 40 m

OE = 45 m

OF = 50 m

OG = 48 m

Exercício 4*

O terreno correspondente à figura ABCDE, abaixo, foi vendido a R$ 40,00 o metro quadrado. Conseqüentemente foi vendido por:

a) R$ 7.800,00
b) R$ 5.000,00
c) R$ 100.000,00
d) R$ 7.960,00
e) R$ 1.150,00

* Exercício aplicado na PUC–SP.

Exercício 5*

No triângulo ABC da figura, em que R é o raio da circunferência, o ângulo $\hat{A}$ é oposto ao lado **a**, que mede $\frac{3R}{2}$. Calcule o valor de sen $\hat{A}$.

* Fonte: *Matemática Aplicada – 2º grau*, Ed. Moderna, Luiz Marcio Imenes, Fernando Trotta e José Jakubovic.

AULA

44

Distâncias inacessíveis

Introdução

Na Aula 20 aprendemos a calcular distâncias que não podiam ser medidas diretamente. Nessa aula, os conceitos utilizados foram a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras. Agora, mostraremos métodos para o cálculo de distâncias inacessíveis, que vão utilizar os conceitos de trigonometria aprendidos entre as Aulas 29 e 43. A aplicação desses métodos necessita de um instrumento capaz de medir ângulos, usado por agrimensores, topógrafos e engenheiros: o **teodolito**.

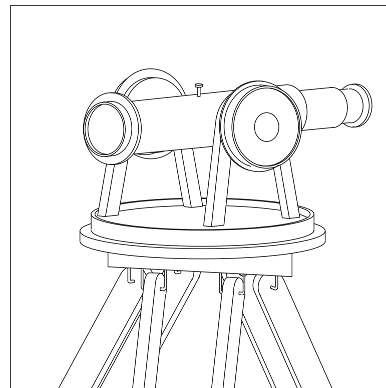
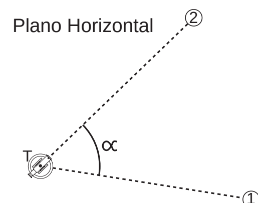
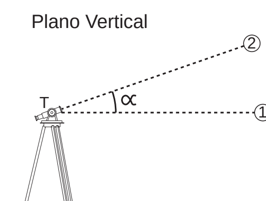


Ilustração de um teodolito.

O teodolito mede ângulos horizontais e verticais com suas duas escalas circulares graduadas em graus.



Se o teodolito T e os objetos 1 e 2 estão em um mesmo plano horizontal, podemos medir o ângulo $1\hat{T}2$.



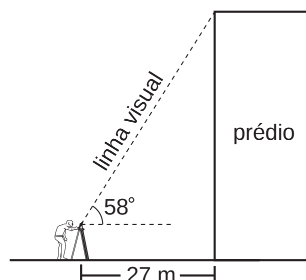
Visando o objeto 2, podemos medir o ângulo que a reta T2 faz com a reta horizontal T1.

Com essas duas utilizações do teodolito, que nos permitem calcular ângulos horizontais e verticais, poderemos agora utilizar a lei dos co-senos, a lei dos senos e a tabela trigonométrica para calcular distâncias inacessíveis. Os principais métodos estão nos exemplos da nossa aula.

Para que você possa entender bem os métodos que utilizaremos nos exemplos a seguir, é conveniente que recorde as Aulas 39 e 40, nas quais introduzimos os conceitos de seno, co-seno e tangente, e, também, as Aulas 42 e 43, nas quais aparecem as fórmulas da lei dos co-senos e da lei dos senos. Para os cálculos, utilizaremos os valores da tabela trigonométrica que se encontra na Aula 40. Ela também será necessária para os exercícios.

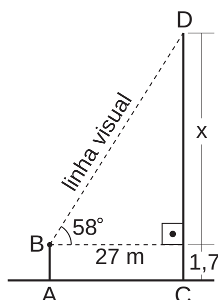
EXEMPLO 1

Para determinar a altura de um prédio, o topógrafo colocou seu teodolito na praça em frente. Com uma trena, ele mediu a distância do teodolito ao prédio e encontrou 27 m. Mirando o alto do prédio, ele verificou, na escala do teodolito, que o ângulo formado por essa linha visual com a horizontal é de 58º. Se a luneta do teodolito está a 1,7 m do chão, qual é a altura do prédio?



Solução:

Na figura abaixo, AB é a altura do teodolito e CD é a altura do prédio.



Vamos calcular o cateto **x** do triângulo retângulo que aparece na figura.

Temos: $\frac{x}{27} = \text{tg } 58^\circ$

Da tabela trigonométrica obtemos que a tangente de 58º é aproximadamente 1,6.

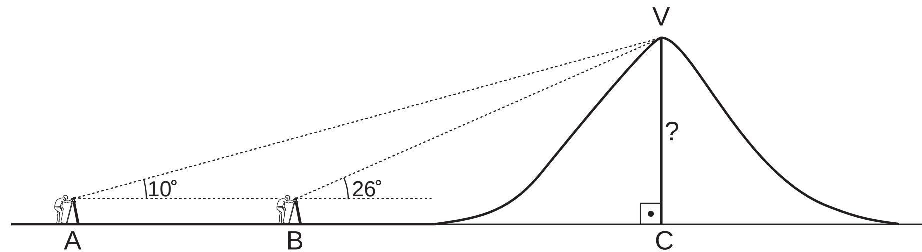
Assim, $\frac{x}{27} = 1{,}6$ $\qquad x = 1{,}6 \cdot 27 = 43{,}2$

A altura total do prédio será igual a esse valor mais 1,7, que é a altura da luneta do teodolito. Portanto, CD = 43,2 + 1,7 = 44,9 m.

A altura desse prédio é, então, de 44 metros e 90 centímetros, ou seja, aproximadamente 50 metros.

EXEMPLO 2

Neste exemplo determinaremos a altura de um morro em relação a uma região plana que existe em volta. Para isso, foi preciso fazer duas medições com o teodolito. Inicialmente, o teodolito foi colocado em um ponto A. Mirando o ponto V, o mais alto do morro, verificamos que o ângulo dessa linha visual com a horizontal era de 10º. Em seguida, o topógrafo aproximou-se do morro e fixou o teodolito no ponto B. Nessa posição, mirando o ponto V, o mais alto do morro, ele verificou que o ângulo da linha visual com a horizontal passou a ser de 26º. Sabendo que a distância AB (medida com a trena) era de 100 m, qual é a altura do morro?



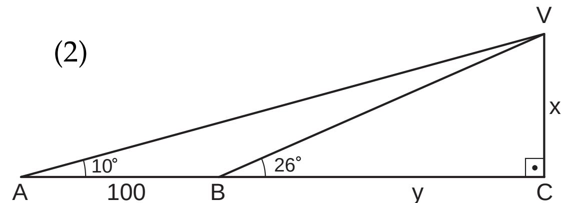
Solução:

Com os dados obtidos pelo topógrafo, vamos calcular a altura do morro. Na figura a seguir, mostramos esses dados sem considerar a altura do teodolito.

Determinando BC = y, temos as relações:

$$\frac{VC}{AC} = tg\,10^{o} \Rightarrow \frac{x}{100 + y} = 0,17633 \qquad (1)$$

$$\frac{VC}{BC} = tg\,26^{o} \Rightarrow \frac{x}{y} = 0,48773 \qquad (2)$$



Da relação (1) tiramos x = y . 0,17633 + 17,633.
Da relação (2) tiramos x = y . 0,48773.

Igualando, temos:

$y \cdot 0,48773 = y \cdot 0,17633 + 17,633$
$y \cdot 0,48773 - y \cdot 0,17633 = 17,633$
$y\,(0,48773 - 0,17633) = 17,633$
$y \cdot 0,3114 = 17,633$

$$y = \frac{17,633}{0,3114} = 56,62 \text{ (aproximando)}$$

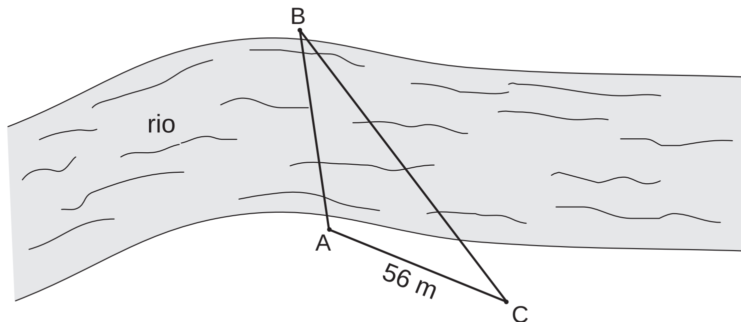
e $x = y \cdot 0,48773 = 27,61$ m.

Somando a esse valor a altura do teodolito (1,7 m), concluímos que a altura do morro em relação à região plana em volta é de 27,61 + 1,7 = 29,31 m.

Vamos ver, a seguir, um outro exemplo muito comum no campo ou nas fazendas, onde diversas medidas não podem ser feitas diretamente.

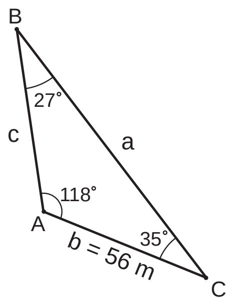
EXEMPLO 3

Em uma região há um rio com curso irregular. Sua largura não é constante e ele faz muitas curvas. Entre os ponto A e B, situados em margens opostas, deseja-se construir uma ponte. Para isso, é necessário determinar a distância AB. O topógrafo, que está na margem inferior do desenho que vemos abaixo, assinala com uma estaca um ponto C qualquer. Com a trena, ele mede a distância AC e encontra 56 m. Com o teodolito ele mede os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ encontrando 118º e 35º, respectivamente. Qual será o valor da distância AB?



Solução:

Vamos analisar o triângulo ABC. Se $\hat{A} = 118^\circ$ e $\hat{C} = 35^\circ$, então podemos calcular o ângulo $\hat{B}$. Como sabemos, a soma dos três ângulos é 180º.



$$118^\circ + \hat{B} + 35^\circ = 180^\circ \rightarrow \hat{B} = 27^\circ$$

Determinando AB = C e AC = b, a lei dos senos nos informa que:

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \quad \text{ou seja,} \quad \frac{c}{\text{sen } 35^\circ} = \frac{56}{\text{sen } 27^\circ}$$

Utilizando os valores da tabela trigonométrica, temos:

$$\frac{c}{0,57358} = \frac{56}{0,45399}$$

Assim,

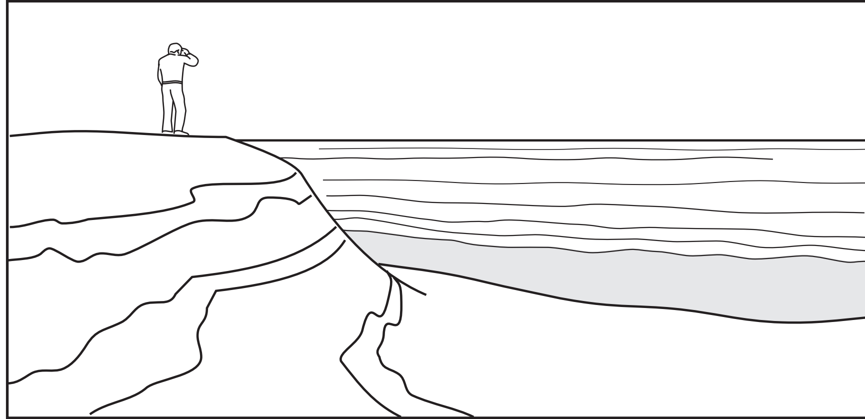
$$c = \frac{56 \cdot 0,57358}{0,45399} = 70,75$$

Portanto, naquela parte do rio, a distância AB é de 70,75 m.

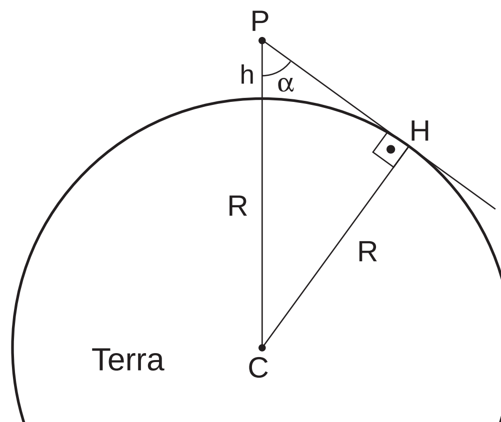
EXEMPLO 4

Um dos cálculos que, no passado, mais fascinaram os matemáticos era o da medida do raio da Terra. O engenhoso processo que vamos descrever já tinha sido imaginado pelos gregos da Antigüidade, mas, na época, não dava bons resultados porque os instrumentos de medida eram bastante precários.

Imagine que, do alto de um morro situado próximo ao mar, uma pessoa observa o oceano, vendo com nitidez a linha do horizonte.



Vamos, agora, imaginar um imenso triângulo que tem um vértice no centro da Terra, outro vértice na pessoa que está em cima do morro e o terceiro vértice na linha do horizonte que essa pessoa vê. O desenho será o seguinte:



Na figura acima, o ponto C é o centro da Terra e o ponto P é a pessoa que está situada a uma altura **h** em relação ao nível do mar. Para essa pessoa, o ponto H está na linha do horizonte e, como a reta PH é tangente à Terra, o ângulo $P\hat{H}C$ é reto. A altura **h** do morro é conhecida e o ângulo $\alpha = C\hat{P}H$ pode ser medido. Portanto, no triângulo CPH, o seno do ângulo α é igual a $\frac{CH}{CP}$, ou seja,

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{R}{h + R}$$ em que R, o raio da Terra, é a nossa incógnita.

Então, $(h + R)\ \text{sen}\ \alpha = R$

$h\ \text{sen}\ \alpha + R\ \text{sen}\ \alpha = R$

$h\ \text{sen}\ \alpha = R - R\ \text{sen}\ \alpha$

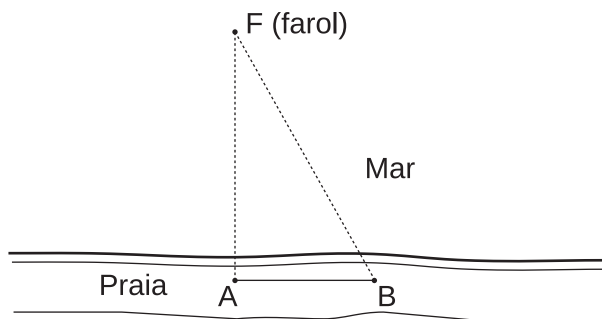
$h\ \text{sen}\ \alpha = R\ (1 - \text{sen}\ \alpha)$ ou $R = \dfrac{h\ \text{sen} a}{1 - \text{sen} a}$

Observe que conhecendo a altura **h** e o ângulo α podemos calcular o raio da Terra usando essa fórmula, mas, na prática, existem dificuldades. A altura **h** será sempre muito pequena em relação ao raio da Terra. Para se obter R com precisão, é preciso medir o ângulo α também com muita precisão, pois um pequeno erro na medida de α acarretará um erro muito grande na medida de R. Hoje, existem instrumentos eletrônicos que medem ângulos com precisão de 1 milésimo de grau, e as calculadoras científicas fornecem os senos dos ângulos com a necessária exatidão. Por exemplo, se a pessoa P está a uma altura de 2 km em relação ao nível do mar, o ângulo α será de 88,657 graus. Com uma calculadora científica, encontramos o seno desse ângulo igual a 0,9996872 e o raio da Terra aproximadamente igual a 6390 km.

Exercícios

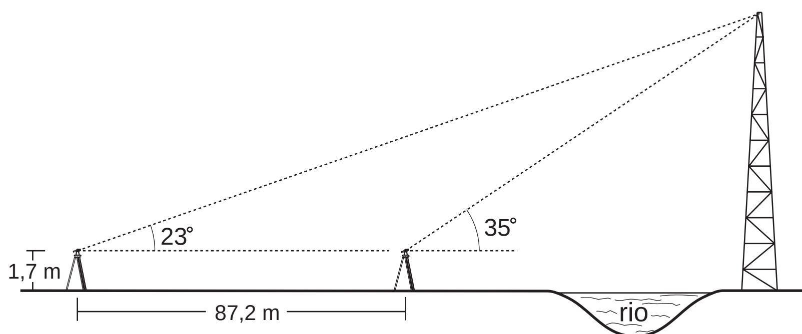
Exercício 1

Na figura abaixo, o ponto F é um farol que está numa ilha próxima ao continente. Na praia, foram assinalados dois pontos, A e B, tais que AB = 132m, $F\hat{A}B = 90^o$ e $A\hat{B}F = 85^o$. Calcule a distância AF.



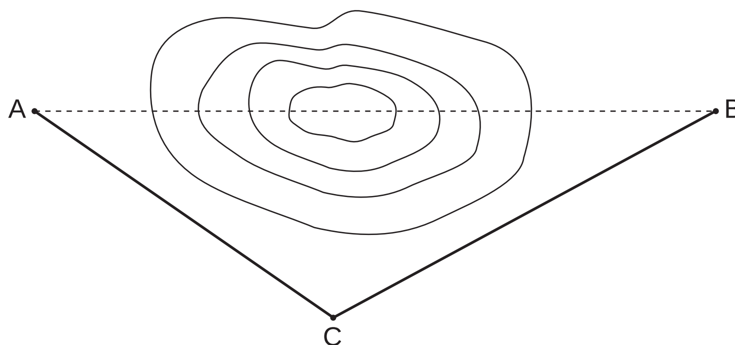
Exercício 2

O topógrafo utilizou o mesmo método descrito no Exemplo 2 desta aula para calcular a altura de uma torre que se encontra do outro lado de um rio. Calcule sua altura, utilizando os dados que estão na figura abaixo.



Exercício 3

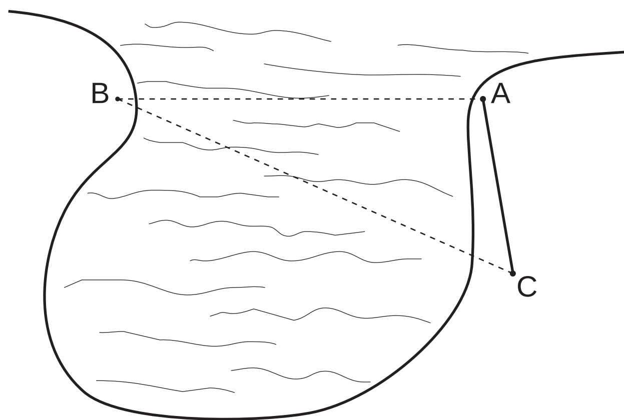
Entre os pontos A e B, situados em uma fazenda, existe um morro. O teodolito colocado no ponto C consegue mirar tanto A quanto B. Sabendo que CA = 76 m, CB = 90 m e $A\hat{C}B = 126^\circ$, calcule a distância AB.



Sugestão: Volte à Aula 42 para recordar como se calcula o co-seno de um ângulo maior que 90º e aplique a lei dos co-senos no triângulo ABC. Use a calculadora.

Exercício 4

Na figura abaixo, os pontos A e B estão em lados opostos da entrada de uma baía. Para calcular a distância AB, o topógrafo fixou um ponto C de onde pudesse mirar os pontos A e B. Com a trena, mediu AC, encontrando 320 m, e, com o teodolito, mediu os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$, encontrando 98º e 47º, respectivamente. Quanto mede AB?



Sugestão: use a lei dos senos no triângulo ABC da forma que foi utilizada no Exemplo 3 desta aula.

AULA

45

A equação da reta

Introdução

Vamos, nesta aula, retomar o assunto que começamos a estudar nas Aulas 9 e 30: a equação da reta. Aprenderemos hoje outra forma de obter a equação da reta e veremos diversas aplicações.

Em algumas situações é necessário calcular a distância de um ponto a uma reta. Também nesta aula, veremos como isso pode ser feito.

Nossa aula

Imaginemos, no plano cartesiano, uma reta que não seja paralela a nenhum dos eixos. Como mostra o desenho a seguir, essa reta passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Esses pontos são dados, ou seja, x_1, y_1, x_2 e y_2 são números conhecidos. Seja então (x, y) um ponto qualquer dessa reta.

Observe que os comprimentos dos segmentos horizontais e verticais são fáceis de obter:

$AC = x_2 - x_1$
$AD = x - x_1$
$CB = y_2 - y_1$
$DP = y - y_1$

Veja, agora, que os triângulos ACB e ADP são semelhantes, portanto

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DP}{CB} \qquad \text{o que é a mesma coisa que} \qquad \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Essa relação permite obter facilmente a equação da reta que passa pelos dois pontos dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Essa equação será do primeiro grau nas incógnitas x e y, e portanto, terá a forma

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

Observe com atenção o exemplo a seguir:

EXEMPLO 1

Encontre a equação da reta que passa pelos pontos (1 , 2) e (3, 5).

Solução:

Não importa qual é o primeiro ponto. Vamos considerar $(x_1, y_1) = (1, 2)$, ou seja, $x_1 = 1$ e $y_1 = 2$ e $(x_2, y_2) = (3, 5)$, isto é, $x_2 = 3$ e $y_2 = 5$. Aplicando a fórmula, temos:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} \qquad 3\,(x - 1) = 2\,(y - 2) \qquad 3x - 3 = 2y - 4$$

$$\boxed{3x - 2y + 1 = 0}$$

Aí está a equação da nossa reta. Se você quiser saber se um ponto qualquer pertence a essa reta, basta substituí–lo na equação e ver se a igualdade se verifica.

Por exemplo, será que o ponto (9, 14) pertence a essa reta? Vamos ver. Substituindo **x** por 9 e **y** por 14, temos:

$$3 \cdot 9 - 2 \cdot 14 + 1 =$$

$$= 27 - 28 + 1 =$$

$$= 28 - 28 = 0$$

Deu certo. O ponto (9, 14) pertence à nossa reta.

Devemos lembrar que a equação da reta não precisa ser escrita obrigatoriamente na forma que apresentamos. Algumas vezes, deixamos a letra **y** isolada do lado esquerdo, quando desejamos pensar nessa equação como uma função. Veja:

$$3x - 2y + 1 = 0$$

$$-2y = -3x - 1$$

$$2y = 3x + 1 \qquad y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$$

A equação $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$ representa a mesma reta, e agora foi escrita como uma função do 1º grau, estudada na Aula 30. Veja, a seguir, algumas aplicações.

EXEMPLO 2 

Certo município é um grande produtor de soja. A produtividade vem aumentando de acordo com o gráfico abaixo.

Qual foi a produção em 1993?

Solução:

Este é um exemplo muito comum. Alguma coisa evolui linearmente, ou seja, tem um crescimento constante em intervalos de tempo iguais. Vamos ver a solução usando a equação da reta e, nos exercícios, vamos sugerir uma outra.

Inicialmente, vamos definir de forma mais prática o eixo horizontal. 1990 será o ano 0 e 1995 o ano 5.

O gráfico, então, fica assim:

A nossa reta passa pelos pontos (0, 8) e (5, 12). Vamos obter sua equação utilizando a fórmula:

$$\frac{x - 0}{5 - 0} = \frac{y - 8}{12 - 8}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y - 8}{4}$$

$$4x = 5y - 40$$

$$4x - 5y + 40 = 0$$

Aí está a equação da reta. Como 1993 é o ano 3 da nova escala, vamos substituir **x** por 3. O valor de **y** que encontrarmos será a produção nesse ano.

$$4 \cdot 3 - 5y + 40 = 0$$

$$12 + 40 = 5y$$

$$52 = 5y$$

$$y = \frac{52}{5} = 10{,}4$$

Concluimos que a produção de soja em 1993 foi de 10,4 mil toneladas.

EXEMPLO 3

Nivaldo está sempre inventando coisas. Um dia, ele resolveu inventar uma nova escala de temperaturas. Verificou que, na região onde mora, a temperatura mínima registrada foi de 16ºC e que a máxima foi de 41ºC. Então, Nivaldo resolveu que essas temperaturas seriam os valores 0 e 100 da sua nova escala. Supondo uma variação linear, qual é a equação que relaciona as duas escalas? Na escala de Nivaldo em que temperatura ferve a água?

Solução:

Vamos chamar de **x** uma temperatura em graus Celsius e de **y** a mesma temperatura em graus Nivaldo.

Temos, então, o quadro abaixo:

x (ºC)	**y (ºN)**
16	0
41	100

Assim, devemos encontrar a equação da reta que contém os pontos (16, 0) e (41, 100). Aplicando a fórmula, temos:

$$\frac{x - 16}{41 - 16} = \frac{y - 0}{100 - 0}$$

$$\frac{x - 16}{25} = \frac{y}{100}$$

$$\frac{x - 16}{1} = \frac{y}{4}$$

$$4x - 64 = y$$

$$\boxed{y = 4x - 64}$$

Esta é a equação que relaciona as temperaturas nas duas escalas. Respondendo à segunda pergunta, sabemos que a água ferve a 100ºC. Fazendo $x = 100$ na equação, descobriremos o valor correspondente na escala do Nivaldo:

$$y = 4 \cdot 100 - 64$$

$$y = 400 - 64$$

$$y = 336$$

Portanto, para Nivaldo, a água ferve a 336 ºN.

A distância de um ponto a uma reta

A distância de um ponto a uma reta é o comprimento da perpendicular traçada do ponto até a reta. Veja isso no desenho abaixo.

Vamos descobrir agora como calcular essa distância, se nós conhecemos o ponto P e a equação da reta **r**. Antes, porém, devemos recordar uma propriedade dos triângulos retângulos:

"Em todo triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura a ela relativa".

$$bc = ah$$

Podemos compreender essa propriedade lembrando como se calcula a área de um triângulo. No caso do triângulo retângulo da figura acima, ela é igual a $\frac{bc}{2}$ e também igual a $\frac{ah}{2}$. Portanto, é claro que bc = ah.

EXEMPLO 4

Calcular a distância do ponto (5, 4) à reta x + 2y − 9 = 0.

Solução:

Seja P = (5, 4) o ponto dado. Vamos começar fazendo um desenho da reta x + 2y − 9 = 0. Para isso, precisamos conhecer dois de seus pontos. Como as coordenadas de P são x = 5 e y = 4, vamos aproveitar esses valores para determinar os pontos da reta que possuem essa abcissa e essa ordenada. Substituindo esses valores, um de cada vez, na equação da reta, temos:

x = 5 Þ 5 + 2y − 9 = 0 Þ 2y = 4 Þ y = 2

y = 4 Þ x + 2 · 4 − 9 = 0 Þ x = 9 − Þ 8 x = 1

Conseguimos, então, dois pontos da reta: A = (5, 2) e B = (1, 4).

O desenho fica assim:

No triângulo retângulo PAB da figura acima, conhecemos os comprimentos dos catetos: AP = 2 e BP = 4. Para calcular a hipotenusa, aplicamos o Teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$$AB = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

Representando por **d** a distância do ponto à reta temos, pela relação que mostramos anteriormente,

$$AP \cdot BP = AB \cdot d$$

$$2 \cdot 4 = 2\sqrt{5} \cdot d \qquad d = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} @ 1,79$$

Finalmente, vamos apresentar uma fórmula que faz o mesmo cálculo que acabamos de realizar. O ponto dado será representado por $P = (x_0, y_0)$ e a reta por $ax + by + c = 0$.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Observe o cálculo da distância do ponto P = (5, 4) à reta x + 2y – 9 = 0, agora usando a fórmula:

$$d = \frac{|5 + 2 \cdot 4 - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + 8 - 9|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

O resultado, como era de se esperar, é o mesmo, e essa fórmula, que não é indispensável, mostra-se bastante prática.

Exercício 1

Encontre a equação da reta que contém os pontos (–1; 2) e (2; 4).

Exercício 2

Determine os pontos onde a reta $2x + 5y - 40 = 0$ corta os eixos.

Sugestão: determinado $y = 0$ você encontrará o ponto em que essa reta corta o eixo dos x. Determinando $x = 0$, ...

Exercício 3

Calcule k para que os pontos (1; –2), (4; 3) e (8; k) estejam na mesma reta.

Sugestão: encontre a equação da reta que contém os dois primeiros pontos. Depois, substitua o terceiro ponto nessa equação.

Exercício 4

Os relógios dos táxis mediam "unidades taximétricas" (UT) que eram depois transformadas em reais com o uso de uma tabela. Em certa cidade, Nivaldo reparou que em um percurso de 7 km o taxímetro marcou 7 UT e em um percurso de 12 km marcou 10 UT.
Quantas UT o relógio marcaria em um percurso de 25 km?

Sugestão: considere dois "pontos" do tipo (km, UT) e encontre a equação da reta.

Exercício 5

Faça uma solução do Exemplo 2 da nossa aula usando uma progressão aritmética.

Sugestão: $a_1 = 8$, $a_6 = 12$.

Exercício 6

Uma caixa d'água de 500 litros vaza por um furo que existe no fundo. Ao meio-dia de uma segunda-feira ela foi completamente cheia, mas às 8 horas da noite desse mesmo dia só tinha 440 litros.

a) Quantos litros terá a caixa ao meio-dia de terça-feira?

b) Supondo que o vazamento seja sempre constante, quando a caixa ficará vazia?

Sugestão: a partir de dois "pontos" do tipo (tempo, litros) encontre a equação da reta. Considere $x = 0$ ao meio-dia de segunda-feira.

Exercício 7

Encontre a distância do ponto (3; 2) à reta $3x + 4y - 29 = 0$

Exercício 8

Determine a distância da origem à reta que contém os pontos (1; 8) e (4; 2).

AULA

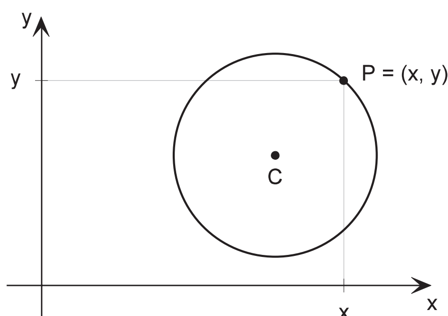
47

A equação da circunferência

Introdução

Nas duas últimas aulas você estudou a equação da reta. Nesta aula, veremos que uma circunferência desenhada no plano cartesiano também pode ser representada por uma equação.

Repare que, quando um ponto P se movimenta sobre uma circunferência de centro C, sua abcissa e sua ordenada variam.



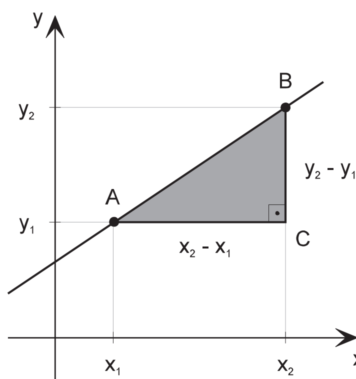
Entretanto, quando P se desloca sobre a circunferência, há uma coisa que permanece invariável: a distância de P ao centro é sempre igual ao raio.

Iniciamos esta aula recordando a aplicação do Teorema de Pitágoras para o cálculo da distância entre dois pontos.

Nossa aula

A distância entre dois pontos

Considere os pontos: $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ como mostra a figura a seguir. Para calcular a distância AB, formamos o triângulo retângulo ABC com um cateto horizontal e outro vertical.



Vemos que $AC = x_2 - x_1$ e que $CB = y_2 - y_1$. Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$
$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2$

Fórmula da distância entre dois pontos:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se tivermos A = (1, 3) e B (7, – 1), por exemplo, a distância entre esses dois pontos será:

$$AB = \sqrt{(7 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

Portanto, $AB \cong 7{,}21$

A equação da circunferência

Uma circunferência é determinada quando conhecemos a posição do seu centro e o valor do seu raio. Imaginando no plano cartesiano uma circunferência de centro no ponto C = (a, b) e com raio R, vamos representar por P = (x, y) um ponto qualquer que pertence a essa circunferência. Que propriedade tem o ponto P?

Se P pertence à circunferência, sua distância até o centro é igual ao raio.

Como a distância do ponto C = (a, b) ao ponto P = (x, y) é igual a R, usando a fórmula da distância entre dois pontos temos:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

Elevando ao quadrado os dois membros, a expressão obtida é a equação da circunferência de centro (a, b) e raio R.

Equação da circunferência:

$$(x - a)^2 + (a - b)^2 = R^2$$

A seguir, observe os exemplos em que construimos as equações de diversas circunferências a partir da posição do centro e do valor do raio:

CENTRO	RAIO	EQUAÇÃO
(2, 3)	4	$(x-2)^2+(y-3)^2=16$
(5, – 2)	6	$(x-5)^2+(y+2)^2=36$
(4, 0)	$\sqrt{3}$	$(x-4)^2+y^2=3$
(0, – 3)	2	$x^2+(y+3)^2=4$
(0, 0)	1	$x^2+y^2=1$

Vamos aprender a verificar quando um ponto pertence a uma circunferência. Por exemplo: será que o ponto (6, – 2) pertence à circunferência $(x-2)^2+(y-1)^2=25$?

Para responder a essa pergunta, basta substituir as coordenadas do ponto dado na equação da circunferência e verificar a igualdade.

No nosso caso, para $x = 6$ e $y = -2$, obtemos:

$$(6-2)^2 + (-2-1)^2 = 25$$
$$= 4^2 + (-3)^2 = 25$$
$$= 16 + 9 = 25$$

Como a igualdade se verifica, podemos dizer que o ponto (6, – 2) pertence à circunferência $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

Observe o exemplo a seguir:

EXEMPLO 1

Determine **y** para que o ponto (5, y) pertença à circunferência $(\boldsymbol{x}-2)^2+(y-1)^2=25$.

Solução:

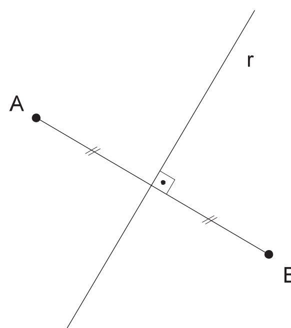
Substituindo o ponto dado na equação, calculamos o valor de **y**:

$$(5-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$
$$3^2 + (y-1)^2 = 25$$
$$(y-1)^2 = 25-9$$
$$(y-1)^2 = 16$$
$$y-1 = \pm 4$$
$$y = 1 \pm 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 1+4 = 5 \\ \text{ou} \\ y = 1-4 = -3 \end{cases}$$

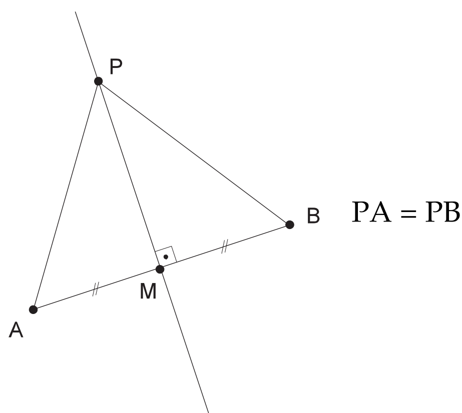
Encontrando dois pontos para **y**, temos que os pontos A = (5, 5) e B = (5, – 3) pertencem à circunferência dada. Observe que o centro da circunferência é o ponto (2, 1) e que o raio é 5.

Mediatrizes

A ***mediatriz*** de um segmento é a reta perpendicular que contém o ponto médio desse segmento. Na figura a seguir, a reta **r** é a mediatriz do segmento AB.

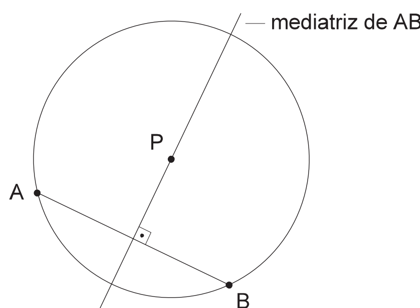


Todos os pontos de uma mediatriz possuem distâncias iguais aos extremos do segmento. Na próxima figura, veremos que o ponto P pertence à mediatriz do segmento AB. Portanto, sua distância até o ponto A é ***sempre igual*** à sua distância até o ponto B. Repare que isso ocorre porque os triângulos PMA e PMB são iguais.



PA = PB

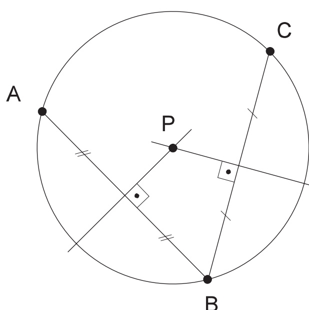
Imagine agora que os pontos A e B pertencem a uma circunferência de centro P. O que podemos concluir? Como PA e PB são raios, então PA = PB. Isso significa que o ponto P está na mediatriz do segmento AB.



Guarde a seguinte propriedade:

Se dois pontos A e B pertencem a uma circunferência a mediatriz de AB passa pelo centro.

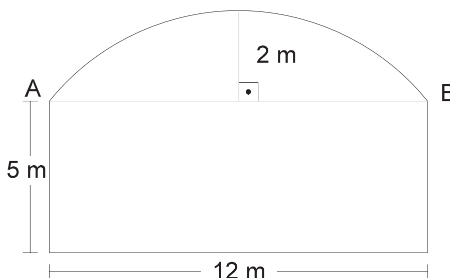
Ao aplicarmos duas vezes essa propriedade, podemos construir uma circunferência que passa por três pontos dados. Neste caso, o centro P pertence à mediatriz de AB e também à mediatriz de BC.



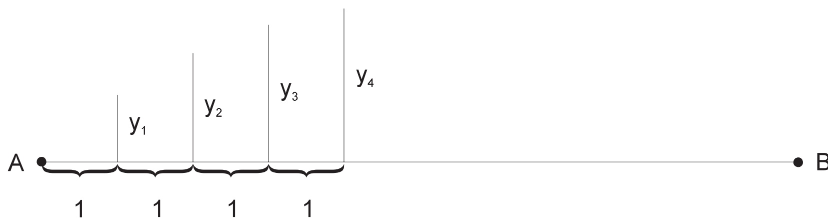
O ponto P também pertence à mediatriz de AC; mas é suficiente fazer a interseção de duas mediatrizes para determiná–lo.

Um problema de engenharia

Um galpão tem a forma da figura abaixo quando visto de frente: 12 m de largura, 5 m de altura nas laterais e 7 m de altura máxima, sendo a linha da cobertura uma circunferência perfeita.

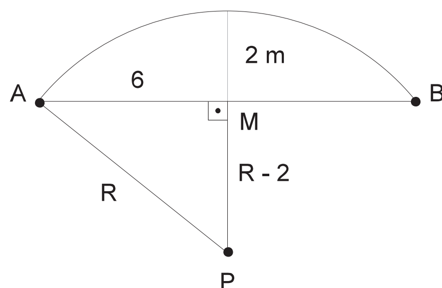


Para a construção da cobertura, o mestre de obras precisa saber a cada metro da viga AB a que altura está a cobertura. Assim, precisamos calcular com exatidão as alturas y_1, y_2, y_3 etc. que aparecem na seguinte figura:



Vamos resolver o problema.

Inicialmente, vamos determinar a posição do centro da circunferência, o qual chamaremos de P. De acordo com a próxima figura, sabemos que P pertence à mediatriz de AB, que PA é o raio e que PM é igual ao raio menos dois metros.



Como M é o ponto médio de AB temos AM = 6. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = (R-2)^2 + 6^2$$

$$R^2 = R^2 - 4R + 4 + 36$$

$$4R = 40$$

$$R = 10$$

Sabemos que o raio da circunferência da cobertura é de 10 m; assim, temos que MP = 8 m. Tomamos um sistema de coordenadas de forma que o ponto A seja a origem e o eixo x coincida com AB. Dessa forma, temos B = (12, 0) e P = (6, – 8).

Assim, obtemos a equação da circunferência de centro (6, – 8) e raio 10:

$$(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$$

Nessa equação substituiremos a abcissa x pelos valores 1, 2, 3, 4 etc., calculando para cada um deles as ordenadas correspondentes. Vamos mostrar o cálculo das duas primeiras ordenadas, deixando as outras como exercício.

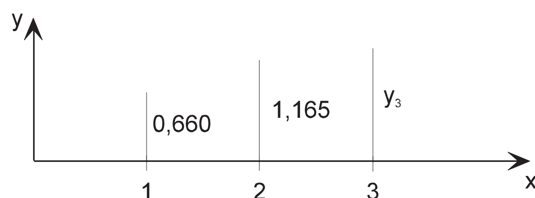
Para x = 1 temos:

$$(1-6)^2 + (4+8)^2 = 100$$
$$25 + (y+8)^2 = 100$$
$$(y+8)^2 = 75$$
$$y + 8 = \sqrt{75} \quad \text{(só o valor positivo interessa)}$$
$$y = \sqrt{75} - 8 \cong 0{,}660 = y_1$$

Para y = 2, temos:

$$(2-6)^2 + (y+8)^2 = 100$$
$$16 + (y+8)^2 = 100$$
$$(y+8)^2 = 84$$
$$y + 8 = \sqrt{84}$$
$$y = \sqrt{84} - 8 \cong 1{,}165 = y_2$$

Desse modo, é possível construir uma circunferência em um lugar em que o compasso não pode ser aplicado. Usando a equação da circunferência, podemos determinar a posição exata de cada um dos seus pontos.



Exercícios

Exercício 1.

Determine a equação de cada uma das circunferências dados o centro C e o raio R.

a) $C = (5, -1)$, $R = 3$

b) $C = (-3, 2)$, $R = \sqrt{7}$

c) $C = (0, 1)$, $R = 2$

Exercício 2.

Determine o centro e o raio de cada uma das circunferências cujas equações são dadas:

a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 6$

b) $(x - 3)^2 + y^2 = 10$

c) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$

Exercício 3.

Determine a equação da circunferência com centro no ponto (3, 1) e passando pelo ponto (6, 3).
Sugestão: O raio é a distância entre o centro e qualquer um de seus pontos.

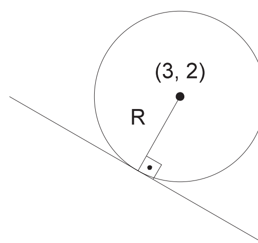
Exercício 4.

Verifique se o ponto (2, 7) pertence, é interior ou exterior à circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 34$.
Sugestão: Um ponto é interior a uma circunferência se a sua distância até o centro for menor que o raio. Um ponto será exterior se a sua distância até o centro for maior que o raio.

Exercício 5.

Determine a equação da circunferência com centro no ponto (3, 2) e tangente à reta $2x + y + 7 = 0$

Sugestão: De acordo com a figura, o raio da circunferência é a distância do ponto (3, 2) até a reta dada. Veja a Aula 45 para lembrar como se calcula a distância de um ponto até uma reta.



Exercício 6.

Determine a equação de uma circunferência sabendo que A = (1, 4) e B = (7, 8) são extremidades de um diâmetro.

Sugestão: Observe que dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), o ponto médio do segmento determinado por eles é o ponto $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Exercício 7.

Na circunferência $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$ determine o ponto de ordenada máxima.
Sugestão: Faça um desenho dessa circunferência e observe que ponto possui o maior valor de y.

Exercício 8.

Termine de resolver o "problema de engenharia" da nossa aula, calculando, as ordenadas y_3, y_4, y_5, ... , até y_{12}.

Exercício 9.

Na circunferência $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 10$ determine os pontos de ordenada 6.

AULA

48

O princípio multiplicativo

Introdução

A palavra Matemática, para um adulto ou uma criança, está diretamente relacionada com atividades e técnicas para contagem do número de elementos de algum conjunto. As primeiras atividades matemáticas que vivenciamos envolvem sempre a ação de contar objetos de um conjunto, enumerando seus elementos.

As operações de adição e multiplicação são exemplos de "técnicas" matemáticas utilizadas também para a determinação de uma quantidade. A primeira (adição) reúne ou junta duas ou mais quantidades conhecidas; e a segunda (multiplicação) é normalmente aprendida como uma forma eficaz de substituir adições de parcelas iguais.

A multiplicação também é a base de um raciocínio muito importante em Matemática, chamado ***princípio multiplicativo***. O princípio multiplicativo constitui a ferramenta básica para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos (como veremos nos exemplos).

Os problemas de contagem fazem parte da chamada ***análise combinatória***.

A partir desta aula, aprofundaremos o estudo dessa parte da Matemática.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Maria vai sair com suas amigas e, para escolher a roupa que usará, separou 2 saias e 3 blusas. Vejamos de quantas maneiras ela pode se arrumar.

Solução:

O princípio multiplicativo, ilustrado nesse exemplo, também pode ser enunciado da seguinte forma:

Se uma decisão $\mathbf{d_1}$ pode ser tomada de **n** maneiras e, em seguida, outra decisão $\mathbf{d_2}$ puder ser tomada de **m** maneiras, o número total de maneiras de tornarmos as decisões $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ será $\mathbf{n \cdot m}$.

No exemplo anterior havia duas decisões a serem tomadas:

$\mathbf{d_1}$: escolher uma dentre as 3 blusas
$\mathbf{d_2}$: escolher uma dentre as 2 saias

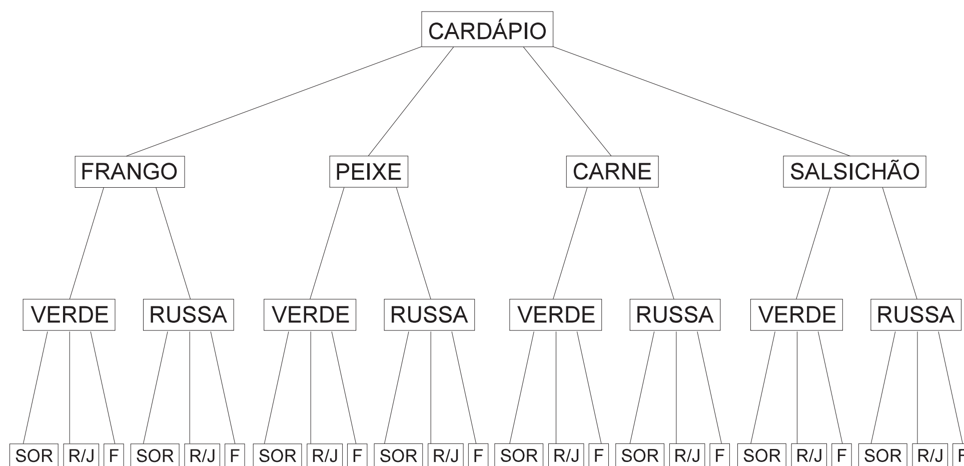
Assim, Maria dispõe de $3 \cdot 2 = \mathbf{6}$ **maneiras** de tomar as decisões d_1 e d_2, ou seja, 6 possibilidades diferentes de se vestir.

EXEMPLO 2

Um restaurante prepara 4 pratos quentes (frango, peixe, carne assada, salsichão), 2 saladas (verde e russa) e 3 sobremesas (sorvete, romeu e julieta, frutas). De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?

Solução:

Esse e outros problemas da análise combinatória podem ser representados pela conhecida árvore de possibilidades ou grafo. Veja como representamos por uma "árvore" o problema do cardápio do restaurante.



Observe que nesse problema temos três níveis de decisão:

$\mathbf{d_1}$: escolher um dentre os 4 tipo de pratos quentes.

$\mathbf{d_2}$: escolher uma dentre as 2 variedades de salada.

$\mathbf{d_3}$: escolher uma das 3 sobremesas oferecidas.

Usando o princípio multiplicativo, concluímos que temos $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ maneiras de tomarmos as três decisões, ou seja, **24 opções de cardápio**.

A representação gráfica em árvore de possibilidades é muito ilustrativa. Nela podemos ver claramente os três níveis de decisão d_1, d_2 e d_3, consultando os vários tipos de cardápios possíveis. Observe que, percorrendo as opções dadas pelos segmentos à esquerda da árvore, o cardápio ficaria *frango/salada verde/sorvete* enquanto que, escolhendo os segmentos à direita, teríamos *salsichão/salada russa/ frutas*. No entanto, nosso objetivo é saber as combinações possíveis e calcular o número total de possibilidades sem precisar enumerá-las, pois muitas vezes isso será impossível devido ao grande número de opções e/ou de decisões envolvidos num problema.

As técnicas da análise combinatória, como o princípio multiplicativo, nos fornecem soluções gerais para atacar certos tipos de problema. No entanto, esses problemas exigem engenhosidade, criatividade e uma plena compreensão da situação descrita. Portanto, é preciso estudar bem o problema, as condições dadas e as possibilidades envolvidas, ou seja, ter perfeita consciência dos dados e da resolução que se busca.

EXEMPLO 3

Se o restaurante do exemplo anterior oferecesse dois preços diferentes, sendo mais baratas as opções que incluíssem frango ou salsichão com salada verde, de quantas maneiras você poderia se alimentar pagando menos?

Solução:

Note que agora temos uma condição sobre as decisões d_1 e d_2:

d_1: escolher um dentre 2 pratos quentes (frango ou salsichão).

d_2: escolher salada verde (apenas uma opção).

d_3: escolher uma das 3 sobremesas oferecidas.

Então, há $2 \cdot 1 \cdot 3 =$ **6 maneiras** de montar cardápios econômicos. (Verifique os cardápios mais econômicos na árvore de possibilidades do exemplo anterior).

EXEMPLO 4

Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem?

Solução:

Um número de 3 algarismos **c d u** é formado por 3 ordens: Como o algarismo da ordem das centenas não pode ser zero, temos então três decisões:

d_1: escolher o algarismo da centena diferente de zero (9 opções).

d_2: escolher o algarismo da dezena diferente do que já foi escolhido para ocupar a centena (9 opções).

d_3: escolher o algarismo da unidade diferente dos que já foram utilizados (8 opções).

Portanto, o total de números formados será $9 \cdot 9 \cdot 8 =$ **648 números**.

EXEMPLO 5

De acordo com o exemplo anterior, se desejássemos contar dentre os 648 números de 3 algarismos distintos apenas os que são pares (terminados em 0, 2, 4, 6 e 8), como deveríamos proceder?

Solução*:

c	d	u

O algarismo da unidade poderá ser escolhido de 5 modos (0, 2, 4, 6 e 8). Se o zero foi usado como último algarismo, o primeiro pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o algarismo já empregado na última casa). Se o zero não foi usado como último algarismo, o primeiro só pode ser escolhido de 8 modos (não podemos usar o zero, nem o algarismo já empregado na última casa).

Para vencer este impasse, temos três alternativas:

a) "Abrir" o problema em casos (que é alternativa mais natural). Contar separadamente os números que têm zero como último algarismo (unidade = 0) e aqueles cujo último algarismo é diferente de zero (unidade $\neq$ 0).

Terminando em zero temos 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio (algarismo da dezena), num total de $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ números.

Terminando em um algarismo diferente de zero temos 4 modos de escolher o último algarismo (2, 4, 6, ou 8), 8 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos usar o zero, nem o algarismo já usado na última casa) e 8 modos de escolher o algarismo do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas). Logo, temos $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$ números terminados em um algarismo diferente de zero. A resposta é, portanto, **72 + 256 = 328 números**.

b) Ignorar uma das restrições (que é uma alternativa mais sofisticada). Ignorando o fato de zero não poder ocupar a centena, teríamos 5 modos de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio, num total $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$ números. Esses 360 números incluem números começados por zero, que devem ser descontados. Começando em zero temos 1 modo de escolher o primeiro algarismo (0), 4 modos de escolher o último (2, 4, 6 ou 8) e 8 modos de escolher o do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas), num total de $1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$ números. A resposta é, portanto, **360 - 32 = 328 números**.

c) É claro que também poderíamos ter resolvido o problema determinando todos os números de 3 algarismos distintos ($9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números), como é o caso do Exemplo 4, e abatendo os números ímpares de 3 algarismos distintos (5 na última casa, 8 na primeira e 8 na segunda), num total de $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$ números. Assim, a resposta seria **648 - 320 = 328 números**.

Fonte: * Solução proposta pelo prof. Augusto César de Oliveira Morgado no livro "***Análise Combinatória e Probabilidade***" - IMPA/VITAE/1991.

EXEMPLO 6

As placas de automóveis eram todas formadas por 2 letras (inclusive K, Y e W) seguidas por 4 algarismos. Hoje em dia, as placas dos carros estão sendo todas trocadas e passaram a ter 3 letras seguidas e 4 algarismos. Quantas placas de cada tipo podemos formar?

Solução:

No primeiro caso

L	**L**	**N**	**N**	**N**	**N**

Como cada letra (L) pode ser escolhida de 26 maneiras e cada algarismo (N) de 10 modos distintos, a resposta é:

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{6\,760\,000}$$

No segundo caso

L	**L**	**L**	**N**	**N**	**N**	**N**

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26 \cdot 6\,760\,000 =$$
$$= \mathbf{175\,760\,000}$$

A nova forma de identificação de automóveis possibilita uma variedade 26 vezes maior. A diferença é de **169.000.000**, ou seja, 169 milhões de placas diferentes a mais do que anteriormente.

Exercícios

Exercício 1.
Numa sala há 4 homens e 3 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem - mulher?

Exercício 2.
a) Quantos números naturais de 2 algarismos distintos existem?
b) Quantos destes números são divisíveis por 5?

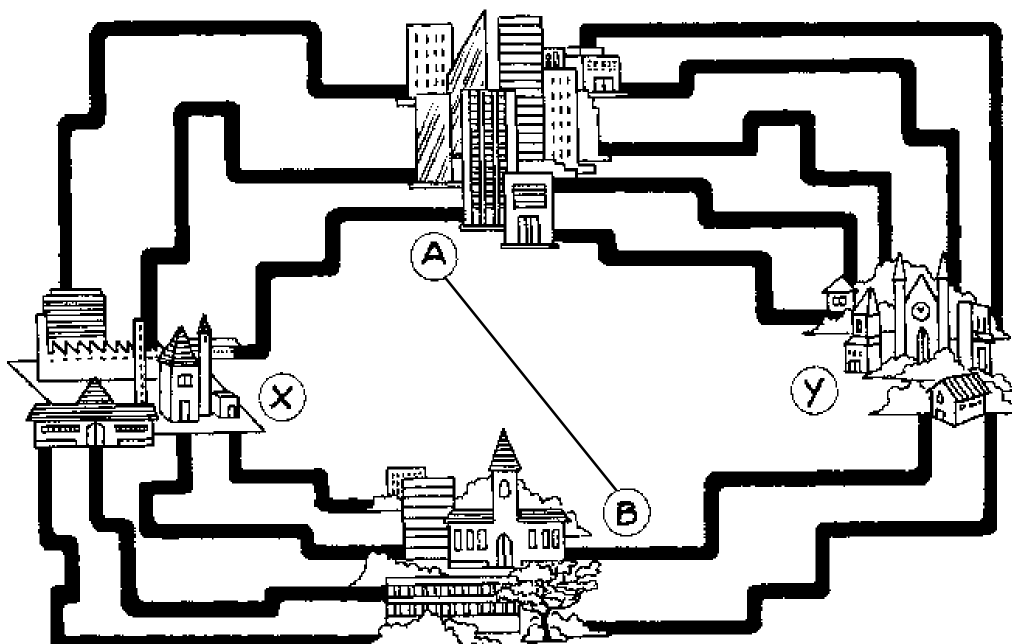
Exercício 3.
Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

Exercício 4.
Quantos são os gabaritos possíveis para um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?

Exercício 5.
Com todos os números de 01 a 50, quantas escolhas de 6 números distintos podemos fazer?

Exercício 6.

De quantas maneiras você pode ir da cidade X para a cidade Y?



Exercício 7.

O código morse usa "palavras" contendo de 1 a 4 "letras", representadas por ponto e traço. Quantas "palavras" existem no código morse?

Exercício 8.

O segredo de um cofre é formado por uma seqüência de 4 números de 2 dígitos (de 00 a 99). Uma pessoa decide tentar abrir o cofre sem saber a formação do segredo (por exemplo: 15 - 26 - 00 - 52). Se essa pessoa levar 1 segundo para experimentar cada combinação possível, trabalhando ininterruptamente e anotando cada tentativa já feita para não repeti-la, qual será o tempo máximo que poderá levar para abrir o cofre?

Exercício 9.

No Exemplo 6 vimos que existem 175.760.000 placas diferentes de três letras e quatros algarismos. José Carlos Medeiros gostaria de que a placa de seu automóvel tivesse as iniciais do seu nome. Quantas placas existem com as letras JCM?

AULA

49

As permutações

Introdução

Nesta aula você estudará um tipo muito comum de problemas de contagem, que está relacionado com as várias formas de organizar ou arrumar os elementos de um conjunto.

Organizar tais elementos é uma atividade cotidiana que inclui várias possibilidades, sendo que cada pessoa adota uma estratégia. No entanto, muitas vezes precisamos saber de quantas maneiras podemos arrumar um conjunto de elementos ou simplesmente saciar a curiosidade sobre o número total de possibilidades.

Consultando um dicionário encontramos:

PERMUTAR → dar mutuamente, trocar.

PERMUTAÇÃO → **1)** ato ou efeito de permutar, troca, substituição;

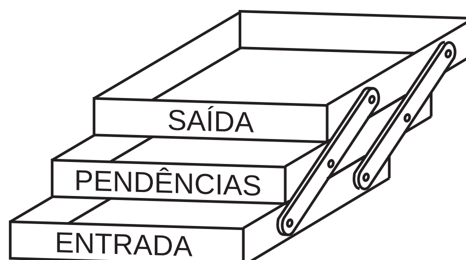
2) transposição dos elementos de um todo para se obter uma nova combinação;

3) seqüência ordenada dos elementos de um conjunto.

Nossa aula

EXEMPLO 1

No protocolo de uma repartição há um arquivo de mesa como o da figura abaixo. Cada funcionário do setor gosta de arrumar estas caixas em uma ordem diferente (por exemplo: entrada-pendências-saída, pendências-saída-entrada etc.). De quantas maneiras é possível ordenar estas caixas?



Solução:

Como temos 3 caixas – saída (S), pendências (P) e entrada (E) – vamos escolher uma delas para ficar embaixo. Escolhida a caixa inferior, sobram 2 escolhas para a caixa que ficará no meio e a que sobrar ficará sobre as outras.

Então, usando o princípio multiplicativo temos

$3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **6 opções**

Assim, as soluções são:

S	S	E	E	P	P
P	E	S	P	E	S
E	P	P	S	S	E

EXEMPLO 2

De quantas maneiras podemos arrumar 5 pessoas em fila indiana?

Solução:

Para facilitar, vamos imaginar que as pessoas são P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 e que precisamos arrumá-las nesta fila:

Deste modo, podemos ter soluções como:

P_1	P_3	P_5	P_2	P_4
P_5	P_2	P_1	P_3	P_4

etc.

Ao escolher uma pessoa para ocupar a primeira posição na fila temos cinco pessoas à disposição, ou seja, 5 opções; para o 2º lugar , como uma pessoa já foi escolhida, temos 4 opções; para o 3º lugar sobram três pessoas a serem escolhidas; para o 4º lugar duas pessoas, e para o último lugar na fila sobra apenas a pessoa ainda não escolhida.

Pelo princípio multiplicativo temos:

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **120 opções**

Permutação

Dado um conjunto formado por **n** elementos, chama-se permutação desses **n** elementos qualquer seqüência de **n** elementos na qual apareçam todos os elementos do conjunto.

Os Exemplos 1 e 2 são demonstrações de permutações feitas com 3 caixas e 5 pessoas. No Exemplo 2, como na maioria dos casos, não descrevemos ou enumeramos todas as permutações que podemos encontrar, pois apenas calculamos o número de permutações que poderíamos fazer.

Cálculo do número de permutações

O número de modos de ordenar **n** objetos distintos é:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1$$

EXEMPLO 3

Quantos números diferentes de 4 algarismos podemos formar usando apenas os algarismos 1, 3, 5 e 7?

Solução:

Como são 4 algarismos diferentes, que serão permutados em 4 posições, a solução é:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **24 números diferentes**

Um novo símbolo

Uma multiplicação do tipo $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1$ é chamada ***fatorial*** do número **n** e representada por **n**! (lemos **n** fatorial).

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1$$

Veja os exemplos:

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$

b) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24}$

c) $5! \cdot 4! = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)\,(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 120 \cdot 24 = \mathbf{2880}$

d) $8! = \mathbf{8 \cdot 7!}$

e) $\dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 = \mathbf{20}$

f) $\dfrac{12!}{13!} = \dfrac{\cancel{12!}}{13! \cdot \cancel{12!}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}$

g) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{(n+1)!}{n!} = \mathbf{n + 1}$

EXEMPLO 4

Quantos são os anagramas da palavra MARTELO?

> Você sabe o que é um ***anagrama***?
> Anagrama é uma palavra formada pela transposição (troca) de letras de outra palavra. Existem também anagramas de frases, nos quais se trocam as palavras, formando-se outra frase.

Solução:

Cada anagrama da palavra MARTELO é uma ordenação das letras M, A, R, T, E, L, O. Assim, o número de anagramas é o número de permutações possíveis com essas letras, ou seja:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

EXEMPLO 5

Quantos anagramas que comecem e terminem por consoantes podemos formar a partir da palavra MARTELO?

Solução:

A consoante inicial pode ser escolhida de 4 maneiras e a consoante final de 3 maneiras. As 5 letras restantes serão permutadas entre as duas consoantes já escolhidas. Portanto, a resposta é $4 \cdot 3 \cdot 5! =$ **1440 anagramas**

EXEMPLO 6

Um grupo de 5 pessoas decide viajar de carro, mas apenas 2 sabem dirigir. De quantas maneiras é possível dispor as 5 pessoas durante a viagem?

Solução:

O banco do motorista pode ser ocupado por uma das 2 pessoas que sabem guiar o carro e as outras 4 podem ser permutadas pelos 4 lugares restantes, logo:

$2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 =$ **48 maneiras**

Nos Exemplos 6 e 7 vemos que em alguns problemas (que envolvem permutações dos elementos de um conjunto) podem existir restrições que devem ser levadas em conta na resolução.

Portanto, fique sempre muito atento ao enunciado da questão, procurando compreendê-lo completamente antes de buscar a solução.

EXEMPLO 7

Num encontro entre presidentes de países da América do Sul, apenas 7 confirmaram presença.

Os organizadores dos eventos que ocorrerão durante a visita gostariam de permutar os presidentes possibilitando vários contatos diferentes.

a) De quantas maneiras podemos permutar os presidentes em 7 cadeiras lado a lado?

b) Se 2 dos presidentes devem se sentar lado a lado, quantas são as possibilidades de organizá-los?

c) Se tivéssemos 2 presidentes que não devem ficar juntos, quantas seriam as possibilidades de organizá-los?

Solução:

a) O total de permutações possíveis dos 7 presidentes por 7 cadeiras é 7! = 5040.

b) Observe que, agora, queremos contar apenas o número de permutações nas quais os presidentes A e B aparecem juntos, como, por exemplo:

<u>A</u> <u>B</u> C D E F G

<u>B</u> <u>A</u> C G D F E

G <u>A</u> <u>B</u> D C E F etc.

Então, é preciso contar quantos são os casos em que A e B estariam juntos.

Eles estariam juntos na 1ª e na 2ª cadeiras, na 2ª e na 3ª, 3ª e 4ª, 4ª e 5ª, 5ª e 6ª ou 6ª e 7ª. Podemos verificar que são 6 posições e que para cada uma delas poderíamos ter A e B ou B e A (2 possibilidades: $6 \cdot 2 = 12$). Além disso, devemos contar várias vezes no total de permutações cada uma dessas 12 possibilidades, como, por exemplo, EFGCD<u>AB</u>, FEGCD<u>AB</u>, DEFG<u>AB</u> etc. Para sabermos quantas vezes A e B aparecem nas posições 6 e 7, respectivamente, precisamos contar todas as permutações possíveis dos outros 5 presidentes nas 5 posições restantes.

Considerando todos estes casos, o número total de posições em que A e B aparecem junto é

$$2 \cdot 6 \cdot 5! = 12 \cdot 120 = \mathbf{1440\ posições}$$

c) Neste caso, do total de permutações possíveis com os 7 presidentes (5040) devemos retirar aquelas em que A e B aparecem juntos (1440). Portanto, a resposta seria:

$$5040 - 1440 = \mathbf{3600\ possibilidades}$$

Exercício 1.
Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra AMOR?

Exercício 2.

a) Quantos números distintos de 6 algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

b) Quantos desses números são pares?

c) Quantos têm os algarismos 1 e 2 juntos?

d) Quantos são múltiplos de 5?

e) Quantos são os múltiplos de 5 com no mínimo 4 centenas de milhar?

Exercício 3.

a) Numa quadrilha de 10 casais, de quantas maneiras podemos organizar a ordem de entrada?

b) De quantas maneiras poderíamos enfileirar os casais, se dois deles não quisessem ficar juntos?

Exercício 4.
Quatro crianças viajam sempre no banco traseiro de um automóvel de 4 portas. As 3 maiores brigam pela janela, e a menor não deve viajar perto das portas. Quantas são as arrumações possíveis das crianças?

AULA

50

Continuando com permutações

Introdução

O título desta aula já indica que continuaremos o assunto da Aula 49, em que vimos vários exemplos de permutações denominadas "permutações simples" e "permutações simples com restrições". Você deve ter notado que em todos aqueles exemplos permutamos objetos distintos: 3 caixas diferentes, pessoas diferentes, números formados por algarismos diferentes, anagramas da palavra MARTELO (que não têm letras repetidas) etc. Como deveríamos proceder se quiséssemos saber o número de anagramas possíveis com as letras da palavra M**A**DEIR**A** ou da palavra **PRÓPRIO**?

Nossa aula

Nesta aula você estudará permutações com objetos nem todos distintos. Outro caso que será estudado é o que chamamos de permutação circular. Só para você já ir pensando, no Exemplo dos 7 presidentes, eles sempre se sentavam lado a lado. O que aconteceria se fôssemos arrumá-los numa mesa redonda? Será que teríamos o mesmo número de permutações diferentes? Além de acompanhar cuidadosamente os exemplos, você precisa resolver os exercícios, discutir sua solução com outras pessoas e até inventar problemas. Matemática se aprende fazendo!

Permutações com repetição

EXEMPLO 1

A palavra M**A**DEIR**A** possui sete letras, sendo duas letras A e cinco letras distintas: M, D, E, I, R. Quantos anagramas podemos formar com essa palavra?

Solução:

O número de permutações de uma palavra com sete letras distintas (MARTELO) é igual a 7! = 5040. Neste exemplo formaremos uma quantidade menor de anagramas, pois são iguais aqueles em que uma letra A aparece na 2ª casa e a outra letra A na 5ª casa (e vice-versa).

Para saber de quantas maneiras podemos arrumar as duas letras A, precisamos de 2 posições. Para a primeira letra A teremos 7 posições disponíveis e para a segunda letra A teremos 6 posições disponíveis (pois uma das 7 já foi ocupada).

Temos então, $7 \cdot \frac{6}{2} = 21$ opções de escolha.

A divisão por 2 é necessária para não contarmos duas vezes posições que formam o mesmo anagrama (como, por exemplo, escolher a 2ª e 5ª posições e a 5ª e 2ª posições).

Agora vamos imaginar que as letras A já foram arrumadas e ocupam a 1ª e 2ª posições:

A A _ _ _ _ _

Nas 5 posições restantes devemos permutar as outras 5 letras distintas, ou seja, temos 5! = 120 possibilidades. Como as 2 letras A podem variar de 21 maneiras suas posições, temos como resposta:

$$\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5! = 21 \cdot 120 = 2520$$ anagramas da palavra M**A**DEIR**A**

EXEMPLO 2 

Uma urna contém 10 bolas: 6 pretas e 4 brancas. Quantas são as maneiras de se retirar da urna, uma a uma, as 10 bolas?

Solução:

Vejamos primeiro algumas possibilidades de se retirar as bolas da urna, uma a uma:

Nesse exemplo temos uma permutação de 10 elementos. Caso fossem todos distintos, nossa resposta seria **10!**. No entanto, o número de permutações com repetição de 6 bolas pretas e 4 bolas brancas será menor.

Se as bolas brancas (que são iguais) fossem numeradas de 1 a 4, as posições seriam diferentes:

etc...

Note que para cada arrumação das bolas brancas temos 4! = 24 permutações que são consideradas repetições, ou seja, que não fazem a menor diferença no caso de as bolas serem todas iguais.

Da mesma forma, para cada posição em que as 6 bolas pretas aparecerem **não** devemos contar as repetições ou as trocas entre as próprias bolas pretas. O número de repetições é 6! = 720.

Concluímos, então, que as maneiras de se retirar uma a uma 6 bolas pretas e 4 bolas brancas, sem contar as repetições, é:

$$\frac{10!}{4!\ 6!} = \frac{3.628.800}{24.720} = 210$$

EXEMPLO 3 

Quantos anagramas podemos formar com a palavra **PRÓPRIO**?

Solução:

Este exemplo é parecido com o das bolas pretas e brancas. Mas observe que aqui temos 7 letras a serem permutadas, sendo que as letras P, R e O aparecem 2 vezes cada uma e a letra I, apenas uma vez.

Como no caso anterior, teremos 2! repetições para cada arrumação possível da letra P (o mesmo ocorrendo com as letras R e O). O número de permutações sem repetição será, então:

$$\frac{7!}{2!\ 2!\ 2!}$$

7! ® número total de permutações de 7 letras.

2! 2! 2! ® produto das repetições possíveis com as letras P, R e O.

$$\frac{5040}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 630$$

Uma expressão geral para permutações com objetos nem todos distintos

Havendo **n** elementos para permutar e dentre eles um elemento se repete **p** vezes e outro elemento se repete **q** vezes, temos:

$$\boxed{\frac{n!}{p!\ q!}}$$

No exemplo anterior, você viu que podemos ter mais de 2 elementos que se repetem. Neste caso, teremos no denominador da expressão o produto dos fatoriais de todos os elementos que se repetem.

Simplificando fatoriais

Uma fração com fatoriais no numerador e no denominador pode ser facilmente simplificada. Observe os exemplos:

a) $\frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

b) $\frac{5!}{7!} = \frac{5!}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{1}{7 \cdot 6}$

c) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

d) $\frac{5!}{3!\ 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\ 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 2$

Permutações circulares

Permutações circulares são os casos de permutações em que dispomos **n** elementos em **n** lugares em torno de um círculo. Veja um exemplo.

De quantos modos podemos formar uma roda com 5 crianças?

Para formar uma roda com 5 crianças, não basta escolher uma ordem para elas. Vamos nomear as 5 crianças por A, B, C, D, E. Observe que as rodas abaixo, por exemplo, são iguais:

Em cada uma dessas rodas, se seus elementos fossem arrumados em fila, teríamos permutações diferentes; no entanto, dispostos de forma circular, não dão origem a rodas diferentes; temos 5 rodas iguais, pois a posição de cada criança em relação às outras é a mesma e a roda foi apenas "virada".

Como não queremos contar rodas iguais, nosso resultado não é o número de permutações com 5 elementos em 5 posições, ou seja, 5! = 120. Já que cada roda pode ser "virada" de cinco maneiras, o número total de permutações, 120 rodas, contou cada roda diferente 5 vezes e a resposta do problema é:

$$\frac{120}{5} = 24$$

Uma expressão geral para permutações circulares

Nas permutações simples importam os lugares que os objetos ocupam e nas permutações circulares importa a posição relativa entre os objetos, ou seja, consideramos equivalentes as arrumações que possam coincidir por rotação.

Se temos **n** objetos, cada disposição equivalente por rotação pode ser obtida de **n** maneiras. Confirme isso com os exemplos a seguir:

a) 3 elementos: A, B, C. Considere a roda ABC. As rodas BCA e CAB são rodas equivalentes.

b) 8 elementos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Verifique que as 8 rodas abaixo são equivalentes:

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8
8 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7
7 – 8 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6
6 – 7 – 8 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5
5 – 6 – 7 – 8 – 1 – 2 – 3 – 4
4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 1 – 2 – 3
3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 1 – 2
2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 1

A expressão geral do número de permutações circulares será o número total de permutações, n!, dividido pelas **n** vezes que cada roda equivalente foi contada:

$$\frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!$$

EXEMPLO 4

Quantas rodas de ciranda podemos formar com 8 crianças?

Solução:

Podemos formar $\frac{8!}{8} = 7! = 5040$ **rodas diferentes**.

EXEMPLO 5 

Se no encontro dos 7 presidentes as reuniões fossem ocorrer ao redor de uma mesa, de quantas maneiras poderíamos organizá–los?

Solução:

$$\frac{7!}{7} = 6! = 720$$ posições circulares diferentes.

EXEMPLO 6 

Neste mesmo exemplo, o que ocorreria se dois dos 7 presidentes não devessem sentar juntos?

Solução:

Neste caso, poderíamos contar as permutações circulares dos outros 5 presidentes e depois encaixar os 2 que devem ficar separados nos espaços entre os 5 já arrumados.

O número de permutações circulares com 5 elementos é 4! = 24, e entre eles ficam formados 5 espaços. Veja a figura:

Se os presidentes F e G forem colocados em 2 destes 5 espaços, eles não ficarão juntos. Temos então 5 opções para sentar o presidente F e 4 opções (uma foi ocupada por F) para sentar o presidente G.

A resposta a este problema é $5 \cdot 4 \cdot 4! = 480$

Exercícios

Exercício 1.
Quantos são os anagramas da palavra T**E**L**E**CURSO?

Exercício 2.
Quantos são os anagramas da palavra T**ELE**S**A**L**A**?

Exercício 3.
Quantos são os números de 7 algarismos, maiores que 6 000 000, que podemos formar usando apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8?

Exercício 4.

Numa prova de 10 questões, todos os alunos de uma classe tiveram nota 8 (acertaram 8 questões e erraram 2). O professor, desconfiado, resolveu comparar todas as provas e ficou feliz ao verificar que em toda a classe não havia duas provas iguais. Qual o número máximo de alunos que essa classe pode ter?

Exercício 5.

De quantos modos 5 casais podem formar uma roda de ciranda?

Exercício 6.

De quantos modos 5 casais podem formar uma roda de ciranda, de maneira que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

Exercício 7.

De quantos modos 5 casais podem formar uma roda de ciranda, de maneira que cada homem permaneça ao lado de sua mulher?

Exercício 8.

De quantos modos 5 casais podem formar uma roda de ciranda, de maneira que cada homem permaneça ao lado de sua mulher e que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

AULA

51

As combinações

Introdução

Até agora você estudou problemas de análise combinatória que envolviam o princípio multiplicativo e as permutações.

Se observar os problemas de permutações apresentados nas Aulas 49 e 50, verá que possuem duas características em comum:

- todos os objetos são usados na hora de formar o agrupamento;
- a ordem em que os objetos são arrumados no agrupamento faz diferença.

Nos problemas que envolviam anagramas com as letras de uma palavra, por exemplo, todas as letras da palavra original tinham de ser usadas, e a ordem em que arrumávamos as letras era importante, pois cada ordem diferente fornecia um novo anagrama.

Agora, você estudará um tipo diferente de problema em que:

- não utilizamos todos os objetos;
- a ordem em que os objetos são arrumados "não faz diferença".

Vamos começar compreendendo e resolvendo um problema.

Nossa aula

EXEMPLO 1 

Em uma obra havia três vagas para pedreiro. Cinco candidatos se apresentaram para preencher as vagas. De quantas formas o encarregado da obra pode escolher os três de que ele precisa?

Solução:

Note que ele não vai usar todos os candidatos, de 5 escolherá apenas 3.

Além disso, a ordem em que ele vai escolhê-los não faz diferença (se escolher primeiro João, depois José e por último Pedro, ou primeiro José, depois Pedro e por último João, o grupo escolhido será o mesmo).

Assim, você já deve ter notado que este não é um problema de permutações.

Se a ordem de escolha dos candidatos importasse, poderíamos usar o **princípio multiplicativo**. Nesse caso, teríamos 5 candidatos para a primeira vaga, 4 candidatos para a segunda e 3 candidatos para a última. A solução seria: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Portanto, haveria 60 formas de escolher os três novos pedreiros.

Usando o princípio multiplicativo, no entanto, contamos várias vezes o mesmo grupo de três candidatos:

João	José	Pedro
João	Pedro	José
Pedro	João	José
Pedro	José	João
José	Pedro	João
José	João	Pedro

Estes seis grupos são iguais e foram contados como agrupamentos diferentes nas 60 formas de escolher que encontramos. Para "retirar" as repetições destes e de outros grupos, vamos dividir o resultado pelo número de vezes que eles se repetem na contagem. Que número é esse?

Os grupos repetidos são as formas de "embaralhar" três candidatos escolhidos. Ora "embaralhar" três objetos é fazer permutações! O número de permutações de 3 objetos você já sabe que é $3! = 6$. Logo, basta dividir 60 por 6 para não contarmos as repetições dentro de cada grupo formado. Isso significa que há **10 maneiras de escolher** os três novos pedreiros, entre os 5 candidatos.

Uma fórmula para o cálculo das combinações

Esse tipo de agrupamento chama-se ***combinação***. No caso do nosso exemplo, temos uma combinação de 5 objetos (os 5 candidatos) 3 a 3 (apenas 3 serão escolhidos).

Vamos supor que temos **n** objetos disponíveis para escolha e que, destes, vamos escolher **p** objetos ($p < n$). O número de maneiras de se fazer essa escolha chama-se ***combinação*** e representa-se por C_n^p. Portanto, o número de combinações de **n** elementos **p** a **p** é calculado por:

$$C_n^p = \frac{n!}{(n \quad p)!\, p!}$$

Em nosso exemplo, temos $n = 5$ e $p = 3$. Aplicando a fórmula, obtemos:

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5 \quad 3)!\, 3!} = \frac{5!}{2!\, 3!} =$$

Vamos resolver mais alguns problemas nos próximos exemplos. Leia com atenção o enunciado, interprete-o e tente resolver cada exemplo sozinho. Só depois disso leia a solução.

Assim você poderá verificar se realmente compreende o problema e sua solução.

EXEMPLO 2

Em um hospital há apenas 5 leitos disponíveis na emergência. Dez acidentados de um ônibus chegam e é preciso escolher 5 para ocupar os leitos. Os outros ficariam em macas, no corredor do hospital. De quantas formas poderíamos escolher 5 pessoas que ficariam nos leitos?

Solução:

Na realidade, os responsáveis pela emergência estudariam cada caso e escolheriam os mais graves, mas imagine que todos tenham a mesma gravidade.

Nesse caso, há duas coisas a observar: de 10 pessoas, 5 serão escolhidas e a ordem em que a escolha é feita não importa. Trata-se, então, de uma combinação onde:

n = 10 (número de “objetos” disponíveis)
p = 5 (número de “objetos” a serem escolhidos)

Usando a fórmula, temos:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{(10 \quad 5)!\ 5!} = \frac{10!}{5!\ 5!}$$

$$\frac{\overset{2}{\cancel{10}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot 6}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 2$$

Logo, há **252 formas** de escolher as 5 pessoas que irão ocupar os 5 leitos.

EXEMPLO 3

Uma pequena empresa quer formar um time de futebol e 15 funcionários se inscreveram, dizendo que aceitam jogar em qualquer posição. De quantas formas é possível escolher os 11 jogadores do time?

Solução:

De 15 operários, 11 serão escolhidos e a ordem de escolha não importa, pois queremos escolher apenas os jogadores sem determinar as posições em campo.

Temos, então, as características de uma combinação de 15 pessoas (n = 15) para formar grupos de 11 (p = 11).

Usando a fórmula:

$$C_{15}^{11} = \frac{15!}{(15 \quad 11)!\ 11!} = \frac{15 \cdot}{}$$

$= 15 \cdot 7 \cdot 13 = 1365$

Assim, os jogadores podem ser escolhidos de **1 365 formas diferentes**.

EXEMPLO 4

Os 15 funcionários da empresa decidem escolher uma comissão de 3 membros para reivindicar apoio financeiro da diretoria ao novo time de futebol. Beto começou a pensar em todas as comissões possíveis em que ele pudesse ser um dos membros, e nas quais Edu não estivesse. Em quantas comissões Beto poderia pensar?

Solução:

Como Edu não pode participar de nenhuma das comissões pensadas por Beto, podemos retirá-lo do problema. Temos, então, 14 funcionários para formar comissões de 3.

Como um dos membros sempre é o Beto, precisamos descobrir os outros dois membros que devem ser escolhidos dentre 13 pessoas (Beto já foi "escolhido").

Assim, concluímos que o número máximo de comissões diferentes que Beto poderia pensar é:

$$C_{13}^{2} = \frac{13!}{(13 \quad 2)!\ 2!} = \frac{13!}{11!\ 2!}$$

EXEMPLO 5

De quantos modos podemos formar 2 times de vôlei com 12 moças?

Solução:

Como cada um dos times deve ter 6 jogadoras, o primeiro pode ser escolhido de C_{12}^{6} modos. Escolhido esse time, sobram exatamente 6 moças para formar o segundo. A resposta, então, parece ser $C_{12}^{6} \cdot 1$. No entanto, contamos cada time duas vezes. Observe, por exemplo, que as formações abaixo são idênticas:

	a, b, c, d, e, f	e	g, h, i, j, l, m
ou			
	g, h, i, j, l, m	e	a, b, c, d, e, f

A resposta correta é:

$$\frac{C_{12}^{6} \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\ \frac{12!}{6!\ 6!} = 462$$

Assim, temos então **462 modos de formar os 2 times**.

Exercício 1.

O chefe da seção de laticínios de um supermercado quer arrumar 6 marcas diferentes de ervilha em lata em duas prateleiras. Três delas ficarão na primeira prateleira e as outras três na segunda. De quantas formas ele pode escolher as marcas que ficarão em cada prateleira?

Exercício 2.

Uma quituteira faz 10 tipos diferentes de docinhos e 15 qualidades de salgadinhos. Para organizar uma festa, Lúcia vai escolher 10 tipos de salgadinhos e 6 tipos de docinhos diferentes. De quantas formas ela pode escolhê-los?

Exercício 3.

Entre os 12 acionistas de uma empresa, serão escolhidos 1 para presidente, 1 para vice-presidente e 2 tesoureiros. Sabendo que há 4 candidatos para os cargos de presidente e vice-presidente, e 5 candidatos a tesoureiros, responda: de quantas formas os cargos poderão ser preenchidos?

Exercício 4.

Uma emissora de TV tem 15 comerciais para serem igualmente distribuídos nos 5 intervalos de um filme. Se em cada intervalo forem exibidos 3 comerciais diferentes, de quantas formas pode-se escolher os comerciais que serão passados em cada intervalo?

Exercício 5.

Dezesseis policiais vão sair em duplas para fazer a ronda em vários pontos de um bairro de uma grande cidade.

a) De quantas formas as duplas poderão ser organizadas?

b) Se, dos 16 policiais, 4 são policiais femininas e não podemos fazer uma dupla com duas mulheres, de quantas formas poderemos formar as duplas?

AULA

52

Revisão de combinatória

Introdução

Nesta aula, vamos "misturar" os vários conceitos aprendidos em **análise combinatória**. Desde o princípio multiplicativo até os vários tipos de permutações e combinações.

Isso servirá para que você adquira segurança na interpretação e resolução de problemas. Novamente, propomos que você tente resolver cada exemplo e só depois confira sua solução com a nossa.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Uma diarista tem 10 casas para trabalhar, mas todas as donas-de-casa querem que ela trabalhe uma vez por semana. Sabendo que domingo é seu dia livre e que só em duas casas ela pode trabalhar no sábado, calcule de quantas formas a diarista pode organizar sua semana.

Solução:

Este é um problema em que a ordem faz diferença, mas não podemos usar todos os objetos (das 10 casas só podemos escolher 6). Assim, aplicamos o princípio multiplicativo para resolvê-lo.

No sábado escolhemos 1 entre 2 casas.

De segunda à sexta, temos: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$

Assim, as formas de organizar a semana são: $6\,720 \cdot 2 =$ **13 440 formas**

EXEMPLO 2

Uma bibliotecária recebeu uma doação de 3 livros diferentes de Matemática, 4 livros diferentes de Química e 3 livros diferentes de Física. De quantas formas ela poderá arrumá-los em uma prateleira de livros novos?

Solução:

Neste problema, usamos todos os objetos (os 10 livros) e a ordem de arrumação faz diferença. Logo, trata-se de uma permutação de 10 objetos.

$10! = 3\,628\,800$

Há **3 628 800 maneiras** de arrumar os livros na prateleira.

EXEMPLO 3

No exemplo anterior, a bibliotecária levou a maior bronca, pois deveria ter deixado junto os livros de mesma matéria! E agora, de quantas formas poderá arrumá-los?

Solução:

Os três livros de Matemática podem ser arrumados de $3! = 6$ maneiras. Os quatros de Física de $4! = 24$ maneiras e os de Química de $3! = 6$ maneiras.

Além disso, podemos variar a ordem de arrumação das matérias:

Química, Física, Matemática ou
Física, Química, Matemática ou
Matemática, Física, Química etc.

Como podemos variar a ordem das matérias de $3! = 6$ formas diferentes, poderemos arrumar os livros de

6	·	24	·	6	·	6	=	**5 184 maneiras**
↓		↓		↓		↓		
Matem.		**Física**		**Química**		**Ordem das matérias**		

EXEMPLO 4

Imagine que, além da exigência do problema anterior (que os livros de cada matéria fiquem juntos), haja dois livros de Física iguais e dois livros de Matemática também iguais. Quantas formas diferentes existem de arrumar os livros na prateleira?

Solução:

Se há dois livros de Física e dois de Matemática iguais, temos permutações com repetição para os livros dessas matérias.

Observando a solução do Exemplo 3, temos:

$$\frac{6}{2!} \cdot \frac{24}{2!} \cdot 6 \cdot 6 = \frac{6}{2} \cdot \frac{24}{2} \cdot 36 = 1296$$

$\frac{6}{2!}$	$\frac{24}{2!}$	6	6
↓	↓	↓	↓
Matem.	**Física**	**Química**	**Ordem**

Portanto, há **1296 formas** de arrumar os livros.

EXEMPLO 5

Dos 12 jogadores levados para uma partida de vôlei, apenas 6 entrarão em quadra no início do jogo. Sabendo que 2 são levantadores e 10 são atacantes, como escolher 1 levantador e 5 atacantes?

Solução:

Dos 2 levantadores escolheremos 1, e dos 10 atacantes apenas 5 serão escolhidos. Como a ordem não faz diferença, temos:

$$C_2^1 = \frac{2!}{(2-1)!1!} = \frac{2!}{1!1!} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 2 \quad \text{escolhas do levantador}$$

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!5!} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252 \quad \text{escolhas dos 5 atacantes}$$

Logo, teremos $2 \cdot 252 =$ **504** formas de escolher o time.

EXEMPLO 6

Durante o jogo, 2 atacantes e o levantador foram substituídos. De quantas formas isso poderia ser feito?

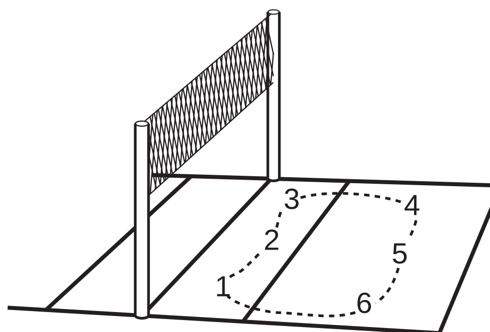
Solução:

Dos jogadores que não estavam na quadra, 1 era levantador e 5 eram atacantes. Assim, só há uma forma de substituir o levantador e C_5^2 formas de substituir os dois atacantes. Logo, as substituições poderiam ter sido feitas de:

$$1 \cdot C_5^2 = 1 \cdot \frac{5!}{(5-2)!2!} = 1 \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10 \quad \text{formas diferentes.}$$

EXEMPLO 7

Ainda na partida de vôlei, depois de escolhido o time que entrará em campo, é preciso decidir sua posição na quadra. Esse posicionamento é mantido durante todo o "set", havendo apenas uma rotação do time à cada "vantagem" conseguida. De quantas formas o técnico pode arrumar os 6 jogadores escolhidos na quadra?



Solução:

Como se trata do número de permutações circulares de 6 elementos, temos:

$$\frac{6!}{6} = 5! = 120$$

EXEMPLO 8

Quantas seriam as opções, se contássemos todos os times com todas as posições possíveis na quadra?

Solução:

No Exemplo 5 teríamos 504 formas de escolher o time. Como cada time pode ser arrumado na quadra de 120 maneiras, a resposta é $504 \cdot 120 =$ **60 480 opções**.

EXEMPLO 9

Seis homens e três mulheres inscreveram-se para trabalhar com menores carentes num projeto da prefeitura local, mas serão escolhidos apenas 5 participantes. De quantas formas podemos escolher a equipe de modo que haja pelo menos uma mulher?

Solução:

Há duas formas de resolver este problema:

Primeira. Como tem de haver **pelo menos uma mulher** no grupo, podemos ter 1, 2 ou 3 mulheres. Portanto, as maneiras de escolhê-las são:

$C_3^3 \Rightarrow$ três mulheres

$C_3^2 \Rightarrow$ duas mulheres

$C_3^1 \Rightarrow$ uma mulher

Quando houver três mulheres no grupo, poderemos escolher apenas dois homens; se houver duas mulheres, escolheremos três homens e quando houver apenas uma mulher, serão escolhidos quatro homens. Então, o número de grupos será:

$$\underbrace{C_3^3}_{\text{3 mulheres}} \cdot \underbrace{C_6^2}_{\text{2 homens}} + \underbrace{C_3^2}_{\text{2 mulheres}} \cdot \underbrace{C_6^3}_{\text{3 homens}} + \underbrace{C_3^1}_{\text{1 mulher}} \cdot \underbrace{C_6^4}_{\text{4 homens}}$$

Observe que somamos os números de cada alternativa porque devemos optar por uma ou outra. Isto significa que um grupo pode ter:

3 mulheres e 2 homens **ou**
2 mulheres e 3 homens **ou**
1 mulher e 4 homens

Calculando, obtemos:

$$C_3^3 \cdot C_6^2 + C_3^2 \cdot C_6^3 + C_3^1 \cdot C_6^4 =$$

$$= \frac{3!}{3!} \cdot \frac{6!}{4!2!} + \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{6!}{3!3!} + \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{6!}{4!} =$$

$$= 15 + 60 + 45 = 120$$

Logo, há **120 grupos de 5 pessoas** com pelo menos uma mulher.

Segunda. Depois de calcularmos o número total de combinações de 5 pessoas que podemos formar com 6 homens e 3 mulheres (9 pessoas), calcularemos o número de grupos onde não há **nenhuma mulher**. Subtraindo o segundo do primeiro (total de combinações) encontraremos a quantidade de grupos onde há pelo menos uma mulher:

$$C_9^5 = \frac{6!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Grupos onde não há mulher:

$$C_9^5 = \frac{6!}{1!5!} = 6$$

(C_6^5 = 6 homens combinados 5 a 5)

Logo, o número de grupos onde há pelo menos uma mulher será:

126 – 6 = **120**

Este resultado já havia sido obtido pelo outro método de resolução. Assim como este, muitos outros problemas de análise combinatória podem ser resolvidos de mais de uma maneira. O importante é interpretá-los corretamente, de acordo com o enunciado.

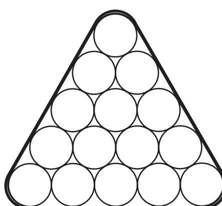
Exercícios

Exercício 1

Tenho 15 pares de meias das quais 5 são brancas, 4 são pretas e as demais são coloridas e diferentes umas das outras. Fiz um "rolinho" com cada par e quero enfileirá-los em minha gaveta. De quantas formas posso fazê-lo, deixando juntas as meias brancas, pretas e coloridas?

Exercício 2

Em um certo jogo de bilhar existem 6 bolas vermelhas idênticas e mais 9 bolas coloridas. Sabendo que as bolas são arrumadas na mesa com a ajuda de um triângulo de madeira, responda: de quantas formas elas podem ser arrumadas?



Exercício 3

Um grupo de 8 pessoas se hospedará em um hotel. De quantas formas elas poderão se arrumar, sendo 3 no quarto 2A, 3 no quarto 2B e 2 no quarto 2C?

Exercício 4

Um jardineiro tem 8 tipos diferentes de flores para plantar em 8 canteiros dispostos em círculo ao redor de um chafariz. De quantas formas ele pode compor os canteiros?

Exercício 5

De quantas formas podemos preencher um cartão de loteria esportiva (com 13 jogos) fazendo apenas jogos simples (isto é, uma alternativa em cada jogo: coluna 1, coluna 2 ou coluna do meio)?

Exercício 6

Em uma empresa, o diretor de um departamento tem de escolher uma equipe para participar de um curso no exterior. Seus subordinados são 10: 5 homens e 5 mulheres. Mas a equipe será de apenas 4 pessoas e pelo menos uma terá de ser homem. Quantas possibilidades há para a escolha da equipe?

AULA

53

O conceito de probabilidade

Introdução

Nesta aula daremos início ao estudo da **probabilidades**. *Quando usamos probabilidades*?

Ouvimos falar desse assunto em situações como: a probabilidade de ser sorteado, de acertar numa aposta, de um candidato vencer uma eleição, de acertar o resultado de um jogo etc. Portanto, *usamos probabilidades em situações em que dois ou mais resultados diferentes podem ocorrer e não é possível saber, prever, qual deles realmente vai ocorrer em cada situação.*

Ao lançarmos para o alto uma moeda e quisermos saber se o resultado é cara ou coroa, não podemos prever o resultado mas podemos calcular as chances de ocorrência de cada um. Este cálculo é a probabilidade de ocorrência de um resultado.

Por meio dos exemplos desta aula, você aprenderá o cálculo de probabilidades.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Qual a chance de dar cara no lançamento de uma moeda?



cara



coroa

Solução:

Raciocinando matematicamente, os resultados cara e coroa têm as mesmas chances de ocorrer. Como são duas possibilidades (cara ou coroa) podemos dizer que as chances de dar cara é de 1 para 2. Isto é o mesmo que dizer que a probabilidade de o resultado ser cara é $\frac{1}{2}$ ou 0,5 ou 50%.

Neste exemplo calculamos intuitivamente a probabilidade de o resultado ser cara e você deve ter percebido que a probabilidade de dar coroa é a mesma, 50%.

No entanto, quando dizemos que a probabilidade é $\frac{1}{2}$ ou 50% isso não significa que a cada 2 lançamentos um vai ser cara e o outro vai ser coroa. O fato de a probabilidade ser $\frac{1}{2}$ ou 50% quer dizer apenas que as chances são iguais e que, se fizermos muitos lançamentos, é provável que aproximadamente metade deles dê cara como resultado.

EXEMPLO 2

O chefe de uma seção com 5 funcionários deu a eles 1 ingresso da final de um campeonato para que fosse sorteado. Após escreverem seus nomes em papéis idênticos, colocaram tudo num saco para fazer o sorteio. Qual a chance que cada um tem de ser sorteado?

Solução:

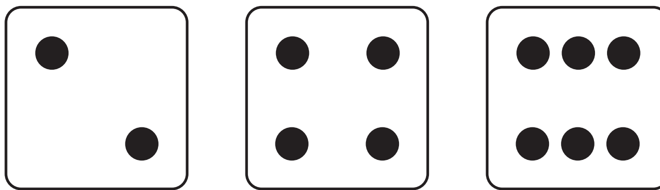
Os 5 funcionários têm todos a mesma chance de serem sorteados. No caso de Paulo, por exemplo, as chances de ser sorteado são de 1 para 5, ou $\frac{1}{5}$. Então, podemos dizer que a chance, ou a probabilidade, de cada um deles ser sorteado é de $\frac{1}{5}$, ou 0,2, ou ainda 20%.

EXEMPLO 3

No lançamento de um dado, qual a probabilidade de o resultado ser um número par?

Solução:

Para que o resultado seja par devemos conseguir:



Assim, temos 3 resultados favoráveis (2, 4 ou 6) em um total de 6 resultados possíveis (1, 2, 3, 4, 5, 6).

As chances de dar um resultado par são 3 num total de 6. Então, podemos dizer que a probabilidade de isso acontecer é $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$.

Generalizando essa solução:

$$P\text{ (par)} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de resultados favoráveis a E}}{\text{n}^\circ \text{ total de resultados possíveis}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Onde P (par) significa *probabilidade de o resultado ser par*.

Nos três exemplos que acabamos de ver há dois ou mais resultados possíveis, todos com a mesma chance de ocorrer. A probabilidade de ocorrer um desses resultados ou um conjunto de resultados que satisfaçam uma condição ou exigência E, é representado por p (E) e calculado por:

$$p\text{ (E)} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de resultados favoráveis a E}}{\text{n}^\circ \text{ total de resultados possíveis}}$$

EXEMPLO 4

No Exemplo 2 da Aula 48 vimos que, num restaurante que prepara 4 pratos quentes, 2 saladas e 3 sobremesas diferentes, existem 24 maneiras diferentes de um freguês se servir de um prato quente, uma salada e uma sobremesa.

No Exemplo 3 daquela aula descobrimos que havia, dentre os 24 cardápios possíveis, 6 cardápios econômicos. Qual a probabilidade de um freguês desavisado escolher uma das opções mais caras?

Solução:

Já sabemos que a probabilidade de escolher os mais caros será:

$$p(\text{mais caro}) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de cardápios mais caros}}{\text{n}^\circ \text{ de cardápios possíveis}}$$

Se temos 6 opções econômicas num total de 24, temos 24 – 6 = 18 opções mais caras. Como o número de cardápios possíveis é 24, então:

$$p(\text{mais caro}) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

As chances de esse freguês escolher um dos cardápios mais caros é de **75%**.

EXEMPLO 5

Numa urna estão 10 bolas de mesmo tamanho e de mesmo material, sendo 8 pretas e 2 brancas. Pegando-se uma bola qualquer dessa urna, qual a probabilidade de ela ser branca?

Solução:

$$p(\text{branca}) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de bolas brancas}}{\text{n}^\circ \text{ total de bolas}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \mathbf{20\%}$$

EXEMPLO 6

De um baralho normal de 52 cartas e mais 2 coringas retiramos uma das cartas ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) ser um ás?

b) ser um coringa, em jogos que também consideram o 2 como coringa?

Solução:

O número total de cartas é 54 sendo que há 13 cartas (ás, 2 a 10, valete, dama, rei) de cada um dos 4 naipes (copas, ouro, paus e espadas) e 2 coringas.

a) $$p(\text{ás}) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de ases existentes}}{\text{n}^\circ \text{ total de cartas}} = \frac{4}{54} = 0{,}07 = \mathbf{7\%}$$

b) Como as 4 cartas com nº 2 também são consideradas coringas, a probabilidade de tirar um coringa será:

$$p(\text{coringa}) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\,\text{de coringas}}{\text{n}^{\text{o}}\,\text{total de cartas}} = \frac{6}{54} = 0{,}11 = \mathbf{11\%}$$

EXEMPLO 7 

No Exemplo 9 da Aula 52, vimos que, com 6 homens e 3 mulheres, podemos formar $C_9^5 = 126$ grupos de 5 pessoas e $C_6^5 = 6$ grupos de 5 pessoas nos quais só escolhemos homens. Supondo que as chances de cada um dos grupos é a mesma, qual a probabilidade de escolher:

a) um grupo onde não há mulheres;

b) um grupo onde haja pelo menos uma mulher.

Solução:

a) p (não mulher) = $\frac{6}{126}$ @ 0,05 = 5%

b) p (pelo menos 1 mulher) = $\frac{120}{126}$ @ 0,95 = 95%

Os valores possíveis para as probabilidades

No Exemplo 7 os grupos contados em **a)** e em **b)** completam todos os grupos possíveis (6 + 120 = 126). Portanto as possibilidades somadas darão $\frac{6}{126} + \frac{120}{126} = \frac{126}{126}$ ou 100% (5% + 95%).

Já sabemos que:

$$p\,(E) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\ \text{de resultados favoráveis a E}}{\text{n}^{\text{o}}\ \text{total de resultados possíveis}} = \frac{m}{n}$$

A quantidade **m** será escolhida dentre as **n** existentes, por isso **m** deverá ser menor ou igual a **n** (m £ n) e a fração $\frac{m}{n}$ será menor ou igual a 1: p (E) £ 1.

Caso a condição E exigida não possa ser cumprida, ou seja, se não houver nenhum resultado favorável a E, o número **m** será zero e p (E) = $\frac{m}{n}$ = 0

Percebemos ainda que a fração $\frac{m}{n}$ será sempre positiva pois **m** e **n** são números naturais.

Assim, podemos concluir que:

0 £ $\frac{m}{n}$ £ 1 ou 0 £ p (E) £ 1

EXEMPLO 8

Com os algarismos 1, 3 e 5 formamos todos os números de 3 algarismos possíveis. Dentre eles escolhemos um número, ao acaso.

a) Qual a probabilidade de escolher um número que seja múltiplo de 3?

b) Qual a probabilidade de o número escolhido ser par?

Solução:

O total de números formados por 3 algarismos é igual ao número de permutações possíveis com os algarismos 1, 3 e 5 em três posições, ou seja, 3! = 6.

a) Como a soma dos algarismos 1 + 3 + 5 é igual a 9, que é um múltiplo de 3, qualquer um dos números formados será múltiplo de 3. Assim, a probabilidade de isso ocorrer será:

$$P\ (\text{múltiplo de } 3) = \frac{6}{6} = 1$$

b) Como qualquer dos algarismos 1, 3 e 5 colocados no final do número formado gera um número ímpar, não formaremos nenhum número par. Assim, como a quantidade de casos favoráveis é zero, temos:

$$p\ (\text{par}) = \frac{0}{6} = 0$$

Um pouco de história

Os primeiros estudos envolvendo probabilidades foram motivados pela análise de jogos de azar. Sabe-se que um dos primeiros matemáticos que se ocupou com o cálculo das probabilidades foi Cardano (1501–1576). Data dessa época a expressão que utilizamos até hoje para o cálculo da probabilidade de um evento (número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis).

Com Fermat (1601–1665) e Pascal (1623–1662), a teoria das probabilidades começou a evoluir e ganhar mais consistência, passando a ser utilizada em outros aspectos da vida social, como, por exemplo, auxiliando na descoberta da vacina contra a varíola no século XVIII.

Atualmente, a teoria das probabilidades é muito utilizada em outros ramos da Matemática (como o Cálculo e a Estatística), da Biologia (especialmente nos estudos da Genética), da Física (como na Física Nuclear), da Economia, da Sociologia etc.

Exercício 1

De um baralho de 52 cartas é retirada uma carta ao acaso.

a) Qual a probabilidade de a carta retirada ser um rei?

b) Qual a probabilidade de a carta retirada ser uma figura (valete, dama ou rei)?

Exercício 2

No lançamento de um dado, qual a probabilidade de o número obtido ser menor ou igual a 4?

Exercício 3

No lançamento de dois dados, um verde e outro vermelho, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja:

a) 7

b) 1

c) maior que 12

d) um número par

Exercício 4

Na Aula 48 vimos que na SENA existem 11.441.304.000 maneiras de escolher 6 números de 01 a 50. Se você apostar em 6 números, qual a probabilidade de sua aposta ser a sorteada?

Exercício 5

O que acontece se você apostar em 5 números de 01 a 100? Qual a probabilidade de você acertar a quina de números sorteada?

Exercício 6

Suponha que sejam iguais as chances de qualquer uma das placas novas para automóveis (3 letras e 4 números) ser escolhida para o seu automóvel. Qual a probabilidade de você receber uma placa com as iniciais de seu nome em qualquer ordem?

AULA

54

Calculando probabilidades

Introdução

Você já aprendeu que a probabilidade de um evento E é:

$$P(E) = \frac{n^o \text{ de resultados favoráveis}}{n^o \text{ total de resultados possíveis}}$$

Nesta aula você aprenderá a calcular a probabilidade de ocorrência de um evento ***e*** outro, bem como a ocorrência de um ***ou*** outro evento. Em muitas situações a ocorrência de um fato qualquer depende da ocorrência de um outro fato; nesse caso dizemos que são ocorrências dependentes. Em situações onde não há essa dependência, precisamos calcular probabilidades de duas situações ocorrerem ao mesmo tempo.

Para abordarmos situações como as que acabamos de descrever, utilizaremos vários exemplos durante esta aula. Leia-os com bastante atenção e procure refazer as soluções apresentadas.

Nossa aula

Cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento e de outro

EXEMPLO 1

Num grupo de jovens estudantes a probabilidade de que um jovem, escolhido ao acaso, tenha média acima de 7,0 é $\frac{1}{5}$. Nesse mesmo grupo, a probabilidade de que um jovem saiba jogar futebol é $\frac{5}{6}$. Qual a probabilidade de escolhermos um jovem (ao acaso) que tenha média maior que 7,0 e saiba jogar futebol?

Solução:

O fato de ter média maior que 7,0 não depende do fato de saber jogar futebol, e vice-versa. Quando isso ocorre, dizemos que os eventos são independentes. Considere então os eventos:

A: ter média acima de 7,0.

B: saber jogar futebol.

A e B: ter média acima de 7,0 ***e*** saber jogar futebol.

Como queremos calcular P (A e B), pense o seguinte: de todos os jovens, $\frac{1}{5}$ têm média acima de 7,0 e $\frac{5}{6}$ sabem jogar futebol. Ora, $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{5}$, ou seja, $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$, sabem jogar futebol e têm média acima de 7,0. Portanto, P (A e B) = $\mathbf{\frac{1}{6}}$.

Repare que para encontrarmos P (A e B) efetuamos P (A) · P (B). Então, concluímos que, quando A e B são eventos independentes (não têm "nada a ver" um com o outro):

$$P\ (A \text{ e } B) = P\ (A) \cdot P\ (B)$$

EXEMPLO 2

Dos 30 funcionários de uma empresa, 10 são canhotos e 25 vão de ônibus para o trabalho. Escolhendo ao acaso um desses empregados, qual a probabilidade de que ele seja canhoto e vá de ônibus para o trabalho?

Solução:

Considere os eventos:

A : ser canhoto

B : ir de ônibus para o trabalho

É claro que A e B são eventos independentes, portanto um não depende em nada do outro. A probabilidade de os dois eventos (A e B) ocorrerem simultaneamente é calculada por P (A e B) = P (A) · P (B).

Calculando:

$$P\ (A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$P\ (B) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

$$P\ (A \text{ e } B) = P\ (A) \cdot P\ (B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

A probabilidade de que ele seja canhoto e vá de ônibus para o trabalho é de $\mathbf{\frac{5}{18}}$.

EXEMPLO 3

Alguns atletas participam de um triathlon (prova formada por 3 etapas consecutivas: natação, corrida e ciclismo). A probabilidade de que um atleta escolhido ao acaso termine a primeira etapa (natação) é $\frac{4}{7}$. Para continuar na competição com a segunda etapa (corrida) o atleta precisa ter terminado a natação. Dos atletas que terminam a primeira etapa, a probabilidade de que um deles, escolhido ao acaso, termine a segunda é $\frac{3}{4}$. Qual a probabilidade de que um atleta que iniciou a prova, e seja escolhido ao acaso, termine a primeira e a segunda etapas?

Solução:

A : terminar a 1ª etapa da prova (natação).

B : terminar a 2ª etapa da prova (corrida), tendo terminado a 1ª.

Note que A e B não são eventos independentes pois, para começar a 2ª etapa é necessário, antes, terminar a 1ª.

Nesse caso dizemos que a ocorrência do evento B depende (está condicionada) à ocorrência do evento A.

Utilizamos então a notação B/A, que significa a dependência dos eventos, ou melhor, que o evento B/A denota a ocorrência do evento B, sabendo que A já ocorreu. No caso deste exemplo, temos: B/A terminar a 2ª etapa (corrida), sabendo que o atleta terminou a 1ª etapa (natação).

E agora? Como calcular P (A e B)?

É simples: no lugar de usarmos P(B) na fórmula P(A e B) = P(A) · P(B), usaremos P(B/A) já que a ocorrência de B depende da ocorrência de A.

O enunciado deste problema nos diz que $P(A) = \frac{4}{7}$ e $P(B/A) = \frac{3}{4}$; assim,

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{7}$$

A probabilidade de que um atleta, escolhido ao acaso, termine a 1ª e a 2ª etapas é $\frac{3}{7}$.

> Quando A e B ***não*** são eventos ***independentes*** a probabilidade de ocorrência de A e B é calculada por:
>
> $$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$
>
> onde P (B/A) é a probabilidade de B, dado que A já ocorreu.

EXEMPLO 4

No exame para tirar a carteira de motorista, a probabilidade de aprovação na prova escrita é $\frac{9}{10}$. Depois de ser aprovado na parte teórica, há uma prova prática de direção. Para os que já passaram no exame escrito, a probabilidade de passar nessa prova prática é $\frac{2}{3}$.

Qual a probabilidade de que, escolhido um candidato ao acaso, ele seja aprovado em ambas as provas escrita e prática e tire a carteira de motorista?

Solução:

Considere os eventos:

A: aprovação na prova escrita.

B: aprovação na prova prática de direção.

Os eventos A e B não são independentes, pois é preciso ter aprovação na prova escrita e para fazer a prova prática de direção. Como a ocorrência de B está condicionada à ocorrência de A, criamos o evento:

B/A: ter aprovação na prova prática de direção, sabendo que o candidato foi aprovado na prova escrita.

Para calcular P(A e B), usamos: P(A e B) = P(A) · P(B/A)

Calculando:

$P(A) = \frac{9}{10}$ $\qquad P(B/A) = \frac{2}{3}$ $\qquad P(A \text{ e } B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

A probabilidade de passar na prova escrita e na prova de direção é $\frac{3}{5}$.

Cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento ou outro

EXEMPLO 5

Na Copa América de 1995, o Brasil jogou com a Colômbia. No primeiro tempo, a seleção brasileira cometeu 10 faltas, sendo que 3 foram cometidas por Leonardo e outras 3 por André Cruz. No intervalo, os melhores lances foram reprisados, dentre os quais uma falta cometida pelo Brasil, escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de que a falta escolhida seja de Leonardo ou de André Cruz?

Solução:

Das 10 faltas, 3 foram de Leonardo e 3 de André Cruz. Portanto, os dois juntos cometeram 6 das 10 faltas do Brasil. Assim, a probabilidade de que uma das faltas seja a escolhida dentre as 10 é $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Também podemos resolver este problema da seguinte maneira:

- probabilidade de ser escolhida uma falta do Leonardo = $\frac{3}{10}$.
- probabilidade de ser escolhida uma falta do André Cruz = $\frac{3}{10}$.
- probabilidade de ser escolhida uma falta de um destes dois jogadores $= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Lembre-se de que qualquer uma das duas escolhas terá um resultado favorável. Se A e B são os eventos (escolher uma falta de Leonardo **ou** escolher uma falta de André Cruz), estamos interessados na probabilidade do evento A ou B.

Temos então:

P(A ou B) = P(A) + P(B)

Note que isso vale porque uma falta não pode ser cometida pelos dois jogadores ao mesmo tempo, ou seja, o evento A ***e*** B é impossível.

EXEMPLO 6

Uma empresa que fabrica suco de laranja fez uma pesquisa para saber como está a preferência do consumidor em relação ao seu suco e ao fabricado por seu principal concorrente. Essa empresa é chamada SOSUMO, e seu concorrente SUMOBOM. A pesquisa concluiu que dos 500 entrevistados, 300 preferiam o SUMOBOM, 100 consumiam os dois, 250 preferiam SOSUMO e 50 nenhum dos dois. Um dos entrevistados foi escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de que ele seja:

a) consumidor de SOSUMO ***e*** SUMOBOM;

b) consumidor de SOSUMO ***ou*** SUMOBOM.

Solução:

a) De acordo com a pesquisa dos 500 entrevistados, 100 consomem os dois sucos. Logo, a probabilidade de que um entrevistado, escolhido ao acaso, consuma os dois sucos é: $\frac{100}{500} = \frac{1}{5}$.

b) Usando o raciocínio do Exemplo 5, para saber a probabilidade da ocorrência de um evento ***ou*** outro, somamos as probabilidades de os dois eventos ocorrerem separadamente. Mas, neste exemplo, devemos tomar cuidado com o seguinte: existem pessoas que consomem os dois sucos indiferentemente, compram o que estiver mais barato, por exemplo. Assim, não podemos contar essas pessoas (que consomem um ***e*** outro) duas vezes. Observe que a soma dos resultados é maior que o número de entrevistados (300 + 100 + 200 + 50 = 650), ou seja, há pessoas que, apesar de preferirem um dos sucos, consomem os dois. Para facilitar daremos nomes aos eventos:

A : preferir o SOSUMO

B: preferir o SUMOBOM

A e B: consumir SOSUMO ***e*** SUMOBOM

A ou B: consumir SOSUMO ***ou*** SUMOBOM

Repare que este ***ou*** quer dizer: apenas o SOSUMO ***ou*** apenas o SUMOBOM.

Fazendo P(A ou B) = P(A) + P(B) estamos contando duas vezes as pessoas que apesar de preferirem um dos sucos, consomem os dois. Logo, devemos subtrair de P(A) + P(B) o resultado de P(A e B) para retirar a "contagem dobrada". Temos então:

$$P\,(A \text{ ou } B) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \text{ e } B)$$

Calculando:

$$P(A) = \frac{250}{500} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5} \qquad P(A \text{ e } B) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$$

$$P(A \text{ ou } B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$$

A probabilidade de que o escolhido consuma um suco ou outro é $\frac{9}{10}$.

Observação

Em exemplos como o que acabamos de ver há outras soluções possíveis. Observe que o evento A ou B (consumir um suco ou outro) deve incluir como casos favoráveis todas as pessoas que ***não*** fazem parte do grupo dos que ***não consomem esses dois sucos***.

Sabíamos que dos 500 entrevistados, 50 pessoas consumiam ***nenhum dos dois*** e a probabilidade de escolhermos uma dessas pessoas ao acaso era $\frac{50}{500}$, ou seja, $\frac{1}{10}$. Assim, podíamos concluir que a probabilidade de ***não fazer parte desse*** grupo era $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$, raciocinando por exclusão.

Uma representação gráfica

Nesses tipos de problema, geralmente usamos uma representação gráfica para visualizar melhor o enunciado.

Representamos todos os entrevistados (todos os casos possíveis) por um retângulo e os eventos por círculos dentro deste retângulo, como na seguinte figura:

A parte comum dos dois círculos corresponde ao evento (A e B). No exemplo anterior, 100 pessoas consumiam os dois sucos e a representação seria assim:

Como 300 consumidores preferiam SUMOBOM (evento B), 250 o SOSUMO (evento A) e já temos 100 pessoas contadas para cada um dos eventos, devemos completar o gráfico da seguinte maneira:

Os 50 que ficariam fora dos dois círculos seriam aqueles que não consomem esses sucos. Observe que 150 + 100 + 200 + 50 é igual a 500, que é o número total de entrevistados. Agora observe o cálculo de P(A e B) e P(A ou B):

$$P(A \text{ e } B) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} \qquad P(A \text{ ou } B) = \frac{150 + 100 + 200}{500} = \frac{450}{500} = \frac{9}{10}$$

$$\text{e } P\ (\text{não } (A \text{ ou } B)) = \frac{50}{500} = \frac{1}{10} \quad \text{ou } P\ (\text{não } (A \text{ ou } B)) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

EXEMPLO 7

Em uma sala do Telecurso 2000, 12 alunos gostam de vôlei, 13 gostam de futebol, 5 gostam dos dois esportes e outros 10 não gostam nem de vôlei nem de futebol. Sabendo que a turma tem 30 alunos, qual a probabilidade de que um aluno, escolhido ao acaso, goste de vôlei ***ou*** de futebol?

Solução:

Considere os eventos

A: gostar de futebol

B: gostar de vôlei

Vamos representá-los graficamente.

Como o total de alunos é 30, temos $P(A \text{ ou } B) = \frac{7 + 5 + 8}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

ou ainda P(A ou B) = P(A) + P(B) – P(A e B) =

$$\frac{12}{30} + \frac{13}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Resolvendo por exclusão, teríamos:

$$P(A \text{ ou } B) = 1 - P(\text{não } (A \text{ ou } B)) = 1 - \frac{10}{30} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Agora, resolva os exercícios propostos.

Exercício 1

Em uma cidade do interior do Brasil, a probabilidade de que um habitante escolhido ao acaso tenha televisão em casa é $\frac{11}{12}$. Já a probabilidade de esse habitante ser um comerciante é $\frac{1}{11}$. Escolhendo um habitante dessa cidade ao acaso, qual a probabilidade de que ele tenha televisão em casa e seja comerciante?

Exercício 2

Alguns professores estão prestando concurso para dar aulas em uma escola. Inicialmente, eles farão uma prova escrita e, depois de serem aprovados nessa prova, farão uma prova prática. Aquele que for aprovado na prova prática será contratado. Sabendo que a probabilidade de aprovação na prova escrita é $\frac{1}{4}$ e de aprovação na prova prática (depois de ser aprovado na escrita) é $\frac{2}{3}$, calcule a probabilidade de que um professor, escolhido ao acaso, seja contratado.

Exercício 3

Em uma noite de sexta-feira, pesquisadores percorreram 500 casas perguntando em que canal estava ligada a televisão. Desse modo, descobriram que em 300 casas assistiam ao canal VER-DE-PERTO, 100 viam o canal VER-MELHOR e outras 100 casas não estavam com a TV ligada. Escolhida uma das 500 casas, ao acaso, qual a probabilidade de que a TV esteja sintonizada no canal VER-DE-PERTO ou no canal VER-MELHOR?

Exercício 4

Dos 140 funcionários de uma fábrica, 70 preferem a marca de cigarros FUMAÇA, 80 preferem TOBACO e 30 fumam ambas sem preferência. Sabendo que 20 funcionários não fumam, calcule a probabilidade de que um funcionário, escolhido ao acaso:

a) fume FUMAÇA ***e*** TOBACO

b) fume FUMAÇA ***ou*** TOBACO

Exercício 5

Com as mesmas informações do exercício anterior, calcule a probabilidade de que um funcionário, escolhido ao acaso:

a) fume ***só*** FUMAÇA

b) fume ***só*** TOBACO

c) fume ***só*** FUMAÇA ou ***só*** TOBACO

d) não fume nenhuma das duas marcas de cigarro

e) não fume FUMAÇA

f) não fume TOBACO

AULA

55

Estimando probabilidades

Introdução

Nas aulas anteriores estudamos o cálculo de probabilidades e aplicamos seu conceitos a vários exemplos. Assim, vimos também que nem sempre podemos calcular diretamente a probabilidade de ocorrência de um evento.

Em alguns dos problemas resolvidos, como os de jogos de azar, não foi difícil calcular a probabilidade de ocorrência de um evento utilizando nossos conhecimentos de análise combinatória. Por outro lado, em alguns problemas envolvendo pesquisas de opinião, por exemplo, o cálculo da probabilidade foi feito com base em uma amostra de uma parte da população.

Nossa aula

Nesta aula vamos discutir um pouco mais os procedimentos para o cálculo do valor da probabilidade de um evento, quanto ele não pode ser calculado diretamente ou não é conhecido previamente.

Sabemos que a maioria das indústrias possui um setor responsável pelo controle de qualidade de sua produção. Até mesmo para uma produção artesanal e/ou caseira devemos nos preocupar com o controle de qualidade do que se produz.

É claro que cada peça não aceita pelo controle de qualidade acarreta um prejuízo ao seu fabricante, seja pelo desperdício de tempo ou de material (caso essa peça não possa ser reaproveitada). Sabemos que o melhor para todos é fazer bem feito da primeira vez.

Além disso, é comum as empresas incluírem em seus preços de venda, além do custo e do lucro de uma peça, parte do prejuízo com o desperdício.

Mas como saber qual o desperdício? É preciso pelo menos ***estimar*** a probabilidade de fabricar uma peça rejeitada pelo controle de qualidade. Normalmente, essa é uma tarefa da equipe que trabalha nessa área.

EXEMPLO 1

Uma fábrica de camisetas tem um setor de corte da malha e outro de costura. No entanto, o fabricante está tendo prejuízo, pois várias camisetas estão sendo cortadas errado. Como não podem ser costuradas, a malha é desperdiçada. Se ele deseja controlar a qualidade de seus produtos e conhecer melhor seu problema o que deve fazer?

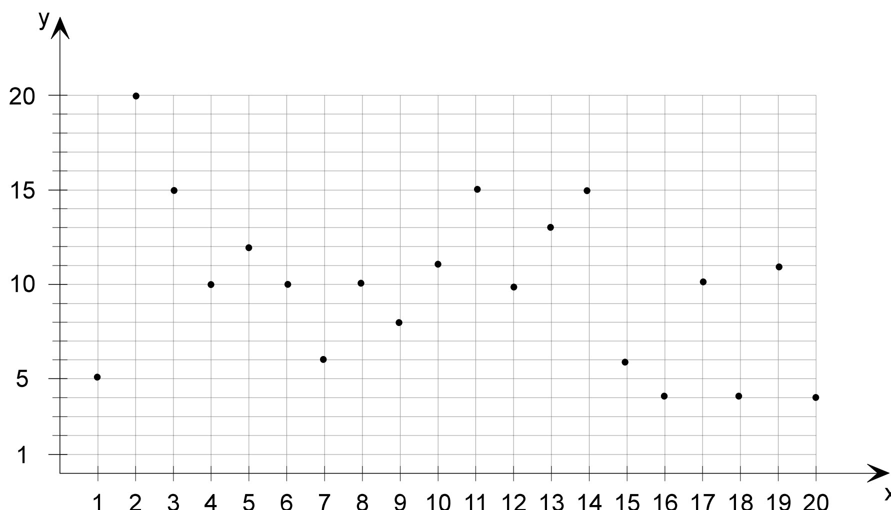
Solução 1:

Inicialmente, caso o fabricante não tenha ainda, deve criar um setor para controlar a qualidade da produção. Se sua produção é pequena a ponto de poder verificar todas as camisetas cortadas, ele não precisará trabalhar com amostras (parte da produção).

Verificando toda a produção diária, o funcionário anotará diariamente quantas camisetas são desperdiçadas. É possível que em vários dias consecutivos suas anotações tenham uma grande variação (num dia 5 e em outro 20 camisetas desperdiçadas, por exemplo).

Um procedimento muito comum seria anotar, durante vários dias consecutivos, o número de camisetas desperdiçadas e no final desse período fazer a média de todos os dias. A média aritmética do desperdício nos dará uma estimativa razoável do que ocorre diariamente.

Veja um resultado possível ao longo de **20 dias úteis** (1 mês de produção).



Pelo cálculo da média encontramos:

$$m \quad \frac{5 \quad 20 \quad 15 \quad 10 \quad 12 \quad 10 \quad 6}{\quad}$$

m = 10 (10 camisetas, ao dia, são desperdiçadas)

Se a produção é de 100 camisetas por dia, podemos dizer que a probabilidade de encontrarmos uma camiseta defeituosa é de 10/100 = 10%.

Solução 2:

Outra maneira de proceder seria considerar diariamente o percentual de desperdício e depois calcularmos a média.

Solução 3:

Podemos também registrar, dia-a-dia, o número de camisetas produzidas até aquele dia e o número de camisetas defeituosas (também até aquele dia). Dividindo, dia-a-dia, o número de camisetas desperdiçadas pela produção, obteremos a porcentagem de desperdício.

dia	produção	desperdício	porcentagem
1	100	5	5%
2	200	25	12,5%
3	300	40	13,3%
4	400	50	12,5%
5	500	62	12,4%
6	600	72	12%
7	700	78	11,1%
8	800	88	11%
9	900	96	10,6%
10	1000	105	10,5%
11	1100	120	10,9%
12	1200	130	10,8%
13	1300	143	11%
14	1400	158	11,2%
15	1500	164	10,9%
16	1600	168	10,5%
17	1700	178	10,4%
18	1800	182	10,1%
19	1900	193	10,1%
20	2000	197	9,9%

Essa porcentagem é denominada ***freqüência relativa*** de camisetas desperdiçadas.

Vemos que, nessa forma de trabalho, a partir do sétimo dia já podemos observar que os valores percentuais, ou a probabilidade de produzirmos uma camiseta defeituosa, começa a se estabilizar entre 10% e 11%.

O que nos interessa é a seqüência de freqüências relativas com que encontramos camisetas defeituosas.

É razoável supor que, se o experimento continuasse, a variação das freqüências relativas seria cada vez menor, sugerindo que, a partir de algum ponto, a freqüência se tornaria constante. Essa constante é que seria a probabilidade de fabricação de uma camiseta com defeito.

Essa forma de obtermos a probabilidade de ocorrência de um evento denomina-se ***interpretação freqüentista das probabilidades***. Essa interpretação é extremamente útil para a determinação da probabilidade de eventos que podem ser testados, repetidos infinitas vezes.

EXEMPLO 2

Numa fábrica de parafusos deseja-se estimar a probabilidade de encontrar um parafuso defeituoso em sua produção de 5 mil parafusos ao dia.

Solução:

Primeiramente, vamos analisar de que forma os Exemplos 1 e 2 diferem. Observe que no caso das camisetas, além da produção diária não ser tão grande, os "erros" ocorrem no corte e, portanto, essas camisetas não são nem costuradas e, facilmente, contamos ao final do dia a quantidade de camisetas desperdiçadas. Na fábrica de parafusos, não é possível verificar diariamente todos os parafusos produzidos. Assim, o controle de qualidade precisará trabalhar com uma amostra aleatória (escolhida ao acaso) da produção diária. Observe ainda que os parafusos defeituosos são produzidos e até mesmo entregues aos clientes. Estimar a probabilidade de um cliente encontrar um parafuso defeituoso em sua encomenda é muito importante.

Os procedimentos utilizados no primeiro exemplo são os mesmos que utilizaremos agora, só que testaremos parte da produção, uma amostra. Se essa amostra (parte da produção) é escolhida aleatoriamente, isto é, ao acaso, os resultados encontrados podem ser utilizados como se tivessem sido testados todos os parafusos produzidos a cada dia.

Vamos supor que a cada 100 parafusos verificados (100 é o tamanho da amostra) contamos os defeituosos durante vários dias e descobrimos que a freqüência com que encontramos esses parafusos vai se estabilizando em $\frac{1}{20}$. Podemos então afirmar que a probabilidade de encontrarmos parafusos defeituosos é $\frac{1}{20}$ ou 5% ou podemos dizer também que a cada 20 parafusos ***é provável*** que encontremos 1 com defeito.

De acordo com a interpretação freqüentista das probabilidades, quando dizemos que a probabilidade é $\frac{1}{20}$, queremos dizer que a freqüência relativa segundo a qual esse evento ocorrerá numa longa seqüência de experimentações se estabilizará em $\frac{1}{20}$. É costume expressarmos esse resultado dizendo que esperamos que o evento ocorra uma vez em cada 20 experiências, ou cerca de cinco vezes em cada 100. Essa afirmação não deve ser interpretada literalmente. De forma nenhuma deve-se pensar que caso esse evento não ocorra em dezenove testagens, certamente ocorrerá na vigésima. Na vigésima testagem, a probabilidade de ocorrência desse evento continua sendo $\frac{1}{20}$.

Exercícios

Exercício 1

Lance um dado 120 vezes e observe a freqüência dos resultados 1, 2, ..., 6. Os resultados obtidos estão de acordo com o que você esperava de um experimento como esse?

Exercício 2

Considere o experimento de lançarmos uma moeda. Imagine que ele foi realizado 6 000 vezes e os resultados foram anotados, constando da tabela a seguir. Complete a tabela e tire suas próprias conclusões.

Número de lançamentos	Número de caras	Freqüência relativa
10	7	
20	11	
40	17	
60	24	
80	34	
100	47	
200	92	
400	204	
600	305	
800	404	
1000	492	
2000	1010	
3000	1530	
4000	2030	
5000	2517	
6000	3011	

Exercício 3

Escolha 250 números de telefone numa lista. Utilizando somente os quatro últimos algarismos de cada número - isto é, abandonando os prefixos - determine a freqüência de zeros, uns, ... noves. Os dez algarismos aparecem com freqüências aproximadamente iguais?

AULA

56

As médias

Introdução

Na aula 29, você estudou um pouco de Estatística e aprendeu que esse ramo da Matemática trabalha com dados comparativos, pesquisas de opinião, pesquisas de mercado e projeções futuras.

Os dados numéricos obtidos por intermédio das pesquisas são mais facilmente observados quando organizados numa tabela ou por representações gráficas. No entanto, se uma tabela contém um número muito grande de dados, essa observação pode se tornar confusa. Nesses casos, torna-se mais interessante observar os dados da tabela, determinando-se a ***média*** desses valores.

Costumamos calcular várias médias na vida diária: a média de horas trabalhadas diariamente, a velocidade média, o salário médio de uma empresa, a produção mensal média de uma indústria, a despesa média mensal, a estatura média das pessoas, o consumo médio de gasolina etc. Ignorando as variações, a média representa situações regulares, ou seja, ignorando as variações, supõe que todos os valores de uma tabela são iguais.

Nossa aula

PRODUÇÃO DE VEÍCULOS	
Mês/Ano	Nº de veículos
Jan/95	97.800
Fev/95	130.800
Mar/95	151.800
Abr/95	131.200

(Fonte: Jornal do Brasil - 02/07/95)

Na tabela ao lado, estão indicados o número de veículos produzidos no Brasil, no período de janeiro de 1995 a abril de 1995.

No período entre janeiro de 1995 e abril de 1995, qual foi a produção média mensal de veículos?

Para responder à pergunta, devemos calcular ***a média aritmética*** dos números apresentados na tabela. Essa média é calculada somando-se os valores dados e dividindo-se o resultado pelo número de valores. Temos, então:

$$M_a \quad \frac{97.800 \quad 130.800 \quad 151.8}{4} \quad = 127.900$$

O que significa dizer que a produção média mensal de veículos, no período entre janeiro e abril de 1995, foi de 127.900 veículos? Pense um pouco.

Significa que, se numa situação imaginária, a produção mensal de veículos fosse sempre a mesma, o número de veículos produzidos seria de 127.900 por mês.

Velocidade média

Quando dizemos que, numa viagem, um carro desenvolve uma velocidade média de 80 km/h, isso não significa que o carro andou com essa velocidade o tempo todo da viagem, o que é quase impossível acontecer. Caso, numa situação imaginária, o carro fizesse a viagem com uma mesma velocidade, gastando o mesmo tempo, essa velocidade seria de 80 km/h.

Média de horas diárias de trabalho

O número de horas diárias trabalhadas por um professor, durante uma semana, estão assinaladas na tabela. Vamos calcular a média diária de horas trabalhadas.

$$M_a \quad \frac{7 \quad 6 \quad 10 \quad 11 \quad 6}{5} \quad \frac{40}{5}$$

= 8 horas

As horas que o professor trabalhou abaixo da média (2ª feira, 3ª feira e 6ª feira), no total, foram 5 horas; e as horas trabalhadas acima da média (4ª feira e 5ª feira), no total, também foram 5 horas.

DIAS DA SEMANA	Nº DE HORAS DE TRABALHO
2ª feira	7 h
3ª feira	6 h
4ª feira	10 h
5ª feira	11 h
6ª feira	6 h

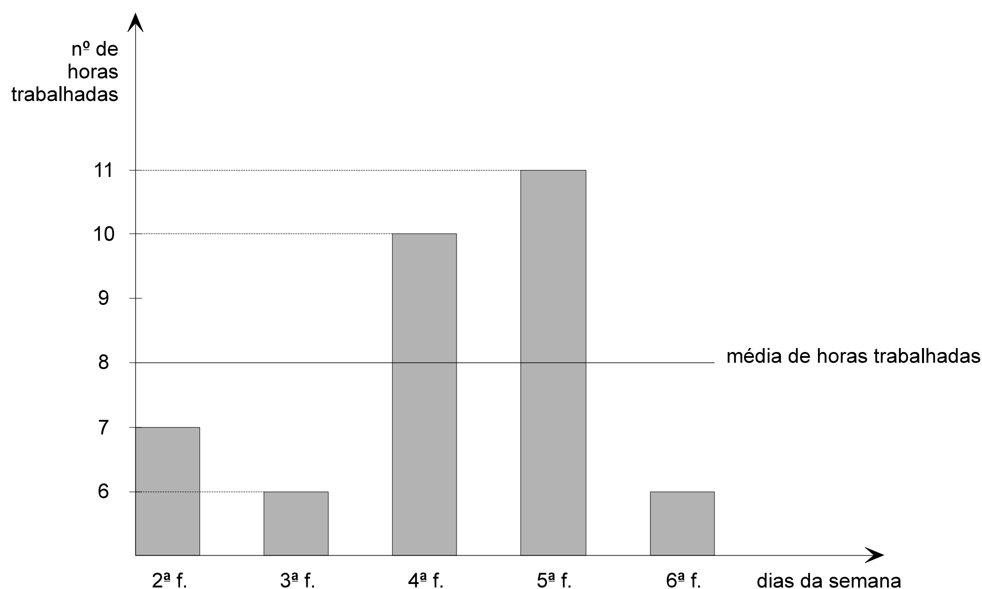
Verifique:

2ª feira: 8 - 7 = 1
3ª feira: 8 - 6 = 2
6ª feira: 8 - 6 = 2
Total: 5 h

4ª feira: 10 - 8 = 2
5ª feira: 11 - 8 = 3
Total: 5 h

Portanto, o número de horas trabalhadas a menos é igual ao número de horas trabalhadas a mais.

Costumamos dizer que, em relação à média, ***os excessos compensam as faltas***. Podemos visualizar bem essa situação, usando um gráfico de barras:



Vejamos outro exemplo, ilustrando a idéia da média:

O peso máximo permitido dentro de um elevador de prédio residencial é, em geral, de 420 kg ou 6 pessoas, o que dá uma média de 70 kg por pessoa (420 ¸ 6 = 70).

Supondo que 5 pessoas, cujos pesos estão na tabela abaixo, entraram num elevador, qual pode ser, no máximo, o peso de uma 6ª pessoa que deseja entrar no mesmo elevador? (Os pesos, na tabela, foram arredondados para facilitar os cálculos).

PESSOAS	PESOS
1ª	54 kg
2ª	68 kg
3ª	75 kg
4ª	58 kg
5ª	72 kg
6ª	?

Somando os pesos das cinco pessoas que estão no elevador, encontramos 372 kg.

Como o máximo permitido é 420 kg, o peso da 6ª pessoa pode ser até: 420 - 327 = 93 kg.

excessos
70 - 54 = 16
70 - 68 = 2
70 - 58 = 12
30

75 - 70 = 5
72 - 70 = 2
7
faltas

Diferença: 30 - 7 = 23

Logo, a 6ª pessoa pode ter 70 + 23 = 93 kg.

Usamos nesse problema a idéia, vista anteriormente, de que em relação à média os excessos compensam as faltas.

Tente resolver o problema de outra forma, calculando os excessos e as faltas em relação à média dos pesos.

A média aritmética que já estudamos é chamada ***média aritmética simples***. Vamos apresentar, agora, a ***média aritmética ponderada*** (ponderar = pesar), muito usada quando se torna necessário ***valorizar, dar um peso*** a um ou mais valores que entrarão no cálculo da média.

Cálculo da média ponderada

Numa escola, o critério para o cálculo da média de cada aluno, em cada disciplina, é o seguinte:

1º bimestre: peso 1
2º bimestre: peso 2
3º bimestre: peso 3
4º bimestre: peso 4

Para determinar a média aritmética ponderada de um aluno que obteve, em Matemática, notas 10,0, 8,5, 7,0 e 5,5 em cada bimestre, faz-se assim: multiplica-se cada nota pelo seu peso correspondente, somando-se depois todos os resultados obtidos nas multiplicações. Em seguida, divide-se essa soma pelo total dos pesos.

$$M_P \quad \frac{10{,}0 \cdot 1 \quad 8{,}5 \cdot 2 \quad 7{,}0 \cdot}{1+2+3+4} \qquad = 7{,}0$$

A média desse aluno, em Matemática, é 7,0.

A média ponderada pode facilitar o cálculo de médias, quando aparecem uma ou mais parcelas repetidas várias vezes. Nesse caso, multiplicamos as parcelas pelo número de vezes em que elas aparecem. Veja o exemplo:

Em uma empresa, 25 empregados ganham R$ 150,00, 10 ganham R$ 220,00 e 5 ganham R$ 280,00. Qual é o salário médio que essa empresa paga?

$$M_P \quad \frac{25 \cdot 150 \quad 10 \cdot 220 \quad 5 \cdot}{25+10+5} \qquad = 183{,}75$$

O salário médio dos empregados dessa empresa é de R$ 183,75.

Média geométrica

Chamamos de ***média geométrica*** de dois números positivos a raiz quadrada do produto desses dois números.

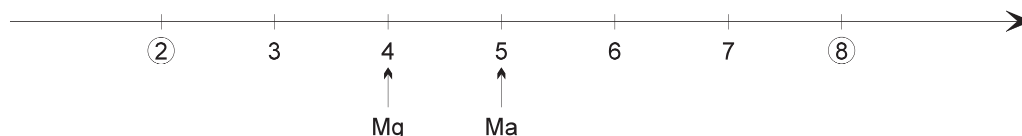
EXEMPLO

A média geométrica dos números 2 e 8 é:

$$M_g \quad \sqrt{2 \cdot 8} \quad \sqrt{16} = 4$$

Comparando esse resultado com a média aritmética dos mesmos números, e assinalando os dois resultados na reta numérica, temos:

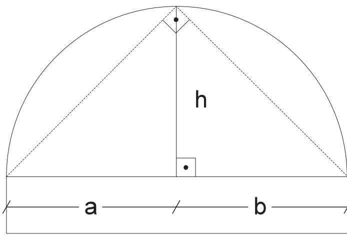
$$M_a \quad \frac{2 \quad 8}{2} \quad \frac{10}{2} = 5$$



A média aritmética é o ***ponto médio*** entre 2 e 8 e a média geométrica é menor que a média aritmética.

Aplicação da média geométrica

Na fase de perfuração de um túnel, os operários precisam colocar estacas para sustentação. Vamos calcular o comprimento de uma estaca, em determinado ponto. Assim:



Vamos lembrar que todo ângulo inscrito numa semi-circunferência mede 90º. Logo, o triângulo formado na figura é um triângulo retângulo e a estaca é a altura desse triângulo.

Sabemos, do estudo de relações métricas no triângulo retângulo, que:

$$h^2 = a \cdot b$$

ou

$$h \quad \sqrt{a \cdot b}$$

Podemos dizer, então, que o comprimento da estaca é a média geométrica das distâncias entre o ponto de apoio da estaca e as laterais do túnel.

Exercícios

Exercício 1

Num concurso, constavam provas de Português, Matemática e Ciências. Português e Matemática tinham peso 2 e Ciências, peso 1. Calcule a média ponderada de um candidato que tirou as seguintes notas:

Português: 6,0

Matemática: 7,0

Ciências: 5,0

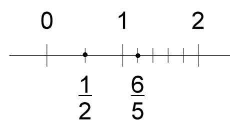
Exercício 2

Calcule a média das alturas de uma equipe de basquete, que estão indicadas na tabela abaixo:

JOGADOR	ALTURA (m)
1º	1,80
2º	1,84
3º	1,90
4º	1,88
5º	1,86

Exercício 3

Numa reta numérica, assinalamos o número que está localizado no meio da distância entre os números $\frac{1}{2}$ e $\frac{6}{5}$. Determine o número:



Exercício 4

A média aritmética de cinco números é 12. Quatro desses números são 6, 7, 8 e 11. Qual é o 5º número?

Exercício 5

Um carro fez uma viagem de 480 km, em 8 horas. Qual foi sua velocidade média?

Expoentes fracionários

Introdução

Nesta aula faremos uma revisão de potências com expoente inteiro, particularmente quando o expoente é um número negativo. Estudaremos o significado de potências com expoentes fracionários e, em seguida, verificaremos que as propriedades operatórias da potenciação são, também, válidas para as potências de expoentes fracionários e negativos. Essas propriedades são muito úteis para a resolução das equações exponenciais e, também, no estudo dos logaritmos, que serão vistos mais adiante.

Nossa Aula

Lembrando que a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, quando, por exemplo, escrevemos $2^3 = 8$, a ***base*** é o número 2 e o expoente 3 indica o número de fatores iguais a 2. O resultado, chamado de ***potência***, é o número 8.

$$\underbrace{2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2}_{} = 8$$



3 fatores

E qual o significado de uma potência com expoente negativo? Esse tipo de potência representa uma fração onde o numerador é 1 e o denominador é a mesma potência, com o expoente positivo.

Por exemplo 5^{-2} é igual a $5^{\frac{1}{2}}$.

De forma geral, se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, então:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Vamos calcular algumas potências com expoentes negativos:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \quad \text{ou} \quad 0,04 \quad \text{(dividindo 1 por 25)}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1.000} \quad \text{ou} \quad 0,001 \text{ (um milésimo)}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \quad \text{ou} \quad 0,0625 \text{(dividindo 1 por 16)}$$

Quando temos uma fração com numerador igual a 1, podemos escrevê-la como uma potência de base inteira e expoente negativo.

$$\frac{1}{3^5} = 3^{-5}$$

$$\frac{1}{7} = 7^{-1}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

Podemos, ainda, transformar um número decimal numa potência de expoente negativo, ou num produto de um número por uma potência negativa.

EXEMPLO 1

$$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

EXEMPLO 2

$$0,125 = \frac{125}{1000} = 125 \times \frac{1}{1000} = 125 \times \frac{1}{10^3} = 125 \times 10^{-3}$$

Expoentes fracionários

Uma potência de expoente fracionário representa uma raiz, e podemos escrevê-la assim:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

onde $a > 0$,

m e **n** são números inteiros e $n \neq 0$

Observe que:
- o denominador da fração é o índice da raiz (n).
- a base (a) elevada ao numerador (m) é o radicando (a^m).

EXEMPLO 3

$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

EXEMPLO 4

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$

EXEMPLO 5

$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt{27}$

EXEMPLO 6

$50^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{50^1} = \sqrt[3]{50}$

Portanto, podemos escrever uma raiz em forma de potência de expoente fracionário:

$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$

$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$

Observando esses últimos exemplos, vimos que, transformando uma raiz em potência de expoente fracionário, tendo, antes, feito a decomposição do radicando em fatores primos, justificamos a seguinte propriedade dos radicais:

Podemos dividir o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número, para simplificar o radical.

Propriedades da potenciação

A seguir, enumeramos as propriedades da potenciação e damos alguns exemplos:

Primeira propriedade

Produto de potências de mesma base:

$$3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{3^4} = 3^{(2+4)} = 3^6$$

Para multiplicar potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Essa propriedade pode ser aplicada para expoentes negativos e para expoentes fracionários:

$$5^{-2} \cdot 5^5 = 5^{-2+5} = 5^3$$

$$7^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{3}{2}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2$$

Segunda propriedade

Divisão de potências de mesma base:

Para dividir potências de mesma base, repetimos a base e subtraímos os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Vamos aplicar essa propriedade às potências de expoentes negativos ou fracionários:

$$\frac{3^{-2}}{3^4} = 3^{-2-4} = 3^{-6}$$

$$\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}$$

Terceira Propriedade

Potenciação de potência:

$$(3^2)^3 = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}_{\text{3 fatores}} = (3^2)^3 = 36$$

Para elevar uma potência a um outro expoente, repetimos a base e multiplicamos os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Vejamos essa propriedade aplicada a potências com expoentes negativos ou fracionários:

$$(2^{-1})^{-3} = 2^{(-1)\times(-3)} = 2^3$$

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 5^{\frac{1}{2}\times 3} = 5^{\frac{3}{2}}$$

Quarta propriedade

Distributividade em relação à multiplicação e à divisão:

$(2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$ ou

$$\left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{8^3}{3^3}$$

Para elevar um produto ou um quociente a um expoente, elevamos cada fator a esse expoente ou, no caso do quociente, elevamos o dividendo e o divisor ao mesmo expoente.

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Veja alguns exemplos:

EXEMPLO 7

$$(3 \times 5)^{-4} = 3^{-4} \times 5^{-4}$$

EXEMPLO 8

$$(2 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$$

EXEMPLO 9

$$(6 \div 5)^{-3} = 6^{-3} \div 5^{-3}$$

EXEMPLO 10

$$(6 \div 5)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{1}{2}}$$

AULA

57

Aplicações do cálculo de multiplicações e divisões de radicais

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{8} \div \sqrt[3]{2} = 8^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} = (8 \div 2)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

Podemos multiplicar ou dividir radicais de mesmo índice, multiplicando ou dividindo os radicandos.

Se os índices forem diferentes, podemos transformar os radicais em radicais equivalentes e com mesmo índice.

$$\sqrt{5} \times \sqrt[4]{7} \times = 5^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{2}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} = (5^2 \times 7)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{175}$$

$$\sqrt[3]{2} \div \sqrt[4]{3} = 2^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{12}} \div 3^{\frac{3}{12}} = \left(2^4 \div 3^3\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{\frac{16}{27}}$$

Exercícios

Exercício 1.

Escreva o resultado de cada item, na forma de uma única potência:

a) $3^{-2} \cdot 3 \cdot 3^4 =$

b) $\left(3^2\right)^4 \div 3^{-5} =$

c) $\dfrac{(3^2)^3}{3^5}$

d) $\dfrac{3^7}{\left(3^3\right)^3}$

Exercício 2.

Calcule o valor de $\dfrac{(5^{-1})^{-2} \times 5^{-5} \div 5^{-2}}{\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 \times 5^{-1}}$

Exercício 3.

Efetue, transformando as raízes em potências de expoente fracionários:

a) $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{5} =$

b) $\sqrt{40} \div \sqrt{10} =$

c) $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} =$

d) $\sqrt{\frac{1}{2}} \div \sqrt[5]{\frac{1}{2}} =$

Exercício 4.

Transforme as potências em raízes:

a) $12^{0,4} =$

b) $6^{0,5} =$

Exercício 5.

Calcule:

a) $36^{-\frac{1}{2}}$

b) $1000^{-\frac{1}{3}}$

AULA

58

Equações exponenciais

Introdução

Vamos apresentar, nesta aula, equações onde a incógnita aparece no expoente. São as ***equações exponenciais***.

Resolver uma equação é encontrar os valores da incógnita que tornam a equação verdadeira. No caso da equação exponencial, para resolvê-la, procuraremos obter sempre uma igualdade de duas potências de mesma base, pois sabemos que, se duas potências de mesma base são iguais, então, seus expoentes também são iguais. Por exemplo, para resolver a equação 3**x** = 243, podemos decompor o número 243, em fatores primos e escrevê-lo em forma de potência, assim:

$3x = 3^5$

logo,

$x = 5$

A solução da equação é x = 5.

Nossa Aula

Você verá, agora, vários outros exemplos de resolução de equações exponenciais.

EXEMPLO 1

Resolver a equação 2x = 2.

Como já sabemos, todo número elevado a 1 (um) é igual a ele mesmo. Então, podemos escrever:

$2x = 2^1$

logo,

$x = 1$

A solução da equação é x = 1.

EXEMPLO 2

Resolver a equação $5^{2x} = 1$

Lembrando que um número diferente de zero, elevado a zero, é igual a um, a equação pode ser escrita assim:

$5^{2x} = 5^{0}$ Þ $2x = 0$ Þ $\boxed{x = 0}$

A solução da equação é $x = 0$.

EXEMPLO 3

Resolver a equação $3^{3x} = \frac{1}{9}$

Uma fração, cujo numerador é 1 (um), pode ser escrita na forma de uma potência de expoente negativo.

Decompondo o denominador da fração em fatores primos, temos:

$3^{3x} = \frac{1}{3^{2}}$ Þ $3^{3x} = 3^{-2}$

$3x = -2$ Þ $x = -\frac{2}{3}$

A solução da equação é $x = -\frac{2}{3}$

EXEMPLO 4

Resolva a equação $10^{x-1} = 0{,}001$

O número 0,001 pode ser escrito com uma potência de expoente negativo, logo:

$10^{x-1} = 10^{-3}$ Þ $x - 1 = -3$ Þ $x = -3 + 1$ Þ $\boxed{x = -2}$

A solução da equação é $x = -2$

EXEMPLO 5

Resolver a equação $5^{2x+1} = \sqrt{5}$

Vamos escrever a raiz na forma de potência de expoente fracionário, como vimos na aula anterior:

$5^{2x+1} = 5^{\frac{1}{2}}$ Þ $2x + 1 = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{2} - 1$

$2x = \frac{1-2}{2}$ Þ $2x = -\frac{1}{2}$ Þ $x = -\frac{1}{4}$

A solução da equação é $x = -\frac{1}{4}$.

EXEMPLO 6

Resolva a equação $4^{3x-5} = 4^{x-1}$

Neste exemplo, as potências já estão com as bases iguais, portanto, podemos igualar diretamente seus expoentes.

$$3x - 5 = x - 1$$
$$3x - x = -1 + 5$$
$$2x = 4$$
$$\boxed{x = 2}$$

A solução da equação é x = 2.

EXEMPLO 7

Resolva a equação $16^{x-3} = 2^{x+3}$

Vamos decompor 16 e escrevê-lo em forma de potência de base 2. Temos que $16 = 2^4$, logo:

$(2^4)^{x-3} = 2^{x+3}$ (vamos aplicar a propriedade da potenciação de potência).

$$2^{4(x-3)} = 2^{x+3}$$
$$2^{4x-12} = 2^{x+3} \quad Þ \quad 4x - 12 = x + 3$$
$$4x - x = 12 + 3$$
$$3x = 15$$
$$\boxed{x = 5}$$

A solução da equação é x = 5.

Em todos os exemplos apresentados até agora, poderíamos ter conferido a resposta, substituindo a solução encontrada na equação dada.

EXEMPLO 8

Resolva e confira a solução da equação $\left(\frac{1}{100}\right)^x = 10^{x-3}$

Vamos substituir na equação $\frac{1}{100}$ por 10^{-2}

$$(10^{-2})^x = 10^{x-3}$$
$$10^{-2x} = 10^{x-3} \quad Þ \quad -2x = x - 3$$
$$-2x - x = -3$$
$$-3x = -3$$
$$\boxed{x = 1}$$

Vamos agora fazer a verificação. Substituindo **x**, na equação por 1, temos:

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{1} = 10^{1-3}$$

$$\frac{1}{100} = 10^{-2}$$, que é uma sentença verdadeira.

Logo, a solução da equação é, de fato, x = 1.

EXEMPLO 9

Resolva a equação $9^{2x} = 27^{x-1}$

Nesse exemplo, precisamos decompor as duas bases em fatores primos, ou seja, 9 = 3 e 27 = 3 . Temos, então:

$$(3\ )^{2x} = (3\ )^{x-1}$$ (aplicando a propriedade da potenciação da potência)

$$3^{4x} = 3^{3(x-1)}$$

$$4^{4x} = 3^{3x-3}$$ Þ $4x = 3x - 3$

$$4x - 3x = -3$$ Þ $\boxed{x = -3}$

Vamos verificar a resposta, substituindo o **x** por –3.

1º membro da equação: $9^{2 \cdot (-3)} = 9^{-6} = (3\ )^{-6} = 3^{-12}$
2º membro da equação: $27^{-3-1} = 27^{-4} = (3\ )^{-4} = 3^{-12}$

Quando substituímos a solução x = –3 nos dois membros obtemos resultados iguais.

Logo a solução da equação está correta e é, de fato, x = – 3.

Vejamos, agora, uma utilização de equações exponenciais, na resolução de problemas sobre ***progressões geométricas***.

EXEMPLO 10

Em uma progressão geométrica, a razão é 2, o primeiro termo é 5 e o último termo é 1.280. Quantos termos possui essa progressão?

Lembrando da aula em que você aprendeu progressões geométricas, a fórmula para o cálculo do termo geral é:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

onde a_1 é o 1º termo, **q** é a razão, a_n é um termo qualquer e **n** é o número de termos.

Logo, substituindo os dados do problema, na fórmula, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$1280 = 5 \cdot 2^{n-1}$$ → (dividindo os dois membros por 5)

$$256 = 2^{n-1}$$

$$28 = 2^{n-1}$$ Þ $n - 1 = 8$ Þ $\boxed{n = 9}$

A progressão geométrica possui, portanto, 9 termos.

AULA

58

EXEMPLO 11

Resolva a equação $3^{x+1} - 3^x = 1.458$

$3^{x+1} - 3x = 1.458$

$3^x \cdot 3 - 3^x = 1.458$ (aplicando a propriedade da potenciação);

$3^x\ (3 - 1) = 1.458$ (colocando 3x em evidência);

$3^x \cdot 2 = 1.458$

$3^x = 729$ (dividindo os dois membros por 2).

$3^x = 3^6$ Þ $x = 6$

A solução da equação é x = 6.

Exercícios

Resolva as equações exponenciais:

Exercício 1.
$10^x = 1.000.000$

Exercício 2.
$11^{2x} = 11$

Exercício 3.
$2^{x+1} = 1024$

Exercício 4.
$6^{3x} = 1$

Exercício 5.
$4^x = \frac{1}{16}$

Exercício 6.
$(0{,}0001)^x = 10^{8-5x}$

Exercício 7.
$7^{3x} = \sqrt[3]{7}$

Exercício 8.
$5^{5x-1} = 5^{3x+5}$

Exercício 9.
$125^{x-1} = 5^{x+7}$

Exercício 10.
$100^{x-4} = 1000^x$

Usando potências de 10

Introdução

Nesta aula, vamos ver que todo número positivo pode ser escrito como uma potência de base 10. Por exemplo, vamos aprender que o número 15 pode ser escrito como $10^{1,176}$. Deve parecer estranho ao leitor que um número tão simples como o 15 possa ser representado de uma forma tão complicada. E, também, por que fazer isso?

A complicação é apenas aparente. Na realidade, essa nova forma de escrever os números positivos vai permitir que cálculos complicados possam ser feitos de forma muito mais simples. É só esperar um pouco para conferir.

Como estaremos lidando com potências, seria conveniente fazer uma recordação da Aula 57, onde tratamos de potências com expoentes fracionários. As propriedades que apareceram nessa aula serão utilizadas novamente.

Nossa aula

Para a teoria que vamos desenvolver nas duas aulas seguintes, precisamos mostrar que todo número positivo pode ser escrito como potência de 10. Para alguns casos, isso pode ser feito com muita facilidade. Veja:

$$\begin{aligned} 1 &= 10^0 \\ 10 &= 10^1 \\ 100 &= 10 \\ 1.000 &= 10^3 \text{ etc.} \end{aligned}$$

O mesmo ocorre para os números 0,1 , 0,01 e 0,001, como se vê a seguir:

$$\begin{aligned} 0{,}1 &= 10^{-1} \\ 0{,}01 &= 10^{-2} \\ 0{,}001 &= 10^{-3} \end{aligned}$$

No entanto, na maioria dos casos, fica difícil escrever um número como potência de base 10. Cálculos muito trabalhosos são necessários para obter, por exemplo, os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} 2 &= 10^{0,301} \\ 3 &= 10^{0,477} \\ 7 &= 10^{0,845} \end{aligned}$$

É necessário dizer que essas últimas igualdades não são exatas. Elas são apenas aproximadas, porque os expoentes de 10 foram consideradas até a terceira casa decimal. Uma aproximação melhor para a primeira delas seria:

$$2 = 10^{0,301029995}$$

mas, felizmente, para as nossas necessidades, três ou quatro casas decimais serão suficientes.

Vamos ver agora que, com as informações que temos, já podemos representar outros números como potências de 10.

EXEMPLO 1

Representar os números 4 e 5 como potências de 10.

Levando em conta a informação que demos ($2 = 10^{0,301}$) e as propriedades das potências, temos:

a) $4 = 2 \cdot 2 = 10^{0,301} \cdot 10^{0,301} = 10^{0,301 + 0,301} = 10^{0,602}$

b) $5 = \dfrac{10}{2} = \dfrac{10^1}{10^{0,301}} = 10^{1 - 0,301} = 10^{0,699}$

O exemplo que acabamos de resolver mostra que, se conseguirmos exprimir os números primos como potências de 10, poderemos representar todos os outros da mesma forma, utilizando as propriedades das potências.

No século XVII, vários matemáticos se dedicaram a esse extenuante trabalho e construíram tabelas onde, do lado esquerdo, apareciam os números e, do lado direito, as potências de 10 correspondentes a cada um. Essas potências passaram a ser conhecidas com o nome de ***logaritmos***.

Vamos, então, reunir as informações que já temos em nossa primeira tabela de logaritmos:

NÚMEROS	LOGARITMOS
1	0,000
2	0,301
3	0,477
4	0,602
5	0,699
7	0,845
10	1,000

Dizemos que o logaritmo de 2 é 0,301 e escrevemos log 2 = 0,301. Isso significa que $10^{0,301} = 2$.

Dizemos que o logaritmo de 5 é 0,699 e escrevemos log 5 = 0,699. Isso significa que $10^{0,699} = 5$.

No exemplo a seguir, vamos efetuar os cálculos para completar a nossa tabela de logaritmos.

EXEMPLO 2

Calcular os logaritmos dos números 6, 8 e 9.

a) $6 = 2 \cdot 3 = 10^{0,301} \cdot 10^{0,477} = 10^{0,301\,+\,0,477} = 10^{0,778}$

Logo, o logaritmo de 6 é 0,778.

b) $8 = 4 \cdot 2 = 10^{0,602} \cdot 10^{0,301} = 10^{0,602\,+\,0,301} = 10^{0,903}$

Logo, o logaritmo de 8 é 0,903.

c) $9 = 3 \cdot 3 = 10^{0,477} \cdot 10^{0,477} = 10^{0,477\,+\,0,477} = 10^{0,954}$

Logo, o logaritmo de 9 é 0,954.

Repare num fato curioso e importante. Enquanto na coluna da esquerda os números são multiplicados, na coluna da direita os logaritmos são somados.

NÚMEROS	LOGARITMOS
$2 \cdot 3 = 6$	0,301 + 0,477 = 0,778

As primeiras tabelas de logaritmos apareceram na primeira metade do século XVII. Eram livros que apresentavam uma listagem dos números e, ao lado, sua potência de 10 correspondente. Essa tabela permitia substituir uma multiplicação por uma adição e uma divisão por uma subtração. Isso que dizer que a tabela de logaritmos permitiu substituir uma operação por outra de natureza mais simples.

Vamos mostrar, concretamente, o que acabamos de dizer, nos dois exemplos seguintes. O primeiro será uma preparação para o segundo.

EXEMPLO 3

Calcular o logaritmo de 1,2.

$$1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{3 \times 4}{10}$$

Vamos, então, substituir os números 3 e 4 pelas correspondentes potências de 10, que se acham em nossa pequena tabela de logaritmos, e aplicar as propriedades das potências.

$$1{,}2 = \frac{3 \times 4}{10} = \frac{10^{0,477} \times 10^{0,602}}{10^1}$$

$$= 10^{0,477\,+\,0,602\,-1}$$

$$= 10^{0,079}$$

Então, o logaritmo de 1,2 é 0,079.

EXEMPLO 4

Determinado tipo de bactéria se reproduz, aumentando seu número de 20% a cada dia. Em quantos dias o número de bactérias será 100 vezes maior que o inicial?

Vamos imaginar que tenhamos hoje, em nossa cultura de bactérias, um número **x** de bactérias. No dia seguinte, esse número terá aumentado de 20%, ou seja, será igual a:

$$x + \frac{20}{100}x = x + 0,2x = x \times 1,2$$

Portanto, a cada dia a população de bactérias fica multiplicada por 1,2, formando, portanto, uma progressão geométrica de razão 1,2. No segundo dia, teremos $\mathbf{x} \cdot 1,2^2$ bactérias, no terceiro dia $\mathbf{x} \cdot 1,2^3$ bactérias e assim por diante. Então, depois de **n** dias, teremos $\mathbf{x} \cdot 1,2^n$ bactérias.

Desejamos saber para que valor de **n** esse número é igual a 100 vezes o número inicial de bactérias, ou seja, desejamos ter:

$$\mathbf{x} \cdot 1,2^n = 100\mathbf{x}$$

Simplificando **x** dos dois lados temos:

$$1,2^n = 100$$

Qual será, então, o valor de **n**? Para responder, vamos escrever os números dessa equação como potências de 10. Já sabemos, do exemplo anterior, que $1,2 = 10^{0,079}$. Portanto, nossa equação fica assim:

$$(10^{0,079})^n = 10$$

$$10^{0,079 \cdot n} = 10$$

Podemos então igualar os expoentes e calcular **n**:

$$0,079 \cdot n = 2$$

$$n = \frac{2}{0,079} = \frac{2.000}{79} @ 25,3$$

Concluímos, então, que, depois de 25 dias e algumas horas (0,3 do dia dá aproximadamente 7 horas), a população de bactérias terá ficado 100 vezes maior.

Os exemplos que vimos até aqui ilustram o que afirmamos no início de nossa aula: ***todo número positivo pode ser escrito como uma potência de 10***. Não mostraremos aqui como obter as potências de 10 correspondentes aos números primos. Elas serão dadas sempre que necessário. Mas, para todos os outros números, o leitor poderá, com auxílio das propriedades das potências, calcular as potências de 10 correspondentes, ou seja, os seus logaritmos. Eles nos ajudarão a resolver problemas práticos mas que envolvem cálculos complicados, como vimos no Exemplo 4 de nossa aula.

Exercício 1.

Consultando nossa aula:

a) Escreva 6 como potência de 10.

b) Qual é o logaritmo de 6?

Exercício 2.

Escreva 21 como potência de 10.

Exercício 3.

Qual é o logaritmo de 40?

Exercício 4.

Complete a tabela de logaritmos, abaixo, transportando os valores que já foram obtidos em nossa aula e calculando os outros.

NÚMEROS	LOGARITMOS
1	
2	0,301
3	0,477
4	
5	
6	
7	0,845
8	
9	
10	

NÚMEROS	LOGARITMOS
11	1,041
12	
13	1,114
14	
15	
16	
17	1,230
18	
19	1,279
20	

NÚMEROS	LOGARITMOS
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	
1000	
10000	

Exercício 5.

Determine, com aproximação até a terceira casa decimal, o valor de **x**, na equação $3^x = 70$.

Sugestão: Escreva os números 3 e 70 como potências de 10, e aplique a propriedade das potências para poder igualar os expoentes.

Exercício 6.

Escreva 560 como potência de 10.

Exercício 7.

Qual é o logaritmo de 420?

Exercício 8.

Qual é o logaritmo de 0,12?

Sugestão: $0,12 = \frac{12}{100}$.

Escreva os números 12 e 100 como potências de 10, e aplique a propriedade das potências de mesma base.

AULA

60

Os logaritmos decimais

Introdução

Na aula anterior, vimos que os números positivos podem ser escritos como potências de base 10. Assim, introduzimos a palavra logaritmo no nosso vocabulário.

Nesta aula você descobrirá as propriedades dos logaritmos e aprenderá a utilizá-las na solução de diversos problemas. Antes disso, vamos falar um pouco sobre sua importância histórica.

Um pouco de história

Os logaritmos foram inventados na primeira metade do século XVII para facilitar cálculos complicados que a vida na época já exigia. Os navegantes precisavam saber onde estavam, a partir da posição de certas estrelas no céu. Os astrônomos, por sua vez, precisavam determinar a posição das estrelas e dos planetas ao longo do ano, prever os eclipses e as marés a partir da órbita da lua e estudar diversos outros fenômenos do céu. Os banqueiros precisavam fazer os cálculos dos juros e para todas essas atividades o trabalho era enorme. O astrônomo, por exemplo, podia saber que cálculos fazer para resolver um problema, mas freqüentemente levava meses para obter o resultado.

As primeiras tábuas de logaritmos foram festejadas como um enorme avanço da ciência, pois possibilitavam uma rapidez no cálculo, a qual, até pouco tempo, seria considerada inacreditável.

Mas o que as tábuas de logaritmos realmente fazem?

A ***tábua de logaritmos*** é uma tabela de duas colunas de números com a seguinte propriedade: multiplicar dois números na coluna da esquerda é o mesmo que somar os números correspondentes na coluna da direita. Dessa forma, é possível substituir uma multiplicação por uma soma (que é uma operação muito mais rápida) e uma divisão por uma subtração.

Veja pequena parte de uma tabela de logaritmos:

NÚMEROS	LOGARITMOS
...	...
36	1,5563
37	1,5682
38	1,5798
...	...
64	1,8062
65	1,8129
66	1,8195
...	...
2404	3,3809
2405	3,3811
2406	3,3813

Para exemplificar, consideremos a multiplicação de 37 por 65. Para não fazer a conta diretamente, podemos procurar os logaritmos desses números na coluna da direita e somá-los: 1,5682 + 1,829 = 3,3811. Em seguida, basta procurar o número correspondente a esse resultado na coluna da esquerda.

Assim, concluímos que:

$$37 \cdot 65 = 2405$$

Se consideramos ainda que, com os logaritmos, foi possível calcular potências e extrair raízes de qualquer índice fazendo apenas multiplicações e divisões, podemos entender por que essa invenção foi, de fato, revolucionária.

Nossa aula

Os logaritmos que você estudará nesta aula são chamados de ***logaritmos decimais*** porque todos os números serão representados como potências de base 10. Escolhemos essa base (e não uma outra qualquer) porque é a mesma base do nosso sistema de numeração. Entretanto, a teoria dos logaritmos pode ser desenvolvida de forma exatamente igual em qualquer base.

Definição

O logaritmo (decimal) do número positivo **x** é o número **y** tal que $10^y = x$.

Representando o logaritmo de **x** pelo símbolo log **x** temos:

$$\log x = y \text{ significa que } 10^y = x$$

A partir dessa definição concluímos que:

$\log 1 = 0$	porque	$10^0 = 1$	
$\log 10 = 1$	porque	$10^1 = 10$	
$\log 100 = 2$	porque	$10^2 = 100$	
$\log 1000 = 3$	porque	$10^3 = 1000$	e assim por diante.

Repare ainda que:

$\log 0{,}1 = -1$ $\qquad 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\log 0{,}01 = -2$ $\qquad 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ e assim por diante.

Cálculos extremamente trabalhosos foram necessários para representar os números positivos como potências de 10. Por exemplo, foi calculado que $10^{0,301}$ é igual a 2. Isso significa que $\log 2 = 0{,}301$.

Desse modo, determinamos que o logaritmo de um número é o expoente a que devemos elevar a base 10 para dar como resultado esse número.

Veja outros exemplos:

$10^{0,477} = 3$ $\qquad$ significa que $\log 3 = 0{,}477$

$10^{1,8129} = 65$ $\qquad$ significa que $\log 65 = 1{,}8129$

Como devemos fazer para calcular o logaritmo de qualquer número? Diremos que conhecendo os logaritmos dos números primos é possível calcular o logaritmo de qualquer outro número, utilizando certas propriedades. Por isso, vamos descobrir essas propriedades e depois ver o que podemos fazer com elas.

Propriedades

O logaritmo do produto

Suponha que o logaritmo do número **a** seja **x** e que o logaritmo do número **b** seja **y**.

$$\log a = x$$
$$\log b = y$$

De acordo com a nossa definição temos:

$$10^x = a$$
$$10^y = b$$

Multiplicando essas duas igualdades temos:

$$10^x \cdot 10^y = ab$$
$$10^{x+y} = ab$$

Isso significa que **x + y** é o logaritmo do produto **ab**, ou seja:

$$\log ab = x + y$$

Como $x = \log a$ e $y = \log b$ temos a ***primeira propriedade***:

$$\boxed{\log ab = \log a + \log b}$$

Logaritmo do quociente

Considere novamente as igualdades:

$$10^x = a$$
$$10^y = b$$

Agora, dividindo membro a membro, obtemos:

$$\frac{10^x}{10^y} = \frac{a}{b}$$

e isto significa que **x − y** é o logaritmo do quociente $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, ou seja,

$$\log \frac{a}{b} = x - y$$

Mas como x = log a e y = log b temos a nossa ***segunda propriedade***:

$$\boxed{\log \frac{a}{b} = \log a - \log b}$$

EXEMPLO 1

Sabendo que log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, calcular log 6 e log 1,5.

Solução:
Como $6 = 2 \cdot 3$ e $1{,}5 = \frac{3}{2}$, vamos aplicar as duas primeiras propriedades:

a) $\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$

b) $\log 1{,}5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = 0{,}477 - 0{,}301 = 0{,}176$

O logaritmo de uma potência

Suponha que o logaritmo de um número **a** seja igual a **x**. Se log a = x, então $10^x = a$. Elevando os dois lados dessa última igualdade à potência **n**:

$$(10^x)^n = a^n$$
$$10^{nx} = a^n$$

Temos então que **nx** é o logaritmo de $\mathbf{a^n}$, ou seja,

$$\log a^n = nx$$

Substituindo **x** por **log a**, temos a ***terceira propriedade***:

$$\boxed{\log a^n = n \cdot \log a}$$

EXEMPLO 2

Conhecendo os logaritmos de 2 e de 3, calcular o logaritmo de 144.

Solução:

Fatorando 144 encontramos $2^4 \cdot 3^2$. Observe, no desenvolvimento do cálculo, a aplicação da primeira e da terceira propriedades:

$$\begin{aligned} \log 144 &= \log 2^4 \cdot 3^2 = \log 2^4 + \log 3^2 = \\ &= 4 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = \\ &= 4 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 \\ &= 1{,}204 + 0{,}954 \\ &= 2{,}158 \end{aligned}$$

Como você verá no próximo exemplo, podemos calcular os logaritmos de todos os números conhecendo apenas os logaritmos dos números primos.

Observe a tabela ao lado e acompanhe.

n	log n
2	0,3010
3	0,4771
5	0,6990
7	0,8451
11	1,0414
13	1,1139
17	1,2304
19	1,2788

EXEMPLO 3

Calcular o logaritmo de 13,6.

Solução:

O número 13,6 é igual a $\frac{136}{10}$.

Fatorando o número 136 encontraremos $2^3 \cdot 17$. Veja novamente a aplicação das propriedades:

$$\begin{aligned} \log 13{,}6 &= \log \frac{136}{10} = \\ &= \log 136 - \log 10 \\ &= \log 2^3 \cdot 17 - \log 10 \\ &= \log 2^3 + \log 17 - \log 10 \\ &= 3 \cdot \log 2 + \log 17 - \log 10 \end{aligned}$$

Substituindo os valores de log 2 e log 17 que estão na tabela, e levando em conta que log 10 = 1, temos:

$$\boxed{\log 13{,}6 = 3 \cdot 0{,}310 + 1{,}2304 - 1 = 1{,}1334}$$

As tabelas e as máquinas científicas

Antigamente, publicavam-se imensas tabelas de logaritmos. Nas mais simples, os logaritmos eram dados com 4 casas decimais e nas maiores, com até 14 casas decimais. Com o aparecimento das calculadoras eletrônicas, as tabelas perderam sua função. As calculadoras científicas fornecem os logaritmos dos números instantaneamente. Basta apertar a tecla **LOG** que elas possuem. Conhecendo um logaritmo, as calculadoras científicas também nos dizem a que número ele corresponde.

No entanto, são poucas as pessoas que possuem essas máquinas. Em geral, usamos no nosso dia-a-dia a calculadora simples, que possui apenas as quatro operações, a raiz quadrada e uma memória. Por isso, para as nossas aplicações precisaremos consultar uma tabela.

A consulta à tabela que vamos fornecer é fácil. Mas antes de lidar com ela, devemos aprender mais algumas coisas.

Característica e mantissa

O logaritmo de um número é constituído de duas partes: uma antes da vírgula e outra depois da vírgula. A primeira chama-se ***característica*** e a segunda chama-se ***mantissa***. Veja isso no exemplo:

log 24 = 1 , 3802

↗ característica ↖ mantissa

A característica situa o número dado entre duas potências consecutivas de 10. Logaritmos de números entre 1 e 10 possuem característica 0; logaritmos de números entre 10 e 100 possuem característica 1; logaritmos de números entre 100 e 1000 possuem característica 2, e assim por diante.

NÚMEROS	CARACTERÍSTICA DO LOGARITMO
entre 1 e 10	0
entre 10 e 100	1
entre 100 e 1000	2
entre 1000 e 10000	3

Veja agora a propriedade da mantissa nos exemplos a seguir:

$$\log 2{,}4 = 0{,}3802$$
$$\log 24 = 1{,}3802$$
$$\log 240 = 2{,}3802$$
$$\log 2400 = 3{,}3802$$

O que você notou? A mantissa é a mesma, somente a característica variou, de acordo com a tabela acima. Quando multiplicamos um número por 10, 100, 1000 etc., a mantissa dos logaritmos não muda. Só a característica varia.

TABELA DE MANTISSAS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

TABELA DE MANTISSAS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Observe como encontramos os logaritmos dos números de 1 a 999 consultando a tabela.

a) Para números de 1 a 99, a mantissa está na primeira coluna, e a característica será 0, se o número estiver entre 1 e 9, e será 1 se o número estiver entre 10 e 100.

5	6990		
6	7782		
7	8451	→	log 7 = 0,8451
8	9031		
9	9542		

40	6021		
41	6128		
42	6232		
43	6335	→	log 43 = 1,6335
44	6435		

b) Para números entre 100 e 1000 procure a mantissa da seguinte forma: localize os dois primeiros algarismos na coluna da esquerda e o último algarismo na linha que está acima da tabela. Na interseção está a mantissa; assim, a característica será 2. Veja como localizamos o logaritmo de 267.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7** ↓	**8**	**9**
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757

log 267 = 2,4265

Com a tabela também podemos descobrir um número quando o seu logaritmo é conhecido. Suponha, por exemplo, que em certo problema encontramos o logaritmo de um certo número igual a 1,4669. Que número será esse?

A mantissa 4669 está inclusive na parte da tabela que acabamos de mostrar. À esquerda dessa mantissa, vemos na primeira coluna o número 29 e acima dela o número 3. Formamos então o número 293. Como a característica do logaritmo é 1, esse número está entre 10 e 99. Logo, o número procurado é 29,3.

log 29,3 = 1,4669

Exercício 1.
Usando só 3 decimais da tabela de logaritmos temos log 6 = 0,778 e log 7 = 0,845. Calcule log 42 pela primeira propriedade, e veja na tabela se o seu resultado está correto.

Exercício 2.
Calcule o logaritmo de 5700.

Sugestão: $5700 = 57 \cdot 100$. Procure na tabela log 57 e use a primeira propriedade.

Exercício 3. Calcule o logaritmo de 0,38.

Sugestão: $0{,}38 = \dfrac{38}{100}$. Procure log 38 na tabela e use a segunda propriedade.

Exercício 4.
Encontre na tabela:
a) log 143
b) log 688
c) log 32,4

Exercício 5.
Calcule $\log 31^4$

Exercício 6.
Calcule $\log \sqrt[3]{40}$

Sugestão: Veja que $\sqrt[3]{40} = 40^{\frac{1}{3}}$. Use a tabela e a terceira propriedade.

Exercício 7.
a) Qual é o número cujo logaritmo é 2,6180?
b) Qual é o número cujo logaritmo é 1,6180?
c) Qual é o número cujo logaritmo é 0,6180?

Exercício 8.
A unidade para a medida das distâncias entre as estrelas é o ***ano-luz***, que vale 9,5 trilhões de quilômetros. Qual é o logaritmo desse número?

Exercício 9.
Calcule $\sqrt[5]{962}$ de acordo com as seguintes instruções:

a) Calcule $\log \sqrt[5]{962} = \log 962^{\frac{1}{5}}$ usando a terceira propriedade e o logaritmo de 962 que se encontra na tabela.

b) Depois que você encontrar o logaritmo, procure a que número ele corresponde. Veja na tabela a mantissa e observe a característica.

AULA

61

Resolvendo problemas com logaritmos

Introdução

Na aula anterior descobrimos as propriedades dos logaritmos e tivemos um primeiro contato com a tábua de logarítmos. Agora você deverá aplicar os conhecimentos adquiridos na solução de diversos problemas.

Vamos lembrar que quando escrevemos, por exemplo, log 2 = 0,301, significa que $10^{0,301} = 2$.

Usamos aqui sempre a base 10 e, por isso, os nossos logaritmos são chamados decimais. Existem também logaritmos em outras bases. Por exemplo, a igualdade $2^5 = 32$ significa que o logaritmo de 32 na base 2 é igual a 5. Como a teoria básica dos logaritmos é a mesma em qualquer base, continuaremos nosso estudo tratando apenas dos logaritmos decimais. São eles que aparecem nas tábuas dos livros didáticos e nas calculadoras científicas.

Nossa aula

Esta aula foi elaborada com problemas em que os logaritmos são necessários para a solução. Acompanhe o raciocínio com uma calculadora comum para conferir os cálculos e consulte a tábua de logaritmos da aula passada quando necessário.

EXEMPLO 1

Um juiz determinou o pagamento de uma indenização até certa data. Determinou também que, caso o pagamento não fosse feito, seria cobrada uma multa de R$ 2,00 que dobraria a cada dia de atraso. Em quantos dias de atraso essa multa seria superior a 1 milhão de reais?

Solução:

A multa determinada pelo juiz pode parecer pequena, se o atraso no pagamento for de poucos dias. Mas ela cresce com uma rapidez muito grande.

Chamando de **x** o número de dias de atraso no pagamento, o valor da dívida será 2^x. Veja:

1 dia de atraso ⇒ x = 1 ⇒ multa = $2^1 = 2$
2 dias de atraso ⇒ x = 2 ⇒ multa = 2 = 4
3 dias de atraso ⇒ x = 3 ⇒ multa = 2 = 8 e assim por diante.

Como vemos, as multas crescem em progressão geométrica. Devemos calcular em que dia essa multa atinge 1 milhão de reais, ou seja, devemos resolver a equação:

$2^x = 1\ 000\ 000$

Para resolver essa equação é preciso aplicar o logaritmo nos dois lados:

$\log 2^x = \log 1\ 000\ 000$

$\log 2^x = \log 10^6$

Agora vamos aplicar a propriedade do logaritmo da potência:

$x \cdot \log 2 = 6 \cdot \log 10$

Como log 10 = 1 e log 2 = 0,301 (veja a tabela), temos:

$x \cdot 0{,}301 = 6$

$$x = \frac{6}{0{,}301} = 19{,}93$$

Assim, concluímos que no 20º dia de atraso a multa terá passado de 1 milhão de reais.

Veja outro exemplo que necessita do cálculo pela tábua de logaritmos.

EXEMPLO 2

Se log x = 1,6395, determine x.

Solução:

Vamos recordar, inicialmente, que o logaritmo se constitui de duas partes: a ***característica*** e a ***mantissa***. A característica é o número que está antes da vírgula e a mantissa é o número que aparece depois da vírgula. A tábua de logaritmos apresentada na aula passada nos dá apenas as mantissas, mas a característica nos dá a seguinte informação:

Números	Característica
entre 1 e 9	0
entre 10 e 99	1
entre 100 e 999	2
entre 1000 e 9999	3

Como log x = 1,6395 tem característica 1. Então, sabemos que o número **x** está entre 10 e 99. Assim, procuramos a mantissa 6395 na tábua.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
							↓			
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522

Uma vez encontrada a mantissa, vemos que na coluna da esquerda está o número 43 e na linha de cima o número 6. Juntando esses números, formamos o número 436, faltando apenas colocar a vírgula no lugar certo. Como o nosso número está entre 10 e 99, então x = 43,6.

EXEMPLO 3

Um construtor deseja fazer um reservatório de água para conter 5000 litros e que tenha a forma de um cubo. Quanto deve medir o lado desse cubo?

Solução:

Um cubo é uma caixa que tem comprimento, largura e altura iguais.

O volume de uma caixa é o produto de suas dimensões: comprimento × largura × altura. Logo, se o lado do cubo mede **a** seu volume será **a · a · a = a** . Por outro lado, sabemos que 1m é igual a 1000 litros. Portanto, se essa caixa deve conter 5000 litros, seu volume será 5m . Devemos então resolver a equação:

$$a = 5$$

O valor de **a** será a medida em metros do lado desse cubo. Aplicando logaritmo dos dois lados e, em seguida, a propriedade da potência temos:

$$\log a = \log 5$$

$$3 \cdot \log a = \log 5$$

Na tábua de logaritmos encontramos log 5 = 0,699. Logo:

$$3 \cdot \log a = 0{,}699$$

$$3 \cdot \log a = \frac{0{,}699}{3}$$

$$\log a = 0{,}233$$

Como agora sabemos que o logaritmo de **a** é igual a 0,233, vamos procurar na tábua de logaritmos a mantissa 233.

Encontrando a mantissa 2330, verificamos que à esquerda existe o número 17 e acima o número 1. Juntando esses algarismos formamos o número 171. Falta apenas colocar a vírgula no lugar correto. Repare que calculamos log a = 0,233. Esse número possui característica 0, ou seja, o valor de **a** está entre 1 e 9. Portanto, o valor do lado do cubo é 1,71 m.

Dessa forma, o construtor saberá que construindo um reservatório de água com a forma de um cubo de 1,71 m de lado, ele terá a capacidade de conter 5000 litros de água.

EXEMPLO 4

Em certo país, a taxa de inflação é igual todos os meses, mas no final de um ano verificou-se que os preços dobraram. Qual é a taxa mensal de inflação nesse país?

Solução:

Suponhamos que a taxa mensal de inflação seja **i**. Se hoje um produto custa **x**, custará daqui a um mês $x\,(1+i)$. Dentro de dois meses custará $x\,(1+i)^2$ e assim por diante. No final de um ano, esse preço será $x\,(1+i)^{12}$. Como sabemos que o preço será também o dobro do valor inicial, temos a equação:

$$x\,(1+i)^{12} = 2x$$

ou

$$(1+i)^{12} = 2$$

Para calcular o valor da taxa **i**, aplicamos o logaritmo aos dois lados da nossa equação:

$$\log\,(1+i)^{12} = \log 2$$

$$12 \cdot \log\,(1+i) = 0{,}301$$

$$\log\,(1+i) = \frac{0{,}301}{12}$$

$$\log\,(1+i) = 0{,}0251$$

Na tabela não encontramos a mantissa 0251, mas encontramos 0253 (que é um valor próximo). Com essa mantissa formamos o número 107. Como a característica é zero nosso número será 1,07, então:

$$\log\,(1+i) = 0{,}0251$$

$$1+i = 1{,}07 \qquad \text{(aproximadamente)}$$

$$i = 0{,}07 = 7\%$$

Portanto, a inflação mensal que faz os preços dobrarem em um ano é de aproximadamente 7%.

EXEMPLO 5

Pela evaporação, um reservatório perde, em um mês, 10% da água que contém. Se não chover, em quanto tempo a água se reduzirá a um terço do que era no início?

Solução:

Vamos chamar de **x** a quantidade de água que temos no reservatório. Em um mês essa quantidade será $x - \frac{10}{100}x = x - 0,1x = x \cdot 0,9$.

Em dois meses será $x \cdot 0,9^2$ e assim por diante. Logo, depois de **n** meses, a quantidade de água no reservatório será $x \cdot 0,9^n$. Desejamos então calcular **n** para que esse valor seja igual a $\frac{x}{3}$, ou seja, um terço do que era no início.

$$x \cdot 0,9^n = \frac{x}{3}$$
$$0,9^n = \frac{1}{3}$$

Para calcular **n** vamos aplicar o logaritmo nessa equação e usar as propriedades da potência e da razão.

$$\log 0,9^n = \log \frac{1}{3}$$

$$n \cdot \log 0,9 = \log \frac{1}{3}$$

$$n \cdot \log \frac{9}{10} = \log \frac{1}{3}$$

Veja que log 1 = 0, log 10 = 1, log 3 = 0,4771 e log 9 = 0,9542, como nos informa a tabela. Substituindo esses valores, temos:

$$n\,(0,9542 - 1) = 0 - 0,4771$$

$$n\,(-0,0458) = -0,4771$$

$$n = \frac{0,4771}{0,0458} = 10,42$$

Assim, temos 10 meses e uma fração (0,42) que é quase a metade.

Como $0,42 \cdot 30$ dias = 12, 6 dias, dizemos que em 10 meses e 13 dias a água do reservatório terá se reduzido a um terço do que era no início.

Exercício 1.

Determine **x** em cada um dos casos:

a) log x = 2,7348
b) log x = 1,7348
c) log x = 0,7348

Exercício 2.

Determine os logaritmos:

a) log 192
b) log 68,4

Exercício 3.

A população de um país cresce 5% a cada ano. Em quantos anos ela ficará duas vezes maior?

Exercício 4.

Quanto mede o lado de um cubo de 40 m de volume?

Exercício 5.

Em certo país, a inflação é a mesma todos os meses, atingindo 76% em 5 meses. Qual é a inflação mensal?

Exercício 6.

Encontre o valor de **x** em cada uma das equações:

a) log x = log 4
b) log x = log 3 + log 5
c) log (x – 3) + log 2 = 1

Sugestão: substitua 1 por log 10, e aplique do lado esquerdo a propriedade da adição.

d) log (5***x*** + 10) – log ***x*** = 2

Exercício 7.

Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30ºC. Sobre um fogão havia uma panela com água fervendo e, em certo momento, o fogo foi apagado. A partir das informações que daremos a seguir, calcule que temperatura terá essa água 10 minutos depois que o fogo foi apagado.
Informações: A temperatura da água que se resfria obedece à seguinte equação:

$t - a = (b - a) \cdot 10^{-0,06\,n}$

Os significados das letras são os seguintes:

n = tempo de resfriamento em minutos.
a = temperatura do ambiente.
b = temperatura da água no início.
t = temperatura da água após o tempo de resfriamento.

Substitua os valores dados na equação: a = 30, b = 100 e n = 10. Aplique o logaritmo para calcular a temperatura da água.

AULA

62

Unidades de volume

Introdução

Com esta aula iniciamos uma nova unidade do Telecurso 2000: a Geometria Espacial. Nesta unidade você estudará as propriedades de figuras espaciais, tais como: o cubo, o paralelepípedo, a esfera, o cilindro etc. Aprenderá também a calcular o volume dessas e de outras figuras.

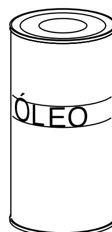
Para o cálculo de um volume podemos usar diferentes unidades de medida. Certamente você já conhece o litro e o metro cúbico. Portanto, vamos aprofundar esses conceitos.

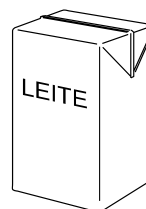
Nossa aula

Volume ou capacidade

Volume ou capacidade de um corpo (ou recipiente) é a quantidade de espaço que esse corpo ocupa ou que ele dispõe para armazenar alguma coisa. Por exemplo:

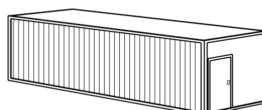






Esses recipientes têm a capacidade de armazenar 1 litro de líquido, conforme a indicação em cada embalagem. Podemos dizer que o volume ou a capacidade de cada um desses recipientes é de 1 litro.

Vejamos um outro exemplo: diariamente nos portos brasileiros, navios são carregados ou descarregados com mercadorias que serão transportadas para outros lugares. Em geral, essas mercadorias são armazenadas em grandes caixas chamadas de "container".



Existem dois tipos de container: o de 20 pés (cuja capacidade é de 32,88 metros cúbicos) e o de 40 pés (cuja capacidade é de 66, 92 metros cúbicos).

Unidade de volume e de capacidade

Nos exemplos anteriores utilizamos o litro (cuja abreviatura é ℓ) e o metro cúbico (cuja a abreviatura é m^3) como unidades de medida.

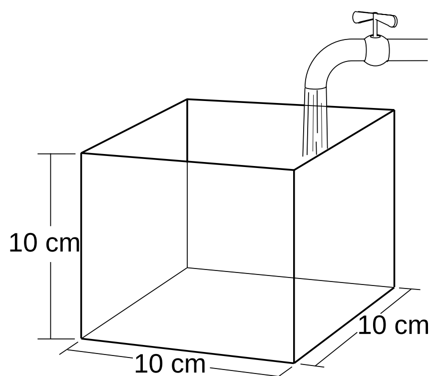
Além dessas unidades, temos também o centímetro cúbico (cm^3), o decímetro cúbico (dm^3), o mililitro (mℓ) etc.

A escolha da unidade de medida adequada depende do ***tamanho*** do que se vai medir.

O metro cúbico, por exemplo, é adequado para medir grandes volumes, como no caso de um container.

Para medir pequenos volumes costumamos usar o litro, como no caso da caixa de leite.

O litro

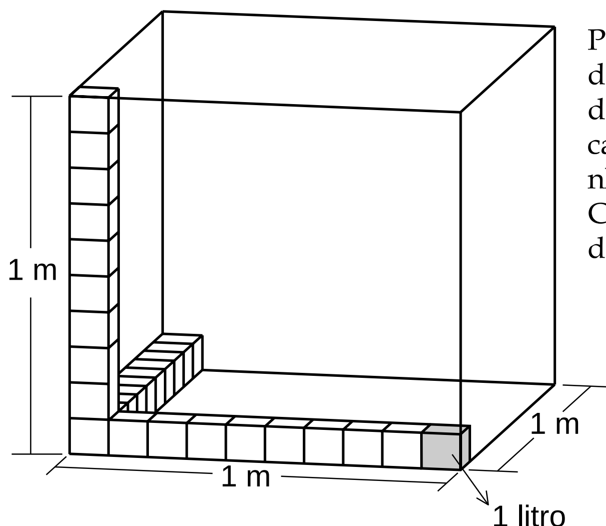


O litro é a quantidade de líquido capaz de encher completamente um cubo oco, com 10 cm de aresta.

Aresta é o nome que se dá à linha que separa uma face da outra. Os lados dos quadrados que formam o cubo são as arestas do cubo.

Quantos litros cabem num metro cúbico?

Para responder a essa pergunta vamos imaginar uma caixa cúbica com 1 metro de aresta e muitos cubinhos com 10 cm de aresta. Cada um desses cubinhos corresponde a 1 litro de água.



Podemos arrumar os cubinhos dentro da caixa grande em fileiras de 10, de forma que o fundo da caixa fique com $10 \cdot 10 = 100$ cubinhos.

Como podemos formar 10 camadas, temos:

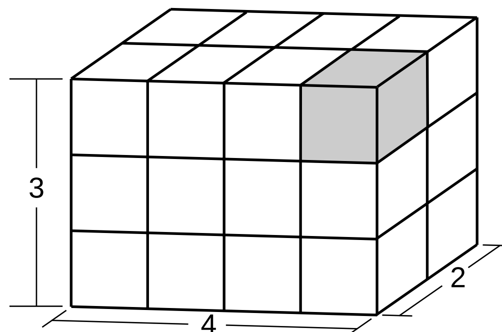
$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000 \text{ cubinhos}$$

Portanto:

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\ \ell$$

O volume do paralelepípedo

Paralelepípedo é o nome que a Matemática dá a objetos que tenham a forma de uma caixa, de um tijolo etc.



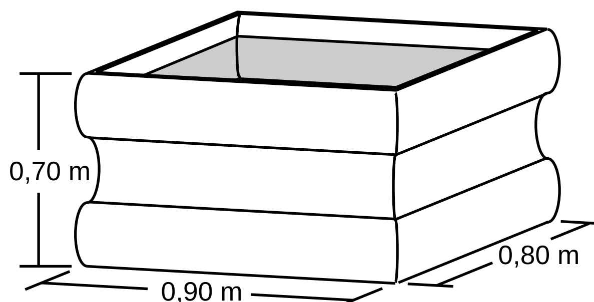
Observe que o paralelepípedo da figura acima foi formado por 24 cubos de aresta 1.

Considerando esse cubo como unidade padrão, podemos dizer que o volume do paralelepípedo é $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

De maneira geral, podemos calcular o volume de um paralelepípedo multiplicando-se as 3 dimensões:

> Volume do paralelepípedo = comprimento · largura · altura

Vejamos um exemplo: quantos litros de água são necessários para encher completamente uma caixa d'água cujas dimensões são: 0,90 m de comprimento, 0,80 m de largura e 0,70 m de altura?



Volume $= 0{,}90\text{ m} \cdot 0{,}80\text{ m} \cdot 0{,}70\text{ m}$
$= 0{,}504\text{ m}^3$

Como $1\text{ m}^3 = 1000\ \ell$, então:

$0{,}504 \cdot 1000 = 504\ \ell$

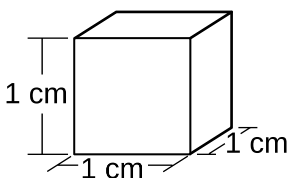
São necessários 504 ℓ para encher, completamente, essa caixa d'água.

O mililitro

Em algumas situações práticas, o volume a ser medido é tão pequeno que o litro se torna uma unidade inadequada. Isso acontece, por exemplo, quando queremos indicar a quantidade de líquido de um vidro de remédio. Nesse caso usamos o mililitro ($m\ell$).



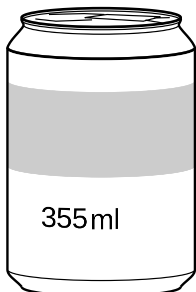
O mililitro é a quantidade de líquido que cabe num cubo oco com 1 cm de aresta.

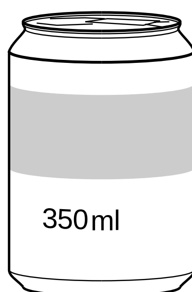


Volume = $1\ cm^3$

$$1\ cm^3 = 1\ m\ell$$

As latas de cerveja costumam ter em seu rótulo a indicação em mililitros de seu volume. Repare:





Muitas vezes é importante que saibamos relacionar duas unidades. Da mesma forma que relacionamos a hora com o minuto, o metro com o quilômetro ou com o centímetro, da mesma forma precisamos relacionar as unidades de volume.

Portanto:

$$1\ \ell = 1\,000\ cm^3$$

$$1 m^3 = 1000\ \ell$$

$$1\ cm^3 = 1\ m\ell$$

$$1\ell = 1\ dm^3$$

Exercícios

Exercício 1.

A piscina de um clube tem 2 m de profundidade, 12 m de comprimento e 8 m de largura. Quantos litros de água são necessários para enchê-la?

Exercício 2.

Uma caixa de vinho tem as seguintes dimensões: 30 cm de altura, 40 cm de comprimento e 25 cm de largura. Um comerciante importou um container de 20 pés de caixas de vinho. Quantas caixas de vinho ele encomendou?

Exercício 3.

Um caixa d'água cúbica, de 1 metro de aresta, está completamente cheia. Dela retiramos 70 litros de água. De quanto desce o nível da água?

Exercício 4.

Precisamos construir uma caixa d'água com o formato de um paralelepípedo. Quais podem ser as dimensões dessa caixa para que sua capacidade seja de 5.000 litros?

Exercício 5.

Como você explicaria para uma criança o que é um litro de água?

Exercício 6.

Que unidade de medida você usaria para indicar a quantidade de líquido em:

a) um copo de chopp;
b) uma lata de óleo;
c) uma piscina;
d) uma ampola.

Exercício 7.

Uma outra unidade para medir volumes, muito usada na vida prática, é a ***garrafa***. Sabendo que a garrafa vale $\frac{3}{4}$ de litro indique sua capacidade em mililitros.

Exercício 8.

Com um barril de vinho de 360 litros, quantas garrafas de vinho podemos completar?

Exercício 9.

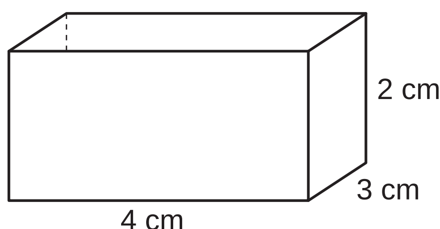
Uma lata de óleo tem, em geral 900 $m\ell$. Quantas latas correspondem a um galão de 20ℓ de óleo?

Cubo, prismas, cilindro

Introdução

Qual é a quantidade de espaço que um sólido ocupa? Esta é uma das principais questões quando estudamos as figuras espaciais. Para respondê-la, a geometria compara esse sólido com outro, tomado como unidade. O resultado dessa comparação é um número real positivo, chamado de volume ou capacidade do sólido.

Qual é o volume da caixa?



$V = 4\ cm \cdot 3\ cm \cdot 2\ cm$

$V = 24\ cm^3 = 24\ m\ell$

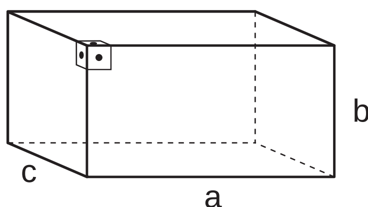
O volume dessa caixa é de $24\ cm^3$, que também pode ser expresso como 24 mililitros ($24m\ell$).

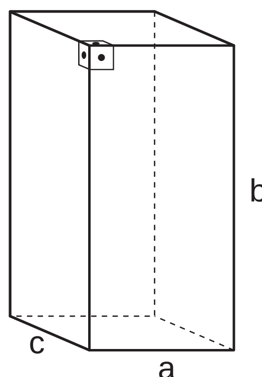
Nossa aula

Na aula anterior você estudou as unidades padronizadas de volume e aprendeu a calcular o volume do paralelepípedo. Nesta aula vamos aprofundar um pouco mais esses conceitos.

O volume do bloco retangular

Bloco retangular ou paralelepípedo retângulo é o nome que a Matemática dá aos objetos que têm a forma de uma caixa de sapatos, caixa de fósforos etc.





Observe que essa forma geométrica é delimitada por seis retângulos cujas faces opostas são retângulos idênticos.

Observe também que, em cada vértice, as arestas são perpendiculares duas a duas. O volume do bloco retangular é dado por:

$$V = abc$$

onde **a**, **b** e **c** são as medidas das arestas, usando uma mesma unidade de comprimento.

Como **ac** é a área do retângulo que é a base do bloco retangular e **c** é a sua altura, o volume do bloco retangular é dado por:

$$V = A \cdot h$$

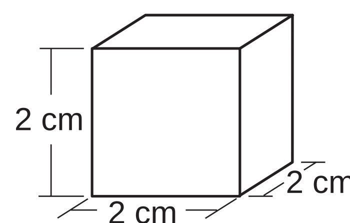
Em que **A** é a área da base e **h** a altura.

O volume de um cubo

O cubo é um paralelepípedo cujas arestas têm a mesma medida.

A figura ao lado mostra um cubo de aresta 2 cm.

Seu volume é
$2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 2^3\text{ cm}^3 = 8\text{ cm}^3$



De maneira geral, um cubo de aresta **a** tem seu volume expresso por:

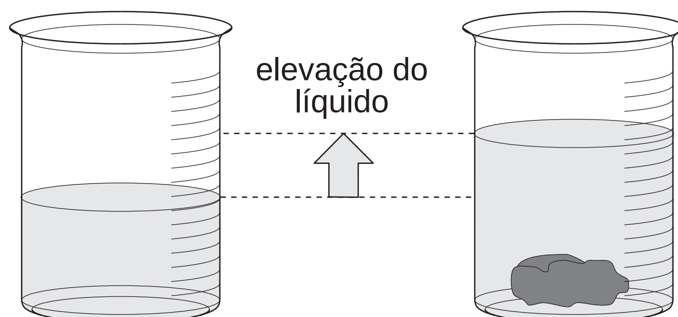
$$V = a^3$$

Um pouco de história

A preocupação com o cálculo de volumes é bastante antiga. Há milhares de anos a civilização egípcia já conhecia alguns processos para esse cálculo. Os habitantes da Grécia Antiga aprimoraram esses processos e desenvolveram outros. Destaca-se o trabalho do matemático e físico Arquimedes, que viveu no século III a.C.

Desenvolvendo raciocínios bastante criativos, Arquimedes mostrou como calcular o volume de diversas figuras geométricas.

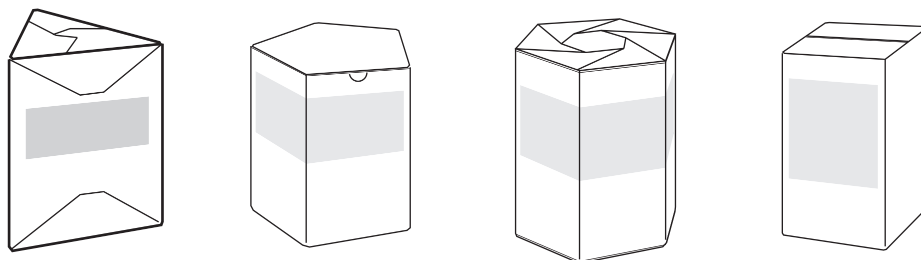
Conta-se que, enquanto tomava banho, constatou que a água subia quando ele mergulhava. Essa quantidade de água que subia era seu volume. Veja como obter o volume de um sólido qualquer, como uma pedra, uma fruta, um legume etc. usando o ***princípio de Arquimedes***.



A diferença entre os dois resultados é o volume do sólido.

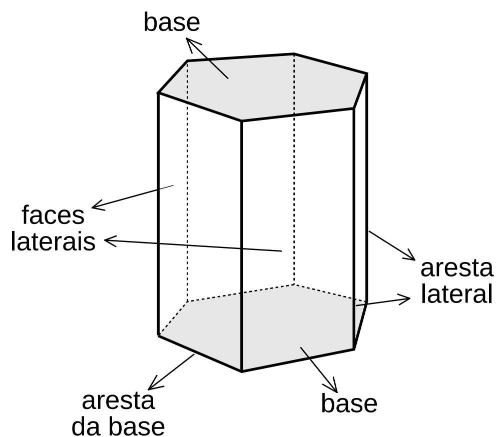
Prismas

Veja alguns exemplos de prismas.

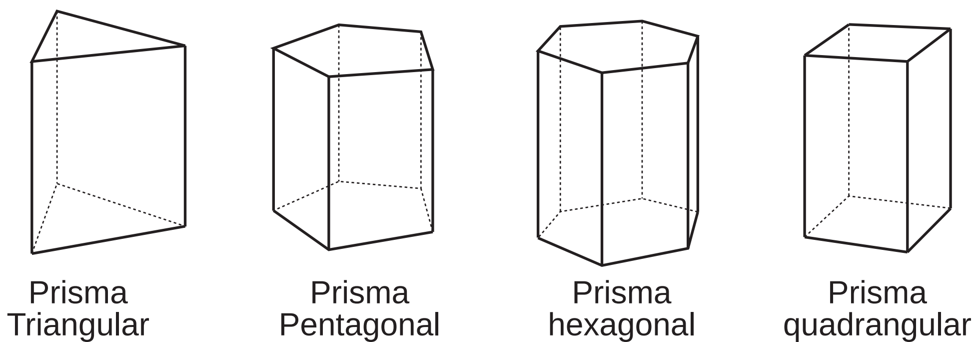


Prismas são sólidos geométricos que possuem as seguintes características:

- bases paralelas são iguais;
- arestas laterais iguais e paralelas e que ligam as duas bases.



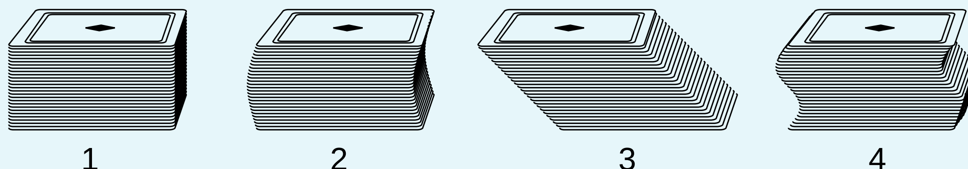
Nomenclatura: Os prismas são desiguais pelo número de lados das bases, que lhes dão o nome:



Observação: Só trataremos aqui de prismas retos, que são aqueles cujas arestas laterais são perpendiculares às bases.

A pilha entorta e o volume se mantém

Para compreender as idéias de Cavalieri (matemático italiano que viveu na Itália no século XVII), vamos imaginar uma pilha formada com as cartas de quatro ou cinco jogos de baralho. Podemos formar pilhas de várias formas, que tenham a mesma base e a mesma altura.



Partindo de qualquer uma das pilhas, podemos raciocinar assim: o volume da pilha é a soma dos volumes das cartas e, como as cartas são as mesmas, as pilhas têm o mesmo volume, apesar de terem formas diferentes.

A primeira pilha tem a forma de um bloco retangular (ou paralelepípedo retângulo). É um sólido delimitado por seis retângulos; as faces opostas são retângulos idênticos. A terceira pilha tem a forma de um paralelepípedo oblíquo: suas bases são retângulos, mas suas faces laterais são paralelogramos. Da pilha 1 para a pilha 3 houve mudança de forma, mas o volume permaneceu inalterado. Como os paralelepípedos das pilhas 1 e 3 têm a mesma base, a mesma altura e o mesmo volume, e como o volume do paralelepípedo da pilha 1 é igual ao produto da área da sua base pela sua altura, concluímos que o volume do paralelepípedo da pilha 3 também é igual ao produto da área da sua base pela sua altura.

Desse modo, conseguimos calcular o volume de um paralelepípedo oblíquo, que não pode ser decomposto em cubinhos unitários. O cálculo do volume desse sólido ilustra a idéia central de Cavalieri, já trabalhada por Arquimedes. Essa idéia consiste em imaginar um sólido decomposto em camadas muito finas, como as cartas de um baralho. Se dois sólidos forem constituídos por camadas iguais, de mesma área e de mesma espessura, então seus volumes são iguais.

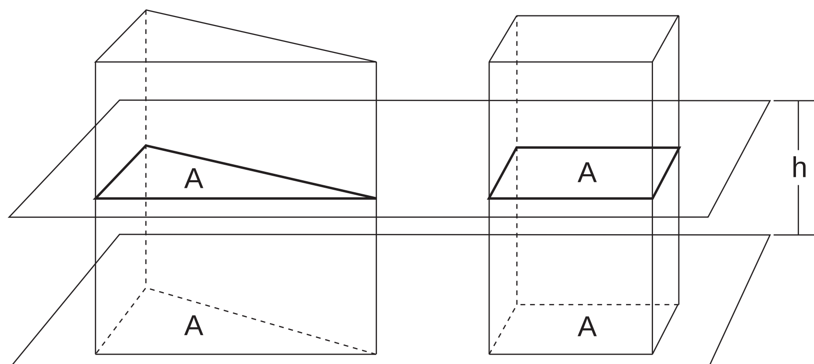
(Fonte: Telecurso 2º grau 6ª ed. 1989 - FRM. Aula 64, pág. 423)

Volume do prisma

Você já sabe que para determinar o volume de um bloco retangular utilizamos a fórmula

$$V = A \cdot h$$

Imagine um prisma qualquer e um bloco retangular com a mesma altura (h) e as bases de mesma área (A), apoiados em um plano horizontal, como mostra a figura.

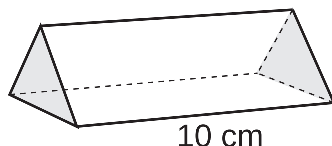


Qualquer outro plano horizontal corta os dois sólidos, determinando figuras iguais às suas bases. Logo, pelo princípio de Cavalieri, eles têm mesmo volume. Por isso, o volume de qualquer prisma é o produto da área da base pela altura.

$$\mathbf{V = A \cdot h}$$

Vejamos um exemplo:

Qual é o volume do prisma triangular da figura abaixo, sabendo que suas bases são formadas por triângulos equiláteros de lados 5 cm?



ATENÇÃO!

A fim de saber qual a base de um prisma, examine suas faces (as figuras planas que o limitam) e verifique quais delas são paralelas. Há exatamente duas que são paralelas. Qualquer uma delas pode ser escolhida como base.

Para obter o volume do prisma, devemos multiplicar a área de sua base pela altura.

Como foi visto na Aula 41, a altura do triângulo equilátero é $h = \dfrac{\lambda\sqrt{3}}{2}$

Como $\ell = 5$, temos que $h = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} = 2{,}5\sqrt{3}$ cm

Logo, a área do triângulo equilátero é igual a:

$$\frac{5 \cdot 2{,}5\sqrt{3}}{2} = \frac{12{,}5\sqrt{3}}{2} = 6{,}25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

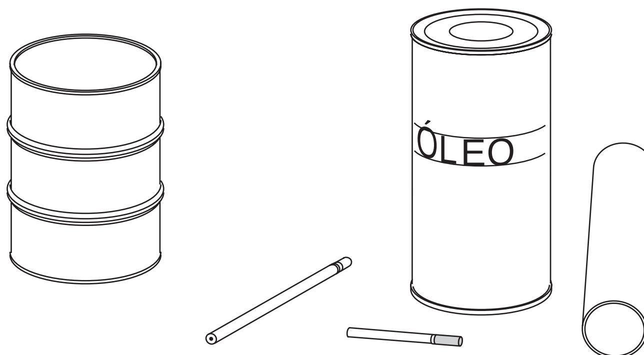
Assim, o volume do prisma é:

$V = 6{,}25\sqrt{3}$ ´ $10 = 62{,}5\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

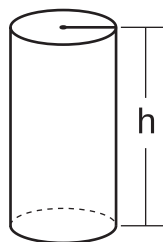
Usando $\sqrt{3} = 1{,}73$ temos que o volume do prisma é aproximadamente 108,125 cm^3.

O cilindro

São comuns os objetos que têm a forma de um cilindro, como por exemplo, um lápis sem ponta, uma lata de óleo, um cigarro, um cano etc.

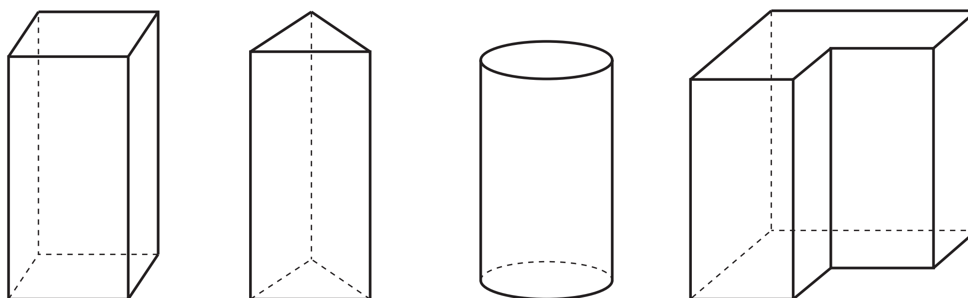


Podemos imaginar um cilindro formado por círculos de cartolina, todos do mesmo tamanho, empilhados. Por isso, temos que o volume do cilindro é também igual ao produto da área da base pela altura.



Volume do cilindro
$V = A \cdot h$

Há muita semelhança entre os prismas e os cilindros. Podemos dizer que eles pertencem a uma mesma família de sólidos geométricos, com características comuns.

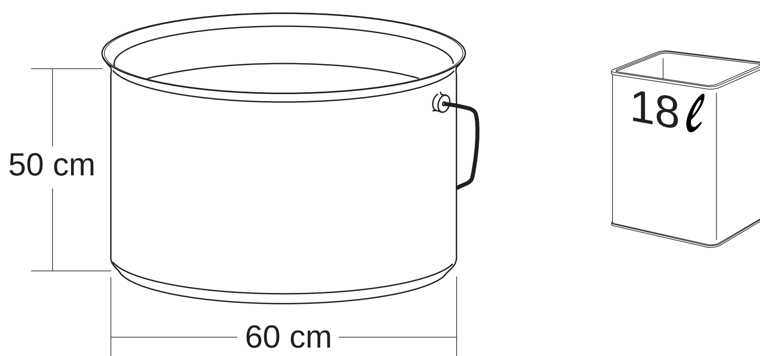


O volume de todos os prismas e de todos os cilindros pode ser determinado aplicando-se a fórmula:

$$\mathbf{V = A \cdot h}$$

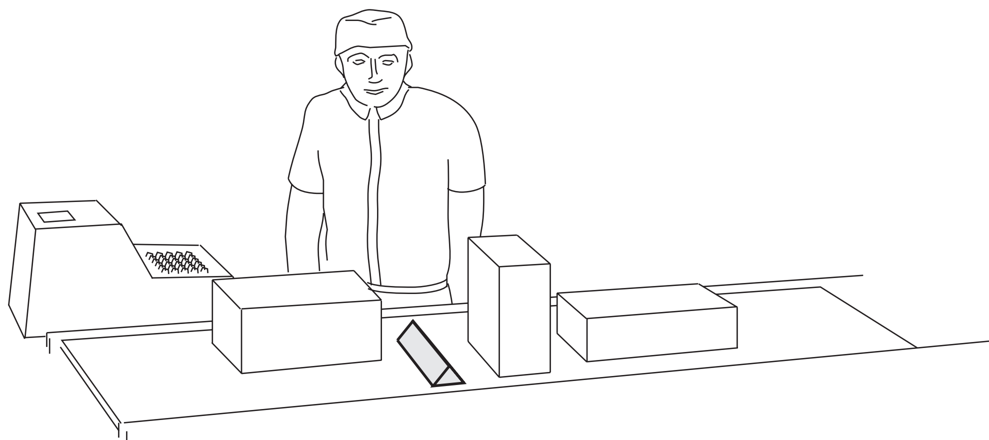
Exercício 1.

Um restaurante costuma usar panelas enormes em dias de muito movimento. Para encher de água uma dessas panelas o cozinheiro utiliza latas (ou galões) de 18 litros. Quantos desses galões são necessários para encher completamente uma panela de 60 cm de diâmetro e 50 cm de altura?



Exercício 2.

Alguns supermercados têm usado um prisma de madeira para separar, no caixa, as compras dos clientes que já foram registrados.



Supondo que esse prisma seja maciço, determine o volume de madeira necessário para a fabricação de 100 prismas com as seguintes características: aresta da base com 2 cm e altura com 20 cm (use $\sqrt{3}$ @ $1,73$).

Exercício 3.

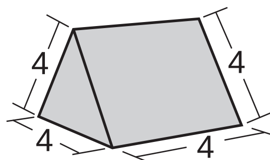
Qual o volume aproximado de uma lata de óleo ou de refrigerante? Use uma régua para medir a altura e o raio da base.

Exercício 4.

Quantos metros de fio de cobre, de $\frac{1}{8}$ de polegada de diâmetro, podem ser fabricados a partir de 100 kg de cobre? Sabe-se que 1 cm^3 de cobre tem massa igual a 8,8 kg e que 1 polegada é aproximadamente igual a 2,54 cm.

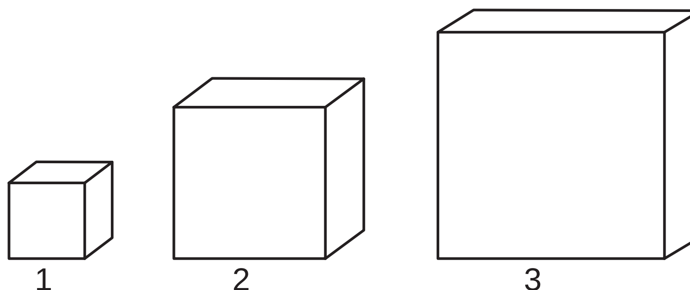
Exercício 5.

As arestas do prisma da figura a seguir são todas iguais a 4 unidades. Calcule seu volume.



Exercício 6.

Os cubos seguintes têm, respectivamente, arestas 1, 2 e 3.

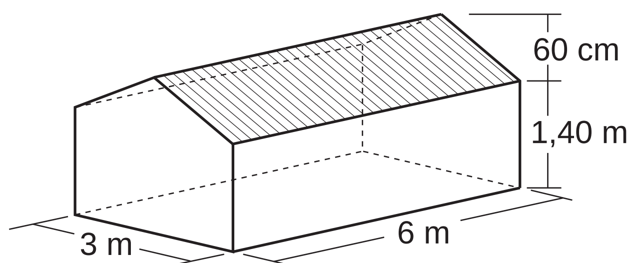


a) Calcule o volume de cada um dos cubos.

b) O que ocorre com o volume do cubo quando dobramos sua aresta? E quanto a triplicamos?

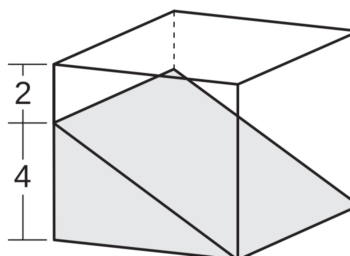
Exercício 7.

Qual o volume da estufa representada pela seguinte figura?



Exercício 8.

De um cubo de madeira de 6 cm de aresta foi cortado um prisma de base triangular, como mostra a figura. Qual é o volume desse prisma?



AULA

64

Observando embalagens

Introdução

O leite integral é vendido em caixas de papelão laminado por dentro. Essas embalagens têm a forma de um paralelepípedo retângulo e a indicação de que contêm 1000 mℓ de leite, cada uma.

José comprou uma dessas caixas e, após despejar o leite numa leiteira, foi tirar a prova. Com uma régua ele mediu a embalagem:

$$6 \text{ cm} \times 9{,}5 \text{ cm} \times 16{,}5 \text{ cm}$$

Ao calcular o volume, ele encontrou:

$$V = 6 \times 9{,}5 \times 16{,}5 = 940{,}5 \text{ cm}$$

Como ele sabe que 1 cm = 1 mℓ, concluiu que estava sendo enganado em quase 60 ml, por litro! Para confirmar sua suspeita, ele derramou 1ℓ de água dentro da caixa. E foi aí que, cheio de espanto, ele observou que ***toda*** a água coube dentro da caixa, sem derramar.

– Como pode? – pensou. – Pelos meus cálculos só caberiam 940,5 mℓ, mas, na prática eu observo que a caixa pode conter 1.000 mℓ!

Olhando com atenção para a caixa de papelão com água, ele observou um fato que lhe permitiu matar a charada. Será que você consegue descobrir que fato foi esse que José observou?

Nossa aula

Nesta aula, vamos conferir e comparar volumes de embalagens de mercadorias, aplicando o que sabemos sobre volumes de prismas, cubos e cilindros.

A maioria das embalagens das mercadorias que consumimos vem em uma dessas três formas: paralelepípedo retângulo, cubo ou cilindro. Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 1

Uma lata de óleo tem a forma de um cilindro. Seu diâmetro mede 8,4 cm e, sua altura, 18,2 cm. Será que ela comporta 1000 mℓ de óleo?



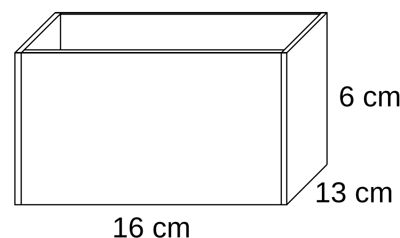
O raio da base é 4,2 cm. Como o volume do cilindro é V = A × h, temos:

$$V = p \times (4{,}2)^2 \times 18{,}2 = 3{,}14 \times 17{,}64 \times 18{,}2 = 1.008 \text{ cm} = 1.008 \text{ m}\ell$$

Então, a resposta é ***sim***.

EXEMPLO 2

Uma caixa é feita com placas de madeira com 0,5 cm de espessura. Depois de pronta, observa-se que as medidas da caixa, pela parte externa, são 13 cm × 16 cm × 6 cm.



Qual o volume externo da caixa?

$$V = a \times b \times c = 13 \times 16 \times 6 = 1.248 \text{ cm}$$

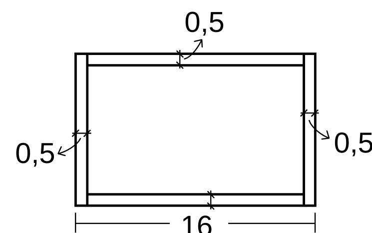
Qual é a capacidade da caixa, isto é, seu volume interno?

Observe que as medidas do interior da caixa são as medidas do exterior, subtraindo-se a espessura da madeira. Assim, cada lado ficará subtraído de 2 × 0,5 cm = 1,0 cm e o fundo, de 0,5 cm, passando a medir, então:

16 – 1 = 15 cm

13 – 1 = 12 cm

6 – 0,5 = 5,5 cm



O volume interno é:

$$V = 15 \times 12 \times 5{,}5 = 990 \text{ cm}$$

Qual o volume de madeira utilizada?

O volume de madeira será a diferença entre o volume externo e o interno. Logo, o volume de madeira é:

$$V_{madeira} = 1.248 - 990 = 258 \text{ cm}$$

Qual embalagem é mais econômica?

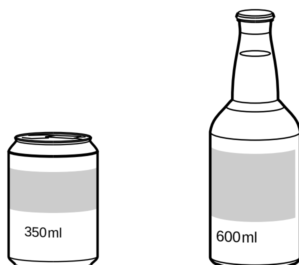
As bebidas normalmente, são vendidas em embalagens diferentes. É preciso ter sempre atenção na hora de decidir qual comprar. Veja o exemplo:

Certa bebida é vendida em dois tipos de embalagem:

- em garrafa de 600 mℓ, por R$ 0,78.
- em lata de 350 mℓ, por R$ 0,49.

Qual das duas embalagens é mais vantajosa?

Para resolver essa questão, vamos calcular o preço de cada mℓ, em cada uma das embalagens e, em seguida, comparar seus valores.



- Garrafa: 78 # 600 = 0,13 centavos por mℓ
- Lata: 49 # 350 = 0,14 centavos por mℓ

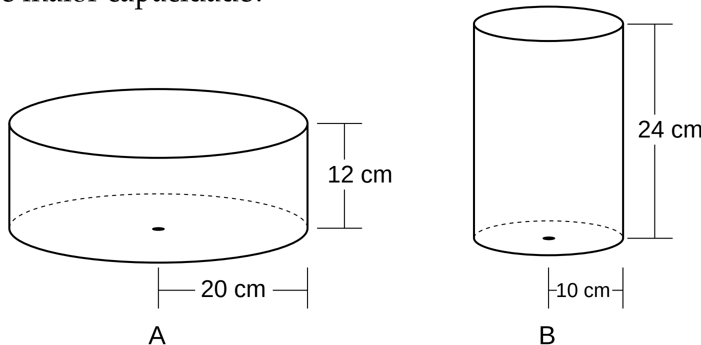
Observe que o valor de cada mℓ, na embalagem garrafa, é mais barato que na embalagem lata. Logo, comprar em garrafa é mais vantajoso.

Quem é maior?

São comuns os objetos em forma cilíndrica. Num supermercado, se você observar as embalagens, vai identificar facilmente essa forma.



Uma pessoa dispõe de dois recipientes cilíndricos: um tem raio de 20 cm e altura de 12 cm; o outro tem a metade do raio, porém o dobro da altura. Qual o recipiente de maior capacidade?



Vamos calcular seus volumes e comparar os resultados:

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h$$

$V_A = p \times 20^2 \times 12 = 4.800$ p cm $\qquad$ $V_B = p \times 10^2 \times 24 = 2.400$ cm

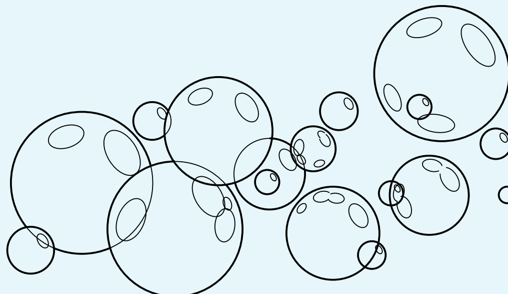
Como você pode observar, o recipiente mais baixo, recipiente A, possui maior capacidade.

À primeira vista, pode parecer que o fato de o recipiente ter a metade do raio será compensado por ter o dobro da altura. Porém, isso não acontece.

No cálculo do volume do cilindro, $V = pR^2 \cdot h$, observamos que o raio vem elevado ao quadrado e a altura não. Isso significa que, quando calculamos o volume, as variações ocorridas no raio têm um peso maior do que as variações na altura. Por esse motivo, os dois fatos não se contrabalançam, predominando a variação do raio sobre o valor final do volume.

Uma Curiosidade

Você sabe por que as bolhas de sabão são esféricas?



A película que forma a bolha de sabão está submetida a tensões que fazem com que ela tenha a menor área possível.

A figura geométrica que consegue abranger um certo volume com a menor área possível é a ***esfera***.

Assim, se os fabricantes de leite integral, por exemplo, quisessem economizar o máximo de papelão em suas embalagens, elas deveriam ser esféricas. O problema é que, neste caso, o custo da confecção desse tipo de embalagem ficaria muito alto e não valeria a pena.

Será que agora, depois de ler essa curiosidade, você saberia adivinhar qual foi o fato observado por José, na caixa de leite, quando colocou 1ℓ de água dentro dela? (Volte e leia outra vez a introdução.)

Bem, isso encerra nossa aula de hoje. A partir de agora, preste bastante atenção às embalagens, suas capacidades e seus custos. Mas, antes, vamos praticar.

Exercício 1

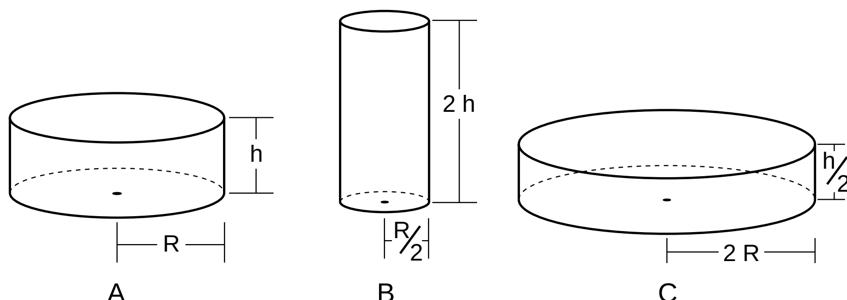
Um tablete de margarina, com 100 g, mede 3 cm × 3 cm × 12, 5 cm e tem a forma de um paralelepípedo. Um quilo dessa margarina é vendido em latas cilíndricas, com 11 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Essa embalagem é honesta? (Considere $\pi = 3{,}14$).

Exercício 2

Um supermercado vende pedaços de goiabada. Os pedaços têm a forma aproximada de paralelepípedos. Um pedaço mede 6 cm × 5 cm × 8 cm e custa R$ 0,72. Um outro pedaço, de 8 cm × 6 cm × 9 cm, é vendido a R$ 1,35. Qual dos dois pedaços será mais vantajoso comprar?

Exercício 3

Qual o tanque com maior capacidade?



Exercício 4

Uma barra de doce de leite (paralelepípedo retângulo), com 5cm × 6 cm × 7cm, foi completamente envolvida com papel laminado. Se a barra for cortada em cubos de 1 cm de aresta, quantos cubos ficarão sem qualquer cobertura de papel laminado? (UFRJ–1990)

Exercício 5

Um cubo é construído com placas de madeira com 0,5 cm de espessura. A diferença entre o volume externo e o interno desse cubo vale 37cm . Calcule o volume interno desse cubo.

Exercício 6

Um tubo de plástico tem diâmetro interno igual a 1,6 cm. Qual deve ser o seu comprimento para que ele possa conter 1ℓ de água?

Exercício 7

As latas de leite condensado têm a forma de um cilindro equilátero, ou seja, um cilindro cuja altura é igual ao diâmetro da base. A altura dessas latas mede 7,4 cm, aproximadamente, e elas contêm 300 g de leite. Com base nesses dados, calcule qual deve ser o volume ocupado por 1 kg de leite condensado.

Exercício 8

No rótulo de um balde de sorvete, encontra-se a informação de que seu conteúdo é de 3 litros. O balde tem forma cilíndrica com 16 cm de diâmetro. Calcule quanto deve medir sua altura.

Exercício 9

O doce de leite é vendido, em um supermercado, em dois tipos de embalagem:

- um tijolo, cujas medidas são 8 cm × 10 cm × 9 cm e que custa R$ 4,80.
- pequenas unidades, medindo 1,5 cm × 3 cm × 1,0 cm

Por quanto deve ser vendida cada uma das pequenas unidades, de modo a não haver vantagem de uma embalagem sobre a outra?

AULA

65

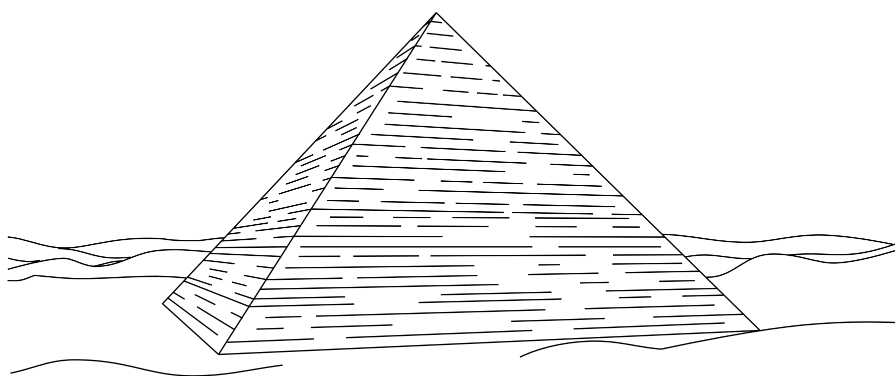
Pirâmide, cone e esfera

Introdução

Dando continuidade à unidade de Geometria Espacial, nesta aula vamos estudar mais três dos sólidos geométricos: a pirâmide, o cone e a esfera.

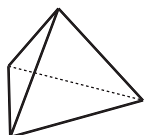
Nossa aula

A pirâmide

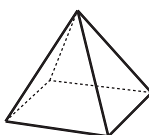


A pirâmide é considerada um dos mais antigos sólidos geométricos construídos pelo homem. Uma das mais famosas é a pirâmide de Quéops, construída em 2.500 a.C., com 150 m de altura, aproximadamente – o que pode ser comparado a um prédio de 50 andares.

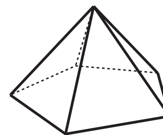
Quando pensamos numa pirâmide, vem-nos à cabeça a imagem da pirâmide egípcia, cuja base é um quadrado. Contudo, o conceito geométrico de pirâmide é um pouco mais amplo: sua base pode ser formada por qualquer polígono. As figuras abaixo representam pirâmides:



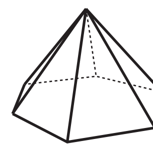
Pirâmide Triângular (tetraedro)



Pirâmide quadrangular



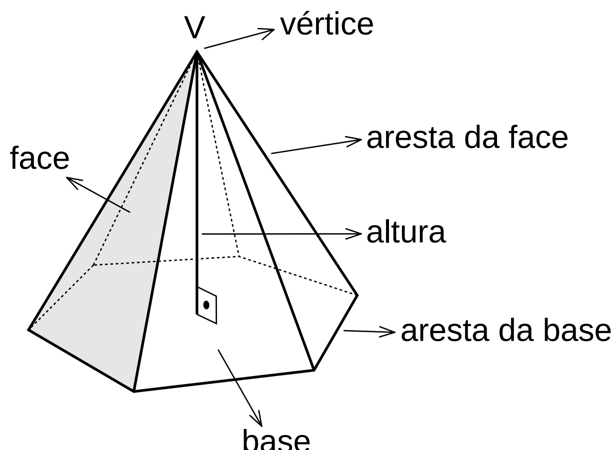
Pirâmide Pentagonal



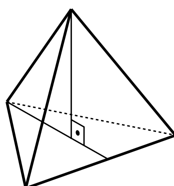
Pirâmide hexagonal

Algumas definições:

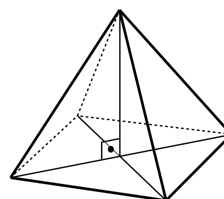
Uma pirâmide é um sólido geométrico, cuja base é um polígono e cujas faces laterais são triângulos que possuem um vértice comum.



- A altura da pirâmide é um segmento perpendicular à base e que passa por V (vértice).
- Uma pirâmide é regular se a base é um polígono regular e as faces são triângulos iguais. Com isso o pé da altura é o centro do polígono da base, como mostram as figuras abaixo.



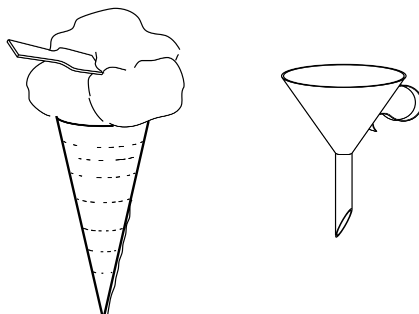
Pirâmide Triângular Regular
(a base é um triângulo equilátero)



Pirâmide Quadrangular Regular
(a base é um quadrado)

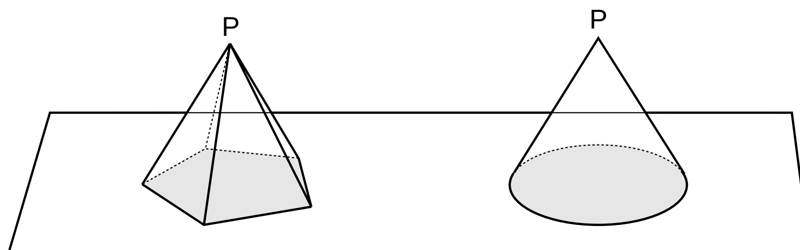
O cone

Um funil ou uma casquinha de sorvete dão a idéia do sólido geométrico chamado ***cone***. Um cone (mais precisamente, um cone circular reto) é o sólido obtido da seguinte maneira: tome uma região do plano limitado por uma circunferência e, de um ponto **P** situado exatamente acima do centro da circunferência, trace os segmentos de reta unindo **P** aos pontos da circunferência do círculo.



A pirâmide e o cone

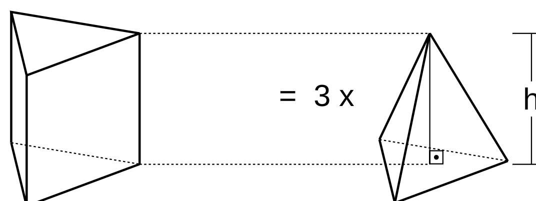
Há muita semelhança entre o cone e a pirâmide. A diferença é que a base do cone é delimitada por um círculo, em vez de um polígono. Ambos podem ser imaginados como um conjunto de segmentos que ligam um ponto P, exterior ao plano, a uma região do plano, como mostra a figura abaixo.



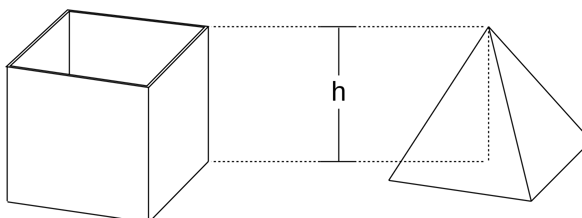
O volume da pirâmide e do cone

Na Aula 63, você viu que o volume do prisma é igual ao produto da sua altura pela área da base.

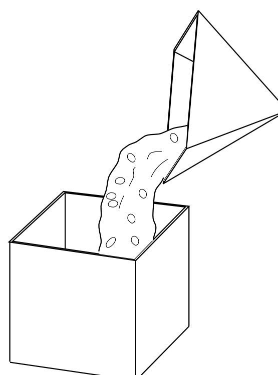
É possível mostrar que, se tivermos um prisma e uma pirâmide de mesma base e mesma altura, o volume do prisma será o triplo do volume da pirâmide.



Você pode comprovar esse fato, experimentalmente. Para isso, basta construir, em cartolina, um prisma e uma pirâmide de mesma base e mesma altura.



Usando areia ou grãos de arroz, encha a pirâmide e despeje seu conteúdo no prisma.

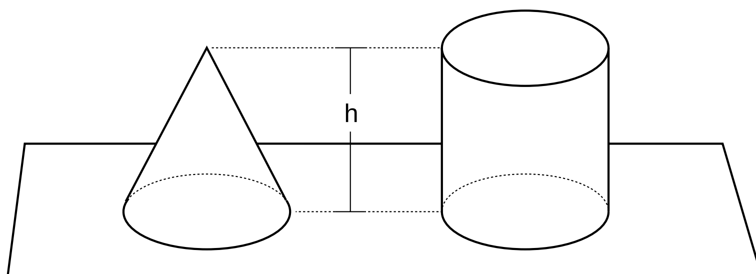


Você vai observar que será necessário despejar cerca de ***três*** vezes o conteúdo da pirâmide no interior do prisma, para enchê-lo por completo.

Com isso, concluímos que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma:

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A \times h$ onde A representa a área da base e h, sua altura.

Para determinar o volume do cone, podemos proceder de forma análoga. Para isso, construa, em cartolina, um cone e um cilindro de mesma base e mesma altura.



Enchendo o cone com areia, será necessário despejar ***três*** vezes seu conteúdo no interior do cilindro, para enchê-lo.

Portanto, podemos concluir que o volume do cone é a terça parte do volume do cilindro, de mesma base e mesma altura

$V_{cone} = \frac{1}{3} A \times h$ onde A representa a área da base e h, sua altura.

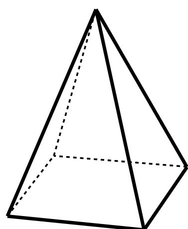
Assim, para toda pirâmide e para todo cone é válida a fórmula:

$$V = \frac{A\ ´\ h}{3}$$

Vamos ver alguns exemplos:

EXEMPLO 1

Qual o volume de uma pirâmide quadrangular, cuja altura mede 5 cm e a aresta da base, 3 cm?



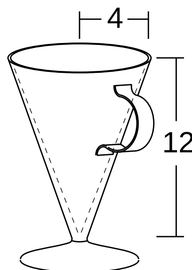
$A_{base} = 3^2 = 9\ cm^2$

$V = \frac{1}{3} \times 9 \times 5 = 15\ cm^3$

O volume dessa pirâmide é de 15 cm^3

EXEMPLO 2

Um copo de caldo de cana, no formato de um cone, tem 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Qual a capacidade desse copo?

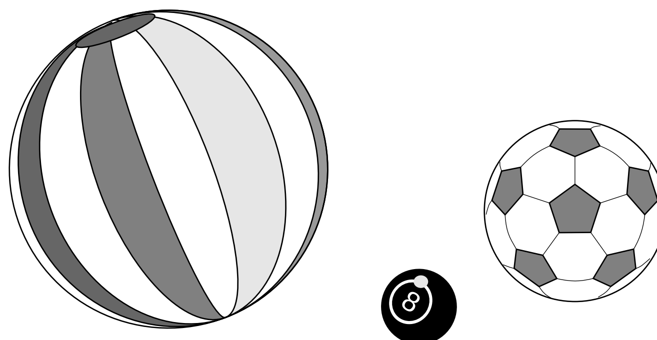


$A_{base} = \pi R^2 = 3{,}14 \times 16 = 50{,}24\ cm^2$

$V = \frac{1}{3} \times 50{,}24 \times 12 = 200{,}96\ cm^3$

Como $1\ cm^3 = 1\ m\ell$, concluímos que a capacidade do copo é de aproximadamente $200\ m\ell$.

A esfera

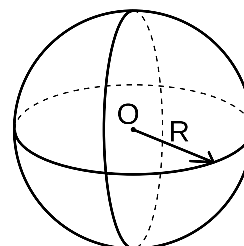


Sem dúvida alguma, a esfera é considerada um dos sólidos mais curiosos que existem, e sua forma tem sido extremamente útil ao homem.

É possível que os homens tenham criado a forma esférica a partir da observação e do estudo dos corpos celestes, como o Sol e a Lua. Ou da verificação de fenômenos como a sombra da Terra projetada sobre a Lua. O formato de nosso planeta foi reproduzido em diversos objetos até chegar às bolas de futebol, vôlei e outros.

Matematicamente, a esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a um ponto 0 é igual a uma distância R dada.

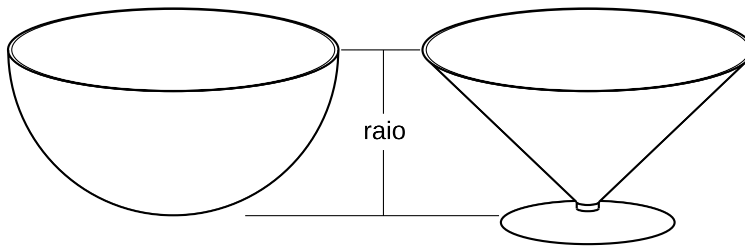
0 ⇒ centro da esfera
R ⇒ Raio



O volume da esfera

A fórmula que dá o volume da esfera foi demonstrada pelo matemático grego Arquimedes, no século III a.C., em seu livro sobre a esfera e o cilindro.

Usando o método de exaustão, inventado por outro matemático grego chamado Eudoxo, Arquimedes provou que o volume de uma esfera é igual a quatro vezes o volume do cone, cujo raio é o raio da esfera e cuja altura é também o raio da esfera. Para tornar mais clara essa idéia, imagine a experiência que poderia ser feita com as vasilhas da ilustração abaixo. Observe que uma é semi-esférica e a outra é cônica, lembrando uma taça.



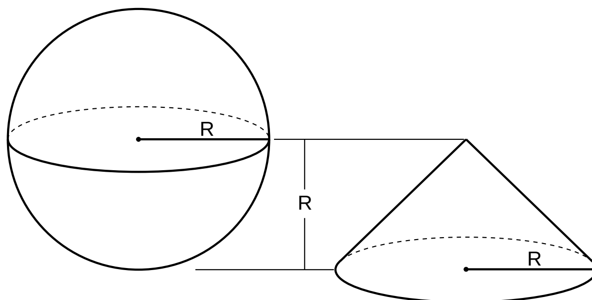
Elas têm a mesma boca, isto é, o raio da semi-esfera é igual ao raio da circunferência do cone. Além disso, elas têm a mesma altura, isto é, a altura do cone é igual ao raio da semi-esfera.

Despejando duas vezes o conteúdo da vasilha cônica no interior da vasilha semi-esférica, conseguimos enchê-la completamente (figura abaixo). Isso significa que a capacidade da semi-esfera é o dobro da capacidade do cone. Portanto, a capacidade da esfera será quatro vezes a capacidade do cone.

Não é fácil fazer essa experiência. Onde encontrar uma vasilha esférica e uma vasilha cônica? Entretanto, pela descrição da experiência, você pode compreender a idéia de Arquimedes. Como dissemos, o grande matemático grego demonstrou, por dedução, que o volume da esfera é quatro vezes o volume do cone, que tem o raio da esfera e cuja altura é o raio da esfera.

Posteriormente, outros matemáticos criaram novos raciocínios para calcular o volume da esfera. Em alguns livros de 2º grau, você pode encontrar uma dedução para a fórmula do volume da esfera.

Vamos retomar a afirmação de Arquimedes. Observe a figura:



$$\text{Volume do cone} = \frac{A \text{ ´ } h}{3} = \frac{pR^2 \text{ ´ } R}{3} = \frac{pR^3}{3}$$

Logo, o volume da esfera é: $V = \frac{4pR^3}{3}$

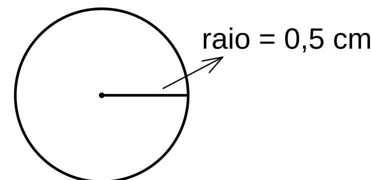
EXEMPLO 3

Qual a quantidade de chumbo necessária para a confecção de 100 bolinhas esféricas, maciças, de 1 cm de diâmetro?

Raio = 0,5 cm

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times (0{,}5)^3 =$

$\cong 0{,}523\ cm^3$



São necessários $0{,}523\ cm^3$, que é o mesmo que 0,523 mℓ de chumbo.

Exercícios

Exercício 1

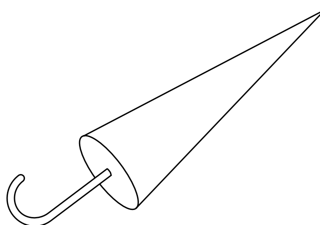
Qual é o volume de uma pirâmide quadrangular de altura 9 cm e cujo perímetro da base é 20 cm?

Exercício 2

Qual é o volume de um cone de 12 cm de altura e com diâmetro da base medindo 10 cm?

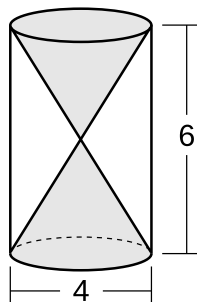
Exercício 3

Qual a quantidade de chocolate necessária para a fabricação de 1.000 pirulitos em forma de guarda-chuva, de 5 cm de altura e 2 cm de diâmetro?



Exercício 4

A ampulheta da figura consiste em dois cones idênticos, dentro de um cilindro. A altura do cilindro é de 6 cm e sua base tem 4 cm de diâmetro.



a) Determine o volume de areia necessário para encher o cone.
b) Determine a quantidade de espaço vazio entre os cones e o cilindro.

Exercício 5

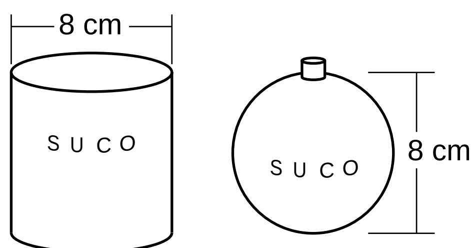
O raio da Terra é de aproximadamente 6.400 km. Considerando que sua forma seja uma esfera, determine o volume do planeta Terra.

Exercício 6

O diâmetro da Lua é, aproximadamente, $\frac{1}{4}$ do da Terra. Determine o volume da Lua.

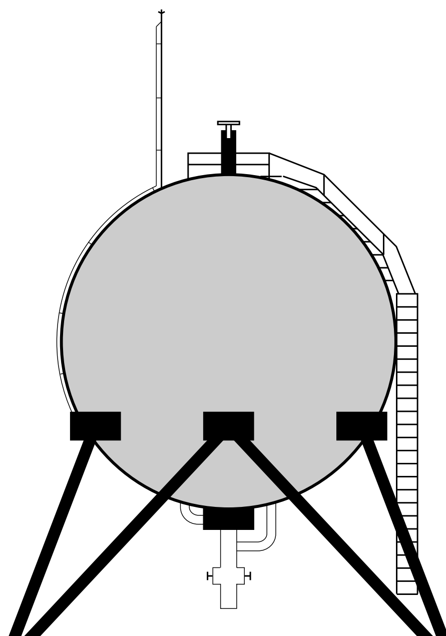
Exercício 7

Uma fábrica de suco de laranja confeccionou suas embalagens em dois formatos: uma esférica de 8 cm de diâmetro e outra cilíndrica. Sabendo que as duas embalagens têm a mesma altura e a mesma largura, calcule seus volumes.



Exercício 8

Numa indústria química, deseja-se instalar um reservatório esférico para armazenar determinado gás. A capacidade do reservatório deve ser de 33,5 m^3. Qual deve ser, aproximadamente, o raio desse reservatório?



AULA

66

Sólidos semelhantes

Introdução

Um problema matemático, que despertou curiosidade e mobilizou inúmeros cidadãos na Grécia Antiga, foi o da ***duplicação do cubo***. Ou seja, dado um cubo de aresta **a**, qual deverá ser a medida da aresta de outro cubo que tenha o dobro do volume do primeiro?

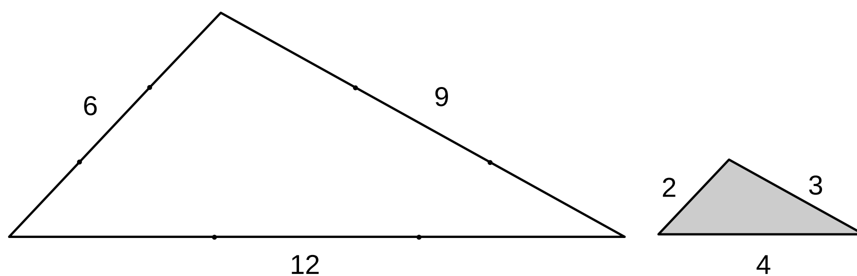
Hoje em dia, esse problema não apresenta grandes dificuldades. Será que você é capaz de resolvê-lo? Caso não consiga, não desanime! Leia a aula e, ao final, volte e tente novamente!

Nossa aula

Nesta aula, vamos estudar a relação que existe entre as áreas e os volumes de figuras semelhantes. Mas, antes de entrarmos no tema desta aula, vamos recordar o conceito de semelhança visto na Aula 21.

Recordando semelhança

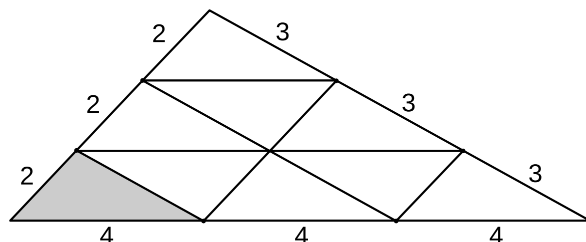
Abaixo estão dois triângulos semelhantes.



Podemos dizer que duas figuras são semelhantes quando uma delas é ***ampliação*** ou ***redução*** da outra. Os dois triângulos da figura são semelhantes. Observe que seus ângulos são iguais e seus lados são proporcionais, na mesma razão, isto é:

$$\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$$

O número 3 é chamado de ***razão de semelhança*** e geralmente é representado pela letra **k**. No exemplo anterior, k = 3.

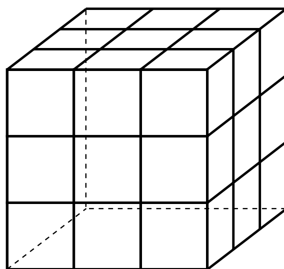


Observe ainda que são necessários $3^2 = 9$ triângulos menores para cobrir totalmente o maior. É só contar!

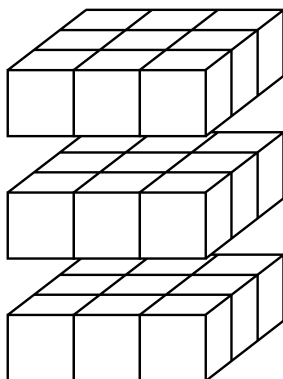
Podemos concluir que, se as dimensões de uma figura são o triplo da outra, então, a área dessa figura será igual a $3^2 = 9$ vezes a área da outra.

O cubo mágico

Há um quebra cabeça bastante conhecido, chamado "cubo mágico", que consiste em um cubo dividido em diversos cubos menores.



Observando melhor, vemos que cada aresta desse cubo foi dividida em três partes iguais. Se você olhar atentamente, verá que cada face ficou dividida em nove quadrados. Ou seja: dividindo cada aresta em três partes iguais, a área de cada face ficou dividida em $3^2 = 9$ quadrados menores. Você também pode observar que o cubo ficou dividido em cubinhos menores, cujas arestas são iguais à terça parte da aresta do cubo inicial. Quantos cubinhos caberão no cubo maior?



Observe que podemos dividir o cubo em três placas, sendo cada placa formada de $3^2 = 9$ cubinhos. Assim, teremos $3 \cdot 3^2 = 3^3 = 27$ cubinhos.

Isso nos permite concluir que, se a razão entre as medidas das arestas dos dois cubos (menor e maior) é k = 3, a razão entre suas áreas é $k^2 = 3^2 = 9$ e a razão entre seus volumes é $k^3 = 3^3 = 27$.

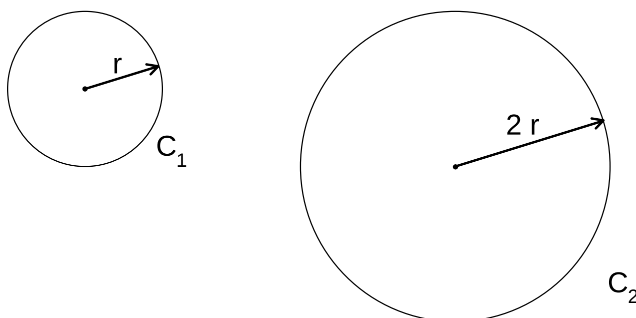
De maneira geral, se duas figuras são semelhantes, então, as medidas de uma valem ***k vezes*** as medidas da outra, onde o número **k** representa a razão de semelhança das duas figuras (ou dois sólidos). Então, a área de uma valerá $\mathbf{k}^2$ vezes a área da outra e o volume de uma valerá $\mathbf{k}^3$ vezes o volume da outra. Esses fatos podem ser representados no quadro abaixo:

	FIGURAS SEMELHANTES	
Razão entre comprimentos	Razão entre áreas	Razão entre volumes
k	$\mathbf{k}^2$	$\mathbf{k}^3$

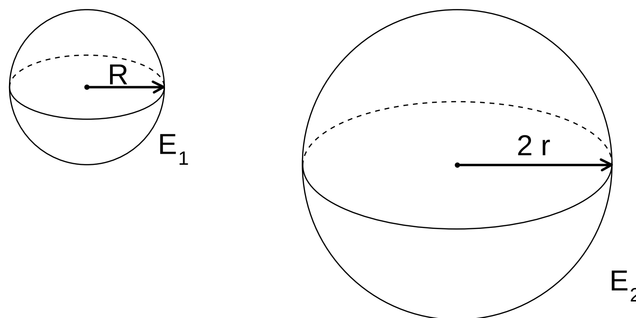
Vamos ver alguns exemplos:

EXEMPLO 1

Você já sabe que, se dobrarmos o raio do círculo, a área aumentará quatro vezes.



Mas, o que acontece com o volume da esfera, se dobrarmos seu raio?



$$V_1 = \frac{4pR^3}{3}$$

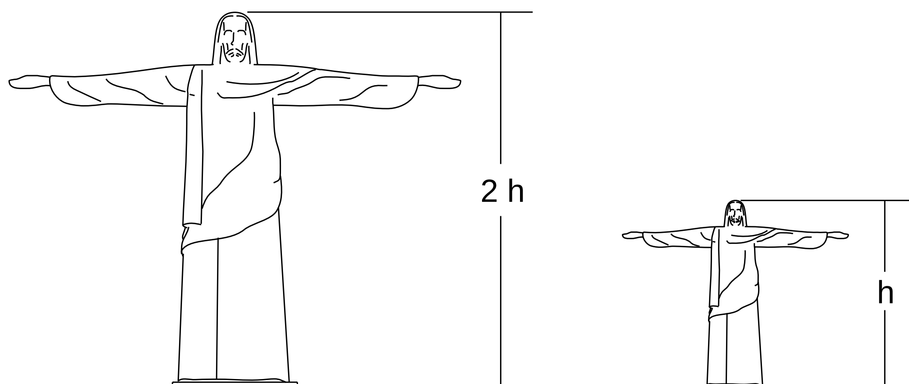
$$V_2 = \frac{4p(2R)^3}{3} = \frac{4p \cdot 8 \cdot R^3}{3}$$

$$V_2 = 8\left(\frac{4pR^3}{3}\right)$$

Comparando V_1 e V_2, temos que V_2 é 8 vezes maior que V_1.

EXEMPLO 2

Uma loja vende miniaturas do Cristo Redentor confeccionadas em madeira. São dois tamanhos das miniaturas, sendo que uma delas tem a metade da altura da outra.



Sabendo que o preço é proporcional ao volume de madeira gasto na confecção das miniaturas, qual deve ser o preço da maior, se a menor custa R$ 5,00?

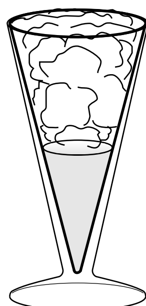
Solução:

Como as duas imagens são semelhantes entre si, a razão entre seus comprimentos é constante e igual a k = 2 (razão da maior para a menor). Logo, a razão entre seus volumes valerá $k^3 = 2^3 = 8$.

Como o preço deve ser proporcional ao volume, e o volume da estatueta maior é oito vezes o volume da menor, seu preço deve ser R$ 5,00 x 8 = R$ 40,00.

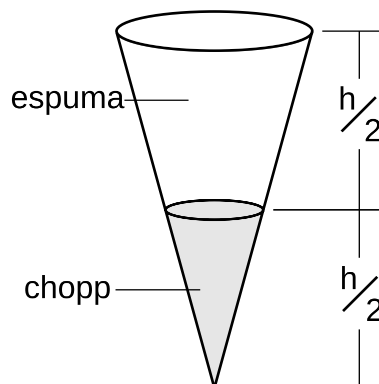
A Matemática e o copo de chope

Seu José adora tomar um chopinho com os amigos nos fins de semana. Ele costuma pedir um chope na pressão. O garçon lhe serve uma tulipa, cujo interior tem a forma praticamente cônica, com chope até à metade da altura e o resto sendo ocupado por espuma.



Qual a razão entre a quantidade de chope e a quantidade de espuma que vem na tulipa de seu José?

Para resolver esse problema, seu José considerou a parte interna da tulipa como sendo um cone perfeito.



Daí, ele reparou que a parte de baixo, ocupada pelo chope, também é um cone. E mais: é um cone semelhante ao cone inteiro. A razão da semelhança é $k = \frac{1}{2}$, pois as medidas do cone da parte de baixo equivalem à metade das medidas do cone inteiro.

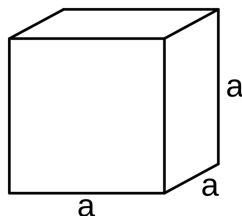
Então a razão entre seus volumes é $k^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Ou seja, o volume de chope na tulipa, corresponde a apenas $\frac{1}{8}$ do que ela pode conter!

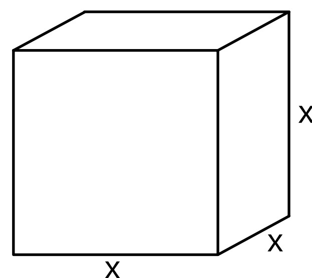
Foi aí que seu José levou um susto: se $\frac{1}{8}$ é de chope, então $\frac{7}{8}$ $(1 - \frac{1}{8})$ são de espuma!

Assim, temos $\frac{1}{8}$ de chope e $\frac{7}{8}$ de espuma. Logo, a razão é de 1 # 7 (1 para 7).

O problema da duplicação do cubo

Vamos resolver o problema proposto na introdução desta aula.





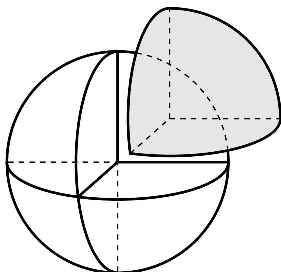
Devemos ter: $V_2 = 2\,V_1$

Portanto: $x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2a^3} \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{2}$ é um número irracional e vale, aproximadamente, 1,25991. Você pode comprovar esse resultado com uma calculadora científica que tenha a tecla $\sqrt[3]{\ }$ ou, experimentalmente, isto é, multiplicando $1{,}259 \times 1{,}259 \times 1{,}259$.

Exercício 1

Uma pessoa constrói uma bola esférica de 8 cm de diâmetro, utilizando massa de modelar. Em seguida, ela corta essa esfera em oito partes iguais (veja a figura).



De cada parte ela constrói uma nova esfera. Qual a medida do diâmetro dessas novas esferas?

Exercício 2

Um cubo teve suas arestas aumentadas de 20% do seu tamanho. Qual foi o percentual de aumento do volume desse cubo?

Exercício 3

A maquete de uma praça é feita na escala 1:50. Se a praça tem 6.000 m^2 de área, qual será a área da maquete?

Exercício 4

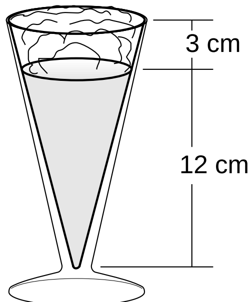
Pai e filho possuem corpos de formas semelhantes. Porém, enquanto o pai mede 1,75 m, seu filho mede 1,40 m. Se o filho pesa 40 kg, qual deverá ser, aproximadamente, o peso do pai?

Exercício 5

Uma pessoa vai revestir o chão do quarto e da sala de sua casa, com um mesmo tipo de lajota. As medidas da sala valem exatamente o dobro das medidas do quarto. Se ela necessita de seis caixas de lajota para revestir o quarto, quantas caixas serão necessárias para revestir a sala?

Exercício 6

Uma tulipa de chope tem 15 cm de profundidade e sua capacidade é de 300 ml. O chope (bem tirado, isto é, na pressão) é servido com 3 cm de espuma. Calcule a quantidade de chope contido na tulipa?



Exercício 7

Você já estudou, em Química, que, nos átomos, os elétrons giram em torno do núcleo a uma distância de 104 vezes o raio do núcleo. Uma pessoa resolveu montar um modelo de átomo, escolhendo, para representar seu núcleo, uma esfera de isopor com 1 cm de raio. A que distância dessa esfera ela deverá colocar os elétrons?

Exercício 8

Um triângulo teve seus lados aumentados de 30%, obtendo-se um novo triângulo semelhante ao primeiro.

a) Qual a razão de semelhança?

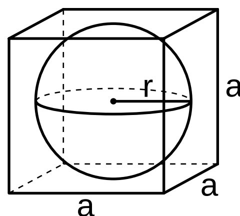
b) Qual foi o percentual de aumento de sua área?

Exercício 9

No interior de uma caixa cúbica de aresta **a**, colocamos uma esfera de diâmetro **a**. A seguir, fechamos a caixa. Essa esfera cabe justinho no interior da caixa. Uma esfera, um pouco maior, já não entra na caixa. Dizemos, em Geometria, que a esfera está inscrita na caixa.

a) Que relação existe entre os volumes do cubo e da esfera?

b) Que relação existe entre as áreas de suas superfícies?



Problemas de volumes

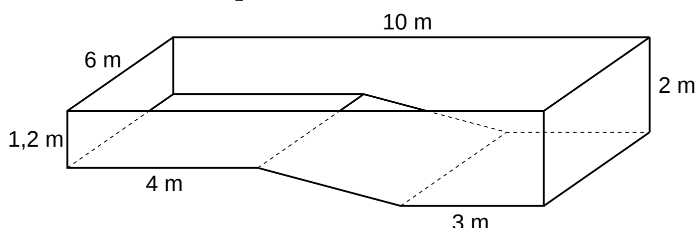
Introdução

Nesta aula, vamos resolver problemas de volumes. Com isso, teremos oportunidade de recordar os principais sólidos: o prisma, o cilindro, a pirâmide, o cone e a esfera.

Nossa aula

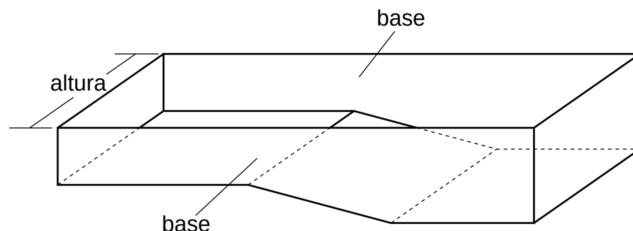
EXEMPLO 1

Na figura abaixo, vemos uma piscina de 10 m de comprimento por 6 m de largura. Existe uma parte rasa, com 1,20 m de profundidade, uma descida e uma parte funda, com 2 m de profundidade. Com as medidas que aparecem no desenho, calcule o volume da piscina.



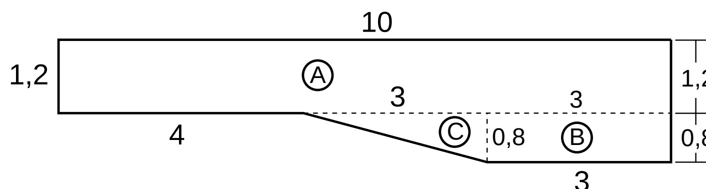
Solução:

Inicialmente, podemos constatar que essa piscina é um ***prisma***. Por quê? Vamos recordar: todo prisma é formado por duas figuras paralelas e iguais chamadas ***bases*** e, por arestas paralelas e iguais, que ligam essas bases. Observe que a nossa piscina está de acordo com essa definição. A figura que aparece na frente é uma das bases e qualquer uma das arestas de comprimento 6 m é a altura, porque elas são perpendiculares às bases.



As duas bases são paralelas e iguais. A altura é perpendicular às bases.

O volume do prisma é igual à área de uma das bases multiplicada pela altura. Como, no nosso caso, a altura é igual a 6 m, só nos falta calcular a área de uma das bases. Para isso, vamos dividi-la em figuras menores, como mostra o desenho abaixo.



A base do nosso prisma foi dividida em três partes: um retângulo (A), um retângulo menor (B) e um triângulo retângulo (C). Com as medidas que estão no desenho, poderemos facilmente calcular as áreas das três partes:

$S_A = 10 \times 1,2 = 12\ m^2$

$S_B = 3 \times 0,8 = 2,4\ m^2$

$S_C = \dfrac{3 \times 0,8}{2} = 1,2\ m^2$

A soma das áreas das três partes é $12 + 2,4 + 1,2 = 15,6\ m^2$. Essa é a área da base do nosso prisma. Como o volume é o produto da área da base pela altura (6 m), temos que o volume da piscina é:

$$15,6 \times 6 = 93,6\ m^3$$

Concluímos, então, que cabem dentro dessa piscina 93,6 m^3 de água, ou seja, 93 600 litros.

EXEMPLO 2

Na construção de um prédio, para levar a água da cisterna até à caixa superior, foram usados canos de ferro de duas polegadas. Considere os seguintes dados:

Comprimento de um cano = 6 m

Diâmetro externo = 5 cm

Diâmetro interno = 4,4 cm

Densidade do ferro = 7,8 g/cm^3

Quanto pesa um desses canos?

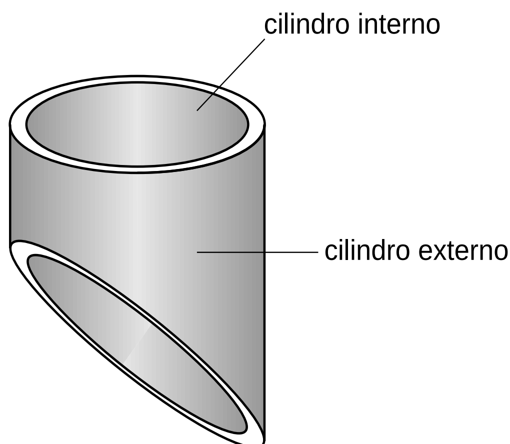
Solução:

Vamos, inicialmente, recordar o significado da palavra ***densidade***. Se um objeto é feito do mesmo material, a densidade desse material é um número que, multiplicado pelo volume desse objeto, dá a sua massa.

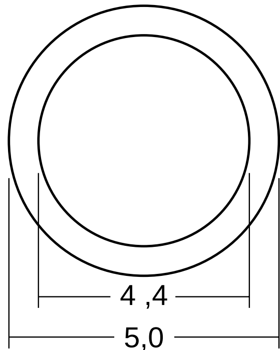
Massa = (densidade) · (volume)

Com o volume em centímetros cúbicos, a massa é dada em gramas. Logo, para determinarmos a massa de um objeto, precisamos saber a densidade do material de que ele é feito e também seu volume. Em nosso caso, temos um cano de ferro cuja densidade é 7,8. Portanto, calculando o volume de ferro, poderemos determinar sua massa.

O cano tem a forma de um ***cilindro***. Mas, como todo cano, ele tem um espaço vazio no interior que também tem a forma de outro cilindro. Logo, o volume de ferro que estamos procurando é a diferença entre os volumes de dois cilindros: um externo, de diâmetro 5,0 cm e um interno, com diâmetro 4,4 cm.



A altura dos dois cilindros é 600 cm, ou seja, o comprimento do cano e seus raios são R = 2,5 cm e r = 2,2 cm.



$$R = \frac{5,0}{2} = 2,5\text{cm}$$

$$r = \frac{4,4}{2} = 2,2\text{cm}$$

Lembrando que o volume de um cilindro é igual à área da base (πR^2) multiplicada pela altura (h), temos:

Volume de ferro = (cilindro externo) – (cilindro interno)

$$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

$$= 3,14 \times 2,5^2 \times 600 - 3,14 \times 2,2^2 \times 600$$

$$= 2.656,44 \text{ cm}^3$$

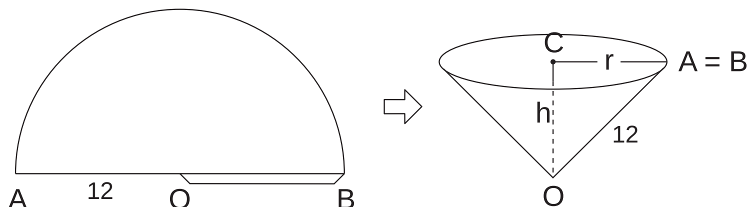
Esse é o volume de ferro que há em um cano. Multiplicando esse valor por 7,8, que é a densidade do ferro, calcularemos sua massa.

Massa do ferro = 7,8 × 2 656,44 ≅ 20.720 g = 20,720 kg.

Aí está. Com os dados que apresentamos, calculamos que um cano de ferro de duas polegadas, com 6 metros de comprimento, pesa 20 quilos e 720 gramas, aproximadamente.

EXEMPLO 3

A figura abaixo mostra um semicírculo de papel com 12 cm de raio. Juntando os raios OA e OB fazemos um cone. Qual é o volume desse cone?



Solução:

Vamos recordar que o perímetro de uma circunferência é igual a $2\pi R$. Logo, o comprimento de metade de uma circunferência é igual a πR. Quando juntamos os pontos A e B do papel, a semicircunferência de raio 12 cm transforma-se em uma circunferência completa de raio r. Temos então:

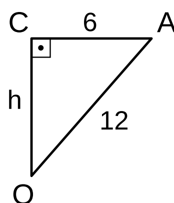
$$\pi \cdot 12 = 2\pi r$$

ou seja,

$$12 = 2r$$

$$r = 6 \text{ cm}$$

O cone de papel tem, na base, uma circunferência de centro C e raio r = 6 cm. Para calcular a altura do cone, aplicamos o Teorema de Pitágoras, no triângulo OCA:



$$12^2=6^2+h^2$$

$$144=36+h^2$$

$$108=h^2$$

$h = \sqrt{108}$ @ 10,39cm

Como o volume do cone é a terça parte do produto da área da base pela altura temos:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

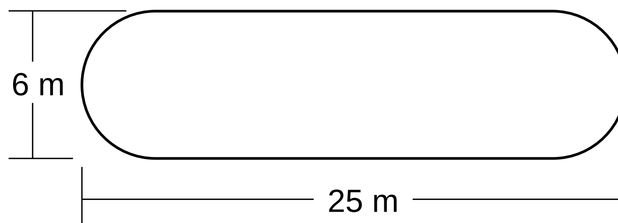
$$V = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 6^2 \times 10{,}39$$

$$V \cong 391{,}5 \text{ cm}^3$$

Concluímos, então, que, com um semicírculo de papel com 12 cm de raio, conseguimos formar um cone de, aproximadamente, 391,5 cm^3 de volume.

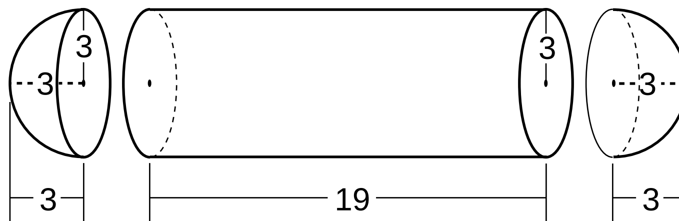
EXEMPLO 4

Um reservatório de gás tem a forma de um cilindro com as extremidades esféricas, como mostra a figura abaixo. Se o comprimento total do reservatório é de 25 m e seu diâmetro é de 6 m, quantos metros cúbicos de gás ele poderá conter?



Solução:

Vamos dividir o reservatório em três partes: uma meia esfera no início, um cilindro no meio e uma outra meia esfera no final. O diâmetro é 6 m, logo, o raio, tanto do cilindro como das meias esferas, é igual a 3 m.



Concluímos, então, que a altura do cilindro (seu comprimento) é igual a 25 – 3 – 3 = 19 m. Para calcular o volume total, devemos somar os volumes das três partes. Mas, como as duas meias esferas formam juntas uma esfera inteira, temos que:

Volume do reservatório = (cilindro) + (esfera)

Mas, se o volume do cilindro é $\pi R^2 h$ e o da esfera é $\frac{4}{3}\pi R^3$, temos:

Volume do reservatório = $\pi R^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3$

$= \pi 3^2 \cdot 19 + \frac{4}{3}\pi 3^3$

$= \pi 3^2 \cdot 19 + 4\pi 3^2$

$= 3{,}14 \cdot 9 \cdot 19 + 4 \cdot 3{,}14 \cdot 9$

$= 536{,}94 + 113{,}04$

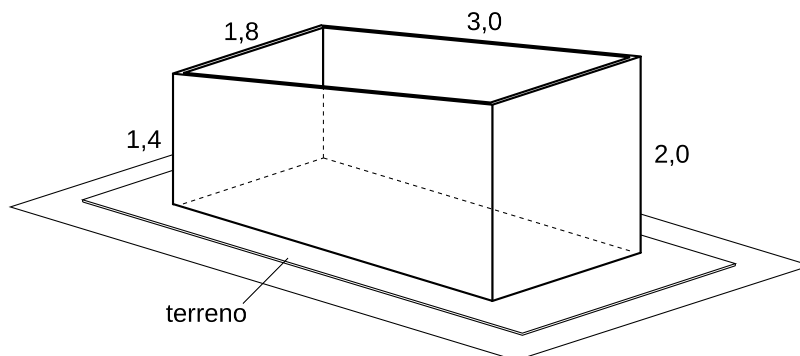
$= 649{,}98 \text{ m}^3$

Concluímos, então, que nesse reservatório cabem, aproximadamente, 650 m^3 de gás.

Exercícios

Exercício 1

Uma cisterna foi feita em terreno inclinado. No final da construção, ela ficou com 3 m de comprimento, 1,8 m de largura, 1,4 m de profundidade, na parte rasa, e 2 m, na parte funda, como mostra o desenho abaixo. Qual é o volume dessa cisterna?



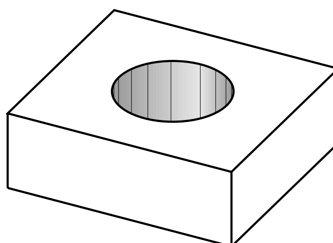
Sugestão: Observe que a cisterna é um prisma. Use o mesmo raciocínio do Exemplo 1 desta aula.

Exercício 2

Uma peça de madeira é um prisma de altura 12 cm, tendo como base um quadrado com 20 cm de lado. No centro da peça, existe um furo cilíndrico de 7 cm de raio.

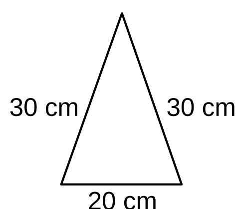
a) Qual é o volume da peça?

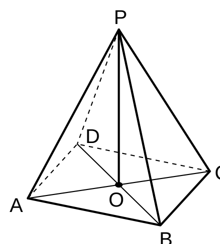
b) Se a densidade da madeira é 0,93 g/m^3, quanto pesa essa peça?



Exercício 3

Usando quatro triângulos isósceles iguais ao da figura abaixo, forma-se uma pirâmide de base quadrada. Qual é o volume dessa pirâmide?





Sugestão: A base da pirâmide é o quadrado ABCD de 20 cm de lado. Calcule sua diagonal AC e repare que OA é a metade dessa diagonal. Para calcular a altura PO da pirâmide, use o Teorema de Pitágoras no triângulo AOP.

Exercício 4

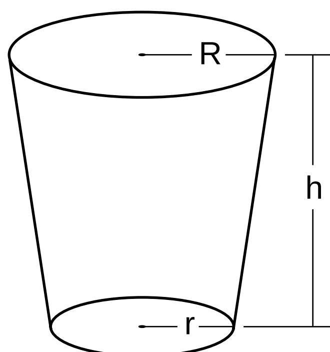
Um feirante, para pesar meio quilo em sua balança de pratos, usa um cilindro de ferro (densidade 7,8) com 4 cm de diâmetro e 5 cm de altura. Verifique se essa peça pesa, realmente, meio quilo.

Exercício 5

Considere o cano de ferro de duas polegadas do Exemplo 2 da nossa aula. Com qual comprimento esse cano pesará 5 kg?

Exercício 6

Um objeto que tem bases circulares e paralelas, mas não do mesmo tamanho, chama-se um tronco de cone.



O volume de um tronco de cone é dado por:

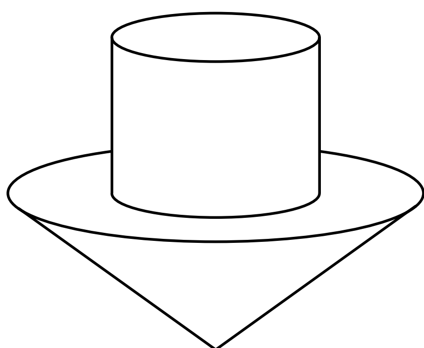
$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

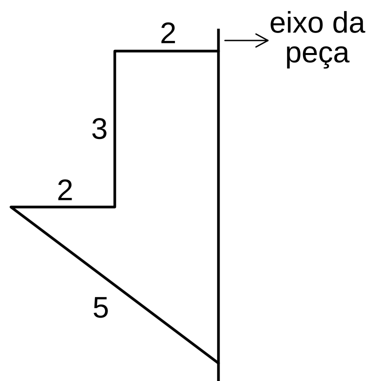
onde **R** e **r** são os raios das duas bases e **h** é sua altura.

Calcule o volume de um recipiente, com a forma de um tronco de cone, sabendo que sua altura mede 16 cm e que suas bases têm diâmetros 8 cm e 6 cm.

Exercício 7

A figura abaixo mostra a peça de uma máquina. Calcule seu volume a partir das medidas em centímetros que aparecem no perfil dessa peça.





AULA

68

Revisão I

Introdução

Vamos iniciar, nesta aula, a revisão do nosso curso do 2º grau. Ela será feita em forma de exemplos que vão abordar de novo os principais conteúdos. Para aproveitar bem a revisão, leia atentamente o enunciado de cada problema e tente resolvê-lo. Só depois de pensar algum tempo, você deve ver a solução. Lembre-se de que as idéias nem sempre nos ocorrem imediatamente.

Nesta primeira parte da revisão, vamos tratar do equacionamento de problemas, do método de coordenadas, do Teorema de Pitágoras e das áreas. Bom proveito!

Nossa aula

EXEMPLO 1

Em uma sala, há 100 pessoas, sendo que 26 delas usam óculos. Sabe-se que 20% dos homens e 40% das mulheres desse grupo usam óculos. Quantos homens há na sala?

Solução:

Vamos, inicialmente, escolher nossas incógnitas:

x = número de homens.
y = número de mulheres.

Como o total de pessoas é 100, temos a 1ª equação:

$$\boxed{x + y = 100}$$

Agora, vamos somar as pessoas que usam óculos:

$$20\% \text{ de } x = \frac{20}{100} \cdot x = 0{,}2x$$

$$40\% \text{ de } y = \frac{40}{100} \cdot y = 0{,}4x$$

Como é 26 o total das pessoas de óculos, temos a 2ª equação:

$$0{,}2x + 0{,}4y = 26$$

Para melhorar o aspecto dessa equação, vamos multiplicá-la por 10:

$$2x + 4y = 260$$

Simplificando por 2, temos:

$$x + 2y = 130$$

Reunimos, então, as equações num sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ x + 2y &= 130 \end{aligned}$$

Para resolver, vamos trocar os sinais da 1ª equação e depois somar:

$$\begin{aligned} -x - y &= -100 \\ x + 2y &= 130 \\ y &= 30 \end{aligned}$$

Concluímos que há 30 mulheres na sala. Logo, os homens são 70.

EXEMPLO 2 

Dois caminhões, um pesado e um leve, fazem o mesmo percurso de 360 km entre duas cidades.

O caminhão pesado saiu às 12 horas da cidade A, viajou com velocidade constante de 40 km/h e chegou à cidade B.

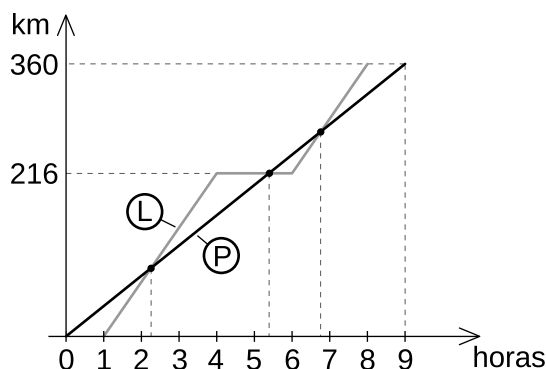
O caminhão leve saiu da cidade A à 1 hora da tarde e andou por 3 horas, com velocidade de 72 km/h. Ficou 2 horas parado por causa de um problema e, depois, terminou seu percurso com a mesma velocidade do início. Em que momento os caminhões se encontraram?

Sugestão: Faça um gráfico do percurso dos dois caminhões, colocando o tempo, no eixo dos **x** e os quilômetros, no eixo dos **y**. Os pontos de interseção representam os encontros.

Solução:

Façamos um gráfico da situação que o problema descreve. O caminhão pesado (P) andou 360 km, em 9 horas, com velocidade constante. Então, seu gráfico é uma reta que une a origem (0; 0) ao ponto de chegada (0; 360).

O caminhão leve saiu 1 hora depois e andou 3 horas, a uma velocidade de 72 km/h. Logo, ele percorreu $3 \times 72 = 216$ km. A primeira parte do percurso do caminhão leve é, então, uma reta ligando o ponto de partida (1; 0) ao ponto 0 de parada (4; 216). Sabemos então que às 4 horas da tarde o caminhão leve, que tinha percorrido 216 km, enguiçou. Logo, das 4 até às 6 horas, o gráfico é um segmento de reta horizontal. Depois, o caminhão leve percorreu o restante da distância ($360 - 216 = 144$ km) com a mesma velocidade de 72 km/h. Logo, como 144 # 72= 2, ele gastou 2 horas na parte final do percurso, e o gráfico é uma reta, ligando o ponto (6; 216) ao ponto de chegada (8; 360).



Percebemos que os dois gráficos possuem três pontos de interseção. Isso quer dizer que os dois caminhões se encontraram por três vezes.

Observando o desenho com atenção, vemos que:

a) O primeiro encontro ocorreu logo depois das 2 horas da tarde, quando o caminhão leve, por ser mais veloz, ultrapassou o pesado.

b) O segundo encontro ocorreu aproximadamente às 5 e meia da tarde, quando o caminhão pesado ultrapassou o leve, que estava enguiçado.

c) O terceiro encontro se deu um pouco antes das 7 horas da noite, quando o caminhão leve novamente ultrapassou o pesado.

Repare que podemos ver, no gráfico, a hora aproximada em que ocorreram os encontros. Para determinar, com maior precisão, os momentos em que os encontros ocorreram, precisamos obter as equações das duas retas. Vamos, então, recordar a equação que aprendemos na Aula 45.

Pontos: $(\mathbf{x}_1; y_1)$ e $(\mathbf{x}_2; y_2)$

Equação da reta: $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Para o caminhão pesado, os dois pontos são (0; 0) e (9; 360).

Logo, a sua equação é:

$$\frac{x - 0}{9 - 0} = \frac{y - 0}{360 - 0}$$

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{360}$$

$$y = \frac{360x}{9}$$

$$y = 40x$$

Para o caminhão leve, os pontos do primeiro trecho do percurso são (1; 0) e (4; 216). A sua equação será então:

$$\frac{x - 1}{4 - 1} = \frac{y - 0}{216 - 0}$$

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y}{216}$$

$$x - 1 = \frac{y}{72}$$

$$y = 72x - 72$$

Vamos, agora, fazer a interseção das duas retas, para obter o instante do primeiro encontro:

$$\begin{cases} y = 40x \\ y = 72x - 72 \end{cases}$$

$$72x - 72 = 40x$$

$$72x - 40x = 72$$

$$32x = 72$$

$$x = \frac{72}{32} = 2,25 = 2 + 0,25$$

O primeiro encontro se deu às 2 horas mais 0,25 de hora.

Como 1 hora tem 60 minutos e $0,25 \times 60 = 15$, concluímos que ***o primeiro encontro se deu às 2 horas e 15 minutos***.

Para determinar o instante do 2° encontro, basta fazer y = 216, na equação do caminhão pesado:

$$y = 40x$$

$$216 = 40x$$

$$x = \frac{216}{40} = 5{,}4 = 5 + 0{,}4$$

Como $0{,}4 \times 60 = 24$, concluímos que ***o segundo encontro se deu às 5 horas e 24 minutos***.

Finalmente, para determinar o instante do terceiro encontro, vamos obter a equação da reta do caminhão leve no trecho final de seu percurso. Os dois pontos são, agora (6; 216) e (8; 360).

Temos, então:

$$\frac{x - 6}{8 - 6} = \frac{y - 216}{360 - 216}$$

$$\frac{x - 6}{2} = \frac{y - 216}{144}$$

$$x - 6 = \frac{y - 216}{72}$$

$$72x - 432 = y - 216$$

$$72x - 432 + 216 = y$$

$$y = 72x - 216$$

Fazendo a interseção dessa reta com y = 40x obtemos:

$$72x - 216 = 40x$$

$$72x - 40x = 216$$

$$32x = 216$$

$$x = \frac{216}{32} = 6{,}75 = 6 + 0{,}75$$

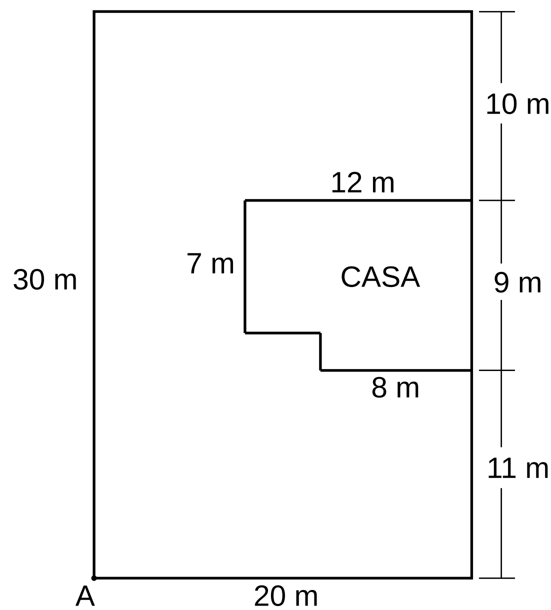
Como $0{,}75 \times 60 = 45$, concluímos que ***o terceiro encontro se deu às 6 horas e 45 minutos***.

EXEMPLO 3

A figura a seguir mostra uma casa construída no interior de um terreno retangular.

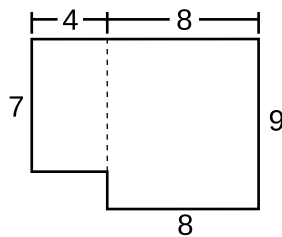
a) Se o proprietário deseja gramar todo o restante do terreno, que área de grama ele deverá comprar?

b) Se no ponto A existe uma torneira e se o proprietário tem uma mangueira de 38 m de comprimento, conseguirá ele regar toda a grama plantada?



Solução:

a) Vamos calcular a área da casa, dividindo sua planta em dois retângulos:



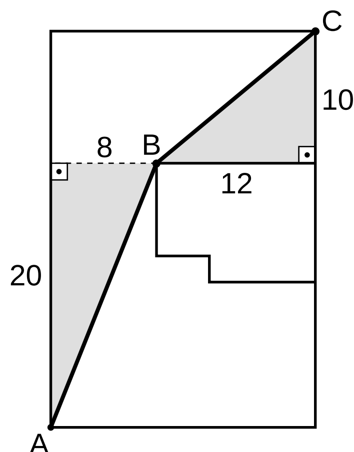
$8 \times 9 = 72 \text{ m}^2$

$7 \times 4 = 28 \text{ m}^2$

Área total $= 72 + 28 = 100 \text{ m}^2$

Como a área do terreno é de $20 \times 30 = 600 \text{ m}^2$, a área de grama será igual a $600 - 100 = 500 \text{ m}^2$.

b) Vamos calcular a distância do ponto A ao ponto mais afastado do terreno sem passar por dentro da casa. Para isso, devemos somar as hipotenusas de dois triângulos retângulos, como mostramos na figura abaixo. Pelo Teorema de Pitágoras (Aula 19), temos:



$AB^2 = 20^2 + 8^2 = 464$

$AB \cong 21,54$ m

$BC^2 = 12^2 + 10^2 = 244$

$BC \cong 15,62$ m

$AB + BC = 21,54 + 15,62 = 37,16$ m

Logo, os 38 m de mangueira alcançam todo o terreno.

AULA

69

Revisão II

Introdução

Nesta segunda parte da revisão, vamos voltar a falar de progressões, funções, juros e prestações. Tente fazer nossos problemas e tenha à mão uma calculadora, para conferir as contas.

Nossa aula

EXEMPLO 1 

Para alugar um automóvel, João consultou três agências, e as tarifas cobradas por um dia foram as seguintes:

Agência A:	R$ 80,00, independentemente da quilometragem.
Agência B:	R$ 50,00 mais R$ 0,20 por quilômetro rodado.
Agência C:	R$ 45,00 mais R$ 0,25 por quilômetro rodado.

Determinar, em função da quilometragem, qual agência oferece melhor preço para um dia de aluguel.

Sugestão: Considerando **x**, o número de quilômetros rodados e **y** o valor pago pelo aluguel do automóvel, determine a função que relaciona essas variáveis para cada uma das agências.

Solução:

Sejam:

x =	número de quilômetros rodados
y =	preço a pagar

Para a agência A, temos $y = 80$. O preço a pagar não depende da quilometragem e esta é a função constante. Para a agência B, temos $y = 50 + 0{,}20 \cdot x$, e para a agência C, $y = 45 + 0{,}25 \cdot x$.

Considerando inicialmente apenas as funções B e C, vamos ver para que valor de **x** elas são iguais.

B ® y = 0,20x + 50
C ® y = 0,25x + 45

$0,25x + 45 = 00,20x + 500$

$0,25x - 0,20x = 50 - 45$

$0,05x = 5$

$x = \frac{5}{0,05}$

$x = 100$

Portanto, para um percurso de 100 km, o preço a pagar nas agências B e C será o mesmo: R$ 70,00. Vamos agora verificar para qual quilometragem os preços cobrados por A e B são iguais.

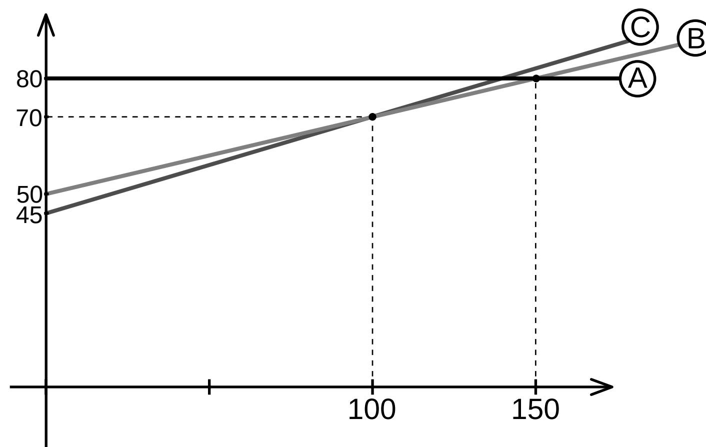
A ® y = 80
B ® y = 0,20x + 50

$0,20x + 50 = 80$

$0,20x = 30$

$x = \frac{30}{0,20} = 150$

Portanto, para um percurso de 150 km, o preço a pagar nas agências A e B será o mesmo: R$ 80,00. Já temos, então, informações suficientes para traçar os gráficos das funções.



A observação desses gráficos nos leva às seguintes conclusões: considerando apenas um dia de aluguel, para quilometragens menores que 100 km, a agência C oferece preço mais baixo. Para quilometragens entre 100 e 150 km deve-se preferir a agência B e, para quilometragens acima de 150 km, a agência A é mais vantajosa.

EXEMPLO 2

No dia 20 de junho, Pedro deseja abrir uma caderneta de poupança e fazer um depósito para que, em 20 de dezembro, tenha o suficiente para comprar uma televisão. Se a televisão que ele deseja custa R$ 560,00, se os preços não mudarem e se a poupança render 3% ao mês, de quanto deve ser o depósito inicial de Pedro?

Solução:

Vamos chamar de **x** o depósito de Pedro, no dia 20 de junho. Até 20 de dezembro, são 6 meses.

No dia 20 de julho, Pedro terá na poupança x + 3% de x.

$x + 3\%$ de $x = x + 0{,}03x = x \cdot 1{,}03$

Assim, os saldos da poupança, a cada dia 20, formarão uma ***progressão geométrica*** cujo primeiro termo é $a_1 = x$ e cuja razão é $q = 1{,}03$. O saldo, em dezembro, será o 7º termo dessa progressão. Vamos, então, recordar a fórmula do termo geral da PG que aprendemos na Aula 35.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

O saldo em 20 de dezembro será:

$$a_7 = x \cdot 1{,}03^6$$

Para calcular $1{,}03^6$, vamos recordar o uso da máquina de calcular. Digite as teclas na seqüência abaixo:

1 • 0 3 x = = = = = → visor 1,194

Portanto, o saldo em 20 de dezembro será $x \cdot 1{,}194$ que deve ser igual a 560. Logo:

$$x \cdot 1{,}194 = 560$$

$$x = \frac{560}{1{,}194} = 469{,}01$$

Concluímos, então, que se Pedro fizer em 20 de junho um depósito na poupança de R$ 469,01, ele terá, em 20 de dezembro, os R$ 560,00 de que necessita para comprar a televisão.

EXEMPLO 3

Márcio resolveu fazer uma poupança programada e passou a depositar, na caderneta, R$ 100,00 todo primeiro dia de cada mês. Quanto ele terá acumulado logo depois do 20º depósito? Considere que a caderneta de poupança rende 3% ao mês.

Sugestão: Para aumentar uma quantia em 3%, multiplicamos essa quantia por 1,03, como vimos no exemplo anterior. Depois do 20º depósito, repare que o primeiro depósito terá sofrido 19 aumentos; o segundo terá sofrido 18 aumentos, e assim por diante.

Solução:

O 1º depósito sofrerá 19 aumentos de 3%. Cada aumento de 3%, corresponde a uma multiplicação por 1,03. Portanto, o 1º depósito de R$ 100,00, valerá no final de cada período $100 \cdot 1{,}03^{19}$.

O 2º depósito de R$ 100,00, sofrerá 18 aumentos de 3%. Logo, no final do período, ele estará valendo $100 \cdot 1{,}03^{18}$. O raciocínio continua da mesma forma. O penúltimo depósito sofrerá apenas uma correção de 3%, passando a valer $100 \cdot 1{,}03$ e, o último depósito, não sofrerá aumento nenhum.

O saldo na caderneta, após o 20º depósito, será então a soma:

$$S = 100 \cdot 1{,}03^{19} + 100 \cdot 1{,}03^{18} + ... + 100 \times 1{,}03^{2} + 100 \cdot 1{,}03 + 100$$

Vamos colocar o valor 100 em evidência e escrever os termos de dentro do parênteses na ordem contrária.

$$S = 100\ (1{,}03^{19} + 1{,}03^{18} + ... + 1{,}03^{2} + 1{,}03 + 1)$$

$$S = 100\ (1 + 1{,}03 + 1{,}03^{2} + ... + 1{,}03^{18} + 1{,}03^{19})$$

Os termos de dentro do parênteses formam uma ***progressão geométrica***, cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e, cuja razão é $q = 1{,}03$. Vamos recordar, agora, a fórmula da soma dos têrmos da PG que aprendemos na Aula 36.

$$\text{Soma dos termos da PG} = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

Assim, como a nossa progressão tem 20 termos, vamos aplicar a fórmula acima substituindo a_1 por 1, q por 1,03 e **n** por 20. O saldo na caderneta será então:

$$S = 100 \times \frac{1\left(1{,}03^{20} - 1\right)}{1{,}03 - 1}$$

Calculando $1{,}03^{20}$, na máquina, de forma semelhante à que fizemos no exemplo anterior, obtemos 1,8061 para essa potência. Então:

$$S = \frac{100\left(1{,}8061 - 1\right)}{0{,}03} = \frac{100 \times 0{,}8061}{0{,}03} = 2687$$

Concluímos, então, que Márcio terá acumulado na poupança, após o 20º depósito, a quantia de R$ 2.687,00.

EXEMPLO 4

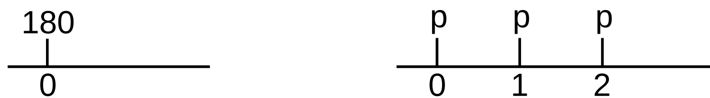
Na loja de Cida, as freguesas gostam de fazer crediário. Cida cobra juros de 10% ao mês e precisa saber calcular corretamente as prestações.

Uma freguesa fez uma compra de R$ 180,00 e pediu para pagar em três parcelas iguais. Uma no ato da compra e as outras duas em 30 e 60 dias. Qual deve ser o valor das parcelas?

Solução:

Vamos utilizar a técnica que aprendemos na Aula 38.

O pagamento à vista de R$ 180,00 deve ser equivalente ao pagamento de três parcelas iguais a **p**, onde estarão sendo cobrados juros de 10% ao mês.



Vamos referir os pagamentos à época 0. No caso do crediário, temos uma parcela na época 0; outra na época 1 e outra na época 2. Portanto, uma das parcelas deve ser dividida por (1 + i) para retroceder um mês, a outra deve ser dividida por $(1 + i)^2$ para retroceder dois meses. Como i = 10% = 0,1 temos:

$$180 = p + \frac{p}{1+0,1} + \frac{p}{(1+0,1)^2} \quad \text{ou}$$

$$180 = p + \frac{p}{1,1} + \frac{p}{1,1^2}$$

Multiplicando tudo por $1,1^2$ temos:

$$180 \cdot 1,1^2 = p \cdot 1,1^2 + p \cdot 1,1 + p$$

$$180 \cdot 1,21 = p\,(1,21 + 1,1 + 1)$$

$$217,8 = p \cdot 3,31$$

$$p = \frac{217,8}{3,31} = 65,80$$

Logo, se a freguesa vai pagar a compra de R$ 180,00 em três parcelas iguais com juros de 10%, cada parcela será de R$ 65,80.

AULA

70

Revisão III

Introdução

Nesta terceira parte da revisão do nosso curso, vamos abordar problemas de análise combinatória, probabilidade, trigonometria e logaritmos, com o uso das tabelas e da calculadora.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Um grupo de dez pessoas está planejando um passeio, usando dois automóveis com cinco pessoas em cada um. Entre as pessoas, existem seis que sabem dirigir e, além disso, Antônio e Paula estão namorando e gostariam de ir no mesmo automóvel.

De quantas maneiras podemos distribuir essas pessoas nos dois automóveis?

Solução:

Se no grupo de dez pessoas existem seis que dirigem, então, qualquer que seja a distribuição das pessoas, teremos em cada grupo pelo menos um motorista. Mesmo que se coloque cinco motoristas em um grupo, sobrará um motorista no outro grupo. Não precisamos então nos preocupar com os motoristas.

Outro fato que devemos observar é que basta escolher ***um grupo de cinco pessoas***. Escolhendo um grupo, obrigatoriamente, as pessoas que sobrarem formarão o outro grupo.

Vamos, então, formar o grupo onde estarão Antônio e Paula. Para formar esse grupo, basta escolher mais três pessoas entre as oito restantes. O número de possibilidades de fazer essa escolha é dada pela ***combinação*** de oito pessoas tomadas três a três. Vamos, então, recordar a fórmula das combinações que aprendemos na Aula 51.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Como temos oito pessoas para escolher três, então, no nosso caso, $n = 8$ e $p = 3$.

Logo, $C_8^3 = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

Temos, então, 56 possibilidades de dividir as dez pessoas em dois grupos, mantendo Antônio e Paula juntos.

EXEMPLO 2

João propõe a Luiz uma aposta: eu vou jogar esse dado por três vezes. Se aparecer, em alguma jogada, o número 6, eu ganho. Se não aparecer nenhuma vez o número 6, você ganha. Luiz topou a aposta.

Quem tem mais probabilidades de ganhar?

Solução:

Se o 6 aparecer na primeira jogada, João ganha e não há mais necessidade de continuar. Se o 6 não aparecer na primeira jogada, mas aparecer na segunda, novamente João ganha. Ainda, se o 6 não aparecer nas duas primeiras mas aparecer na terceira, novamente a vitória é de João. Como podemos calcular as probabilidades de João? Pense um pouco e dê um palpite antes de continuar e ver a solução.

A probabilidade de que o 6 apareça em uma jogada de um dado é $\frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de que o 6 ***não*** apareça em uma jogada é de $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

No lugar de pensar nas probabilidades de João, vamos pensar nas probabilidades de Luiz. Repare que é bem mais fácil.

Para Luiz ganhar, o 6 não pode aparecer em nenhuma das três jogadas. A probabilidade de que isso aconteça é:

$$p = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} @ 0,579 = 57,9\%$$

Logo, a probabilidade de João ganhar é 1 – 0,579 = 0,421 = 42,1%.

Portanto, Luiz estava certo em topar a aposta. Ele tem mais probabilidades de ganhar que João.

EXEMPLO 3

Em certo país, a população cresce 4% a cada ano. Dentro de quantos anos a população desse país será três vezes maior que hoje?

Solução:

Imaginando que a população desse país seja hoje igual a **x**, temos que, no ano que vem, ela será igual a:

$$x + 4\% \text{ de } x = x + 0,04 \cdot x = x \cdot 1,04$$

Temos, então:

hoje:	x	habitantes
daqui a 1 ano:	$x \cdot 1,04$	habitantes
daqui a 2 anos:	$x \cdot 1,04^2$	habitantes
daqui a 3 anos:	$x \cdot 1,04^3$	habitantes
....		
daqui a **n** anos:	$x \cdot 1,04^n$	habitantes

Se daqui a **n** anos, a população vai triplicar, teremos:

$x \cdot 1{,}04^n = 3x$ ou $1{,}04^n = 3$

Para calcular **n**, devemos aplicar ***logaritmo*** aos dois lados da equação:

$\log 1{,}04^n = \log 3$

Vamos, agora, recordar as propriedades dos logaritmos que aprendemos na aula 60.

$$\log AB = \log A + \log B$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\log A^n = n \cdot \log A$$

Usamos, inicialmente, a 3ª propriedade:

$\log 1{,}04^n = \log 3$

$n \cdot \log 1{,}04 = \log 3$

Repare que $1{,}04 = \frac{104}{100}$. Então, usando a 2ª propriedade, temos:

$n \cdot \log \frac{104}{100} = \log 3$

$n\,(\log 104 - \log 100) = \log 3$

Sabemos que o logaritmo de 100 é igual a 2. Para os logaritmos de 3 e de 104, devemos consultar a tabela que se encontra no livro. As mantissas são:

NÚMERO	MANTISSA
3	4771
104	0170

Como 3 está entre 1 e 10, sua característica é 0 e, como 104 está entre 100 e 1.000, sua característica é 2. Temos, então, log 3 = 0,4771 e log 104 = 2,017. Daí,

$n\,(\log 104 - \log 100) = \log 3$

$n\,(2{,}017 - 2) = 0{,}4771$

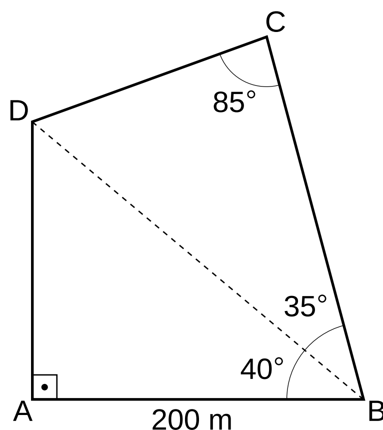
$n \cdot 0{,}017 = 0{,}4771$

$n = \frac{0{,}4771}{0{,}017} \cong 28$

Concluímos, então, que, mantendo o ritmo de crescimento, a população desse país terá triplicado em 28 anos.

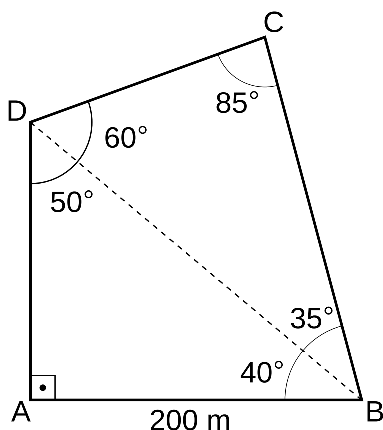
EXEMPLO 4

Um terreno ABCD tem a forma de um quadrilátero irregular, como mostra a figura abaixo. Mediu-se, com uma trena, a distância AB = 200 m e, com um teodolito, os ângulos que aparecem na figura. Calcule o perímetro e a área do terreno.



Solução:

Como a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180º, podemos calcular os ângulos no ponto D da figura.



Vamos, agora, usar a trigonometria que desenvolvemos nas Aulas 40 e 43, para calcular os demais comprimentos que aparecem na figura. Será também necessário consultar a tabela trigonométrica que se encontra no livro.

$$\frac{AD}{AB} = \text{tg}\,40° \text{®} \quad \frac{AD}{200} = 0,8391$$

AD = 200 · 0,8391 = 167,82m

$$\frac{AB}{DB} = \cos 40° \text{®} \quad \frac{200}{DB} = 0,76604$$

$$DB = \frac{200}{0,76604} = 261,08\text{m}$$

Agora, vamos aplicar duas vezes a lei dos senos no triângulo BCD.

$$\frac{DB}{\text{sen}\,85^o} = \frac{DC}{\text{sen}\,35^o} \qquad \frac{261,08}{0,99619} = \frac{DC}{0,57358} \qquad \frac{261,08 \cdot 0,57358}{0,99619} = DC$$

DC=150,32m

$$\frac{DB}{\text{sen}\,85^o} = \frac{BC}{\text{sen}\,60^o} \qquad \frac{261,08}{0,99619} = \frac{BC}{0,86603} \qquad \frac{261,08 \cdot 0,86603}{0,99619} = BC$$

BC=226,97m

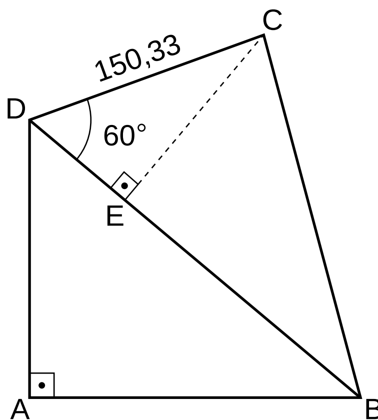
Já podemos então calcular o perímetro do terreno. A soma de todos os seus lados é:

200 + 167,82 + 150,32 + 226,97 = 745,11 m

Aí está: para dar uma volta completa nesse terreno, andaremos 745,11 m. Para calcular sua área, usaremos os triângulos ABD e BCD. O triângulo ABD é retângulo em A. Logo, sua área é:

$$S_{ABD} = \frac{AB \cdot AD}{2} = \frac{200 \cdot 167,82}{2} = 16782\,m^2$$

O triângulo BCD é escaleno. Considerando BD como sua base, calcularemos inicialmente sua altura CE.



$$\frac{CE}{DC} = \text{sen}\,60^o ® \quad \frac{CE}{150,33} = 0,86603 \qquad CE = 150,33 \cdot 0,86603 = 130,19m$$

A área do triângulo BCD será então:

$$S_{BCD} = \frac{DB \cdot CE}{2} = \frac{261,08 \cdot 130,19}{2} = 16995\,m^2$$

A área total do terreno será então a soma das duas partes:

$$S = 16782 + 16994 = 33776m^2$$

Gabaritos das aulas 41 a 67

Aula 41

1 a) $\alpha = 60^o$; $h = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \ @\ 17,32$

b) $\alpha = 60^o$; $h = \frac{10\sqrt{3}}{2} + 2 = 5\sqrt{3} + 2 \ @\ 10,66$

2. $a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$; $r = \ell$

3. $tg\,30^o = \frac{sen\,30^o}{cos\,30^o} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg\,45^o = \frac{sen\,45^o}{cos\,45^o} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$

$tg\,60^o = \frac{sen\,60^o}{cos\,60^o} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$

4 a) $d = 4\sqrt{2} = \ell\sqrt{2}$ ® $l = 4$ cm

b) $d = 2 = \ell\sqrt{2} \rightarrow \ell = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$cm

5. altura = $13 \cdot 15\sqrt{2} \cong 276$ cm ou 2,76 m

Aula 42

1. $5^2 = 8^2 + \boldsymbol{x}^2 - 2 \cdot 8 \cdot \boldsymbol{x} \cdot \cos 30^o$

$x^2 - 8\sqrt{3x} + 39 = 0$

$x = 4\sqrt{3} + 3$ ou $x = 4\sqrt{3} - 3$

2 a) Obtusângulo, pois $100 > 25 + 49$

b) Como o maior ângulo é oposto ao maior lado, efetuamos as operações:
$10^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos x$ e encontramos $x \cong 68^o$

3 **a)** $\text{sen } 120^{o} = \text{sen } 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 120^{o} = -\cos 60^{o} = -\frac{1}{2}$

c) $\text{sen } 95^{o} = \text{sen } 85^{o} = 0{,}99619$

d) $\cos 95^{o} = -\cos 85^{o} = -0{,}08716$

4. **a)** $x = \text{sen } 20^{o} \cong 0{,}34$
$y = \cos 20^{o} \cong 0{,}94$

b) $x = 2 \cdot \text{sen } 20^{o} \cong 0{,}68$
$y = 2 \cdot \cos 20^{o} \cong 1{,}88$

5. **a)** $<$

b) $>$

c) $=$

d) $>$

e) $=$

f) $=$

g) $>$

h) $<$

Aula 43

1. **a)** $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{Área} = \frac{a^{2}\sqrt{3}}{4}$

2. $\frac{3a^{2}\sqrt{3}}{2}$

3. Aproximadamente 6538 m^{2}

4. (d)

5. $\text{sen } \hat{A} = \frac{3}{4}$

Aula 44

1. Aproximadamente 1508 m.
2. Aproximadamente 95,69 m.
3. Aproximadamente 148 m.
4. Aproximadamente 408 m.

Aula 45

1. $2x - 3y + 8 = 0$
2. (20; 0) e (0; 8)
3. $\frac{29}{3}$
4. 17,8 UT
5. $R = 0{,}8$ e $a_4 = 10{,}4$
6. **a)** 320 litros

   b) 6 h 40 de quinta–feira
7. 2,4
8. $2\sqrt{5}$

Aula 46

1. angular = $\frac{-2}{3}$, linear = 4
2. $\frac{1}{3}$
3. $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
4. $\frac{-8}{5}$
5. **a)** $m_a = \frac{2}{3}$

   $m_b = -1$

   $m_c = \frac{-1}{2}$

   $m_d = \frac{3}{5}$

   b) m_a
6. $y = -\frac{2}{5}x + 7$
7. $y = -\frac{4}{3}x + 19$
8. $r : y = \frac{2}{3}x + 3$

   $s: y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$
9. 1.137,5 m.

Aula 47

1. a) $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$

   b) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 7$

   c) $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

2. a) $C = (2; 1), R = \sqrt{6}$

   b) $C = (3; 0), R = \sqrt{10}$

   c) $C = (-4; 3), R = 1$

3. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$

4. É interior porque sua distância ao centro é $\sqrt{29}$ que é menor que o raio.

5. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 45$

6. $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 13$

7. (3; 11)

8.
$y_3 = 1{,}539$
$y_4 = 1{,}798$
$y_5 = 1{,}950$
$y_6 = 2$
$y_7 = 1{,}950$
$y_8 = 1{,}798$
$y_9 = 1{,}539$
$y_{10} = 1{,}165$
$y_{11} = 0{,}660$
$y_{12} = 0$

9. (– 1; 6) e (5; 6)

Aula 48

1. 12

2. a) $9 \times 9 = 81$
   b) $9 \times 2 = 17$

3. $26 \times 25 \times 24 = 15.600$

4. $5^{10} = 9.765.625$

5. $50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 = 11.441.304.000$

6. Passando apenas por A: 15 maneiras.
Passando apenas por B: 8 maneiras.
Passando por A e B: 6 + 20 = 26 maneiras.
Ao todo: 49 caminhos diferentes de x para y.

7. 30 palavras diferentes.

8. Um pouco mais de 3 anos e 2 meses
(100^4 = 100.000.000 seg ≅ 1.666.667 min ≅ 27.778 horas ≅ 1.157 dias)

9. $1 \times 1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 100.000$

Aula 49

1. $4! = 24$

2. a) $6! = 720$

b) $3 \times 5 = 360$

c) $2 \times 3 \times 4! = 240$

d) $5! = 120$

e) Como o 5 deve estar na ordem das unidades teremos 6 ou 4 centenas de milhar. Então, a resposta é $2 \times 4! = 48$

3. a) $10! = 3\,628\,800$

b) $10! - 2 \times 9 \times 8! = 2\,903\,040$

4. $2 \times 3! = 12$

Aula 50

1. 181 440
2. 5040
3. 300
4. 45
5. 362 880
6. 2880
7. 768
8. 48

Aula 51

1. 20

2. $C_{10}^{6} \cdot C_{15}^{10} = 630.630$

3. $4 \cdot 3 \cdot C_{5}^{2} = 120$

4. $C_{15}^{3} \cdot C_{12}^{3} \cdot C_{9}^{3} \cdot C_{6}^{3} \cdot C_{3}^{3} = \frac{15!}{12!3!} \cdot \frac{12!}{9!3!} \cdot \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{1!3!} = 168.168.000$

5. a) $C_{16}^{2} = 120$

b) $C_{16}^{2} - C_{4}^{2} = 114$

Aula 52

1. 8!

2. $\frac{15!}{6!}$

3. 1120 (repare que posso trocar 2A por 2B, o que fará diferença!)

4. 7!

5. 3^{13} (3 alternativas para cada um dos 13 jogos).

6. 205 equipes diferentes com pelo menos um homem. Você pode ter encontrado esta solução de duas maneiras:
Primeira. C15 · C35 + C25 · C25 + C35 · C15 + C45 · C05
Segunda. C410 – C45

Aula 53

1. a) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 7{,}69\%$

b) $\frac{12}{52} = \frac{3}{13} = 23\%$

2. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 67\%$

3. a) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 17\%$

b) 0

c) 0

d) $\frac{24}{36} = \frac{2}{3} = 67\%$

4. $\frac{1}{11441304000} = 0{,}000\ 000\ 000\ 087 = 0{,}000\ 000\ 0087\%$

5. $\frac{1}{9034502400} = 0{,}000\ 000\ 000\ 11 = 0{,}000\ 000\ 011\%$

6. $\frac{3!}{26^3 \cdot 10^4} = \frac{6}{175760000} = 0{,}000\ 000\ 034 = 0{,}000\ 003\ 4\%$

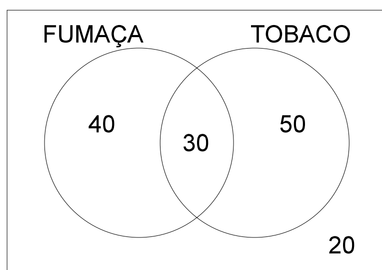
Aula 54

1. Eventos independentes: $\frac{1}{12}$

2. Eventos dependentes: $\frac{1}{6}$

3. $\frac{300}{500} + \frac{100}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$

4. a) P (A e B) = $\frac{30}{140} = \frac{3}{14}$



b) P (A ou B) = $\frac{40+30+50}{140} = \frac{120}{140} = \frac{6}{7}$

5. a) $\frac{40}{140} = \frac{2}{7}$

b) $\frac{50}{140} = \frac{5}{14}$

c) $\frac{40+50}{140} = \frac{9}{14}$

d) $\frac{20}{140} = \frac{1}{7}$

e) $\frac{50+20}{140} = \frac{70}{140} = \frac{1}{2}$

f) $\frac{40+20}{140} = \frac{60}{140} = \frac{3}{7}$

Aula 55

1. É muito provável que você tenha encontrado, aproximadamente, cada número aparecendo $\frac{1}{6}$ das vezes, ou seja, $\frac{1}{6}$ de 120 = 20 vezes.

2. Encontramos para a última coluna da tabela:
0,770 – 0,550 – 0,425 – 0,400 – 0,425 – 0,470 – 0,460 – 0,510 – 0,508 – 0,505 – 0,492 – 0,505 – 0,510 – 0,508 – 0,503 – 0,502.
Em termos percentuais completaríamos com:
70% – 55% – 43% – 40% – 43% – 47% – 46% – 51%
51% – 51% – 49% – 51% – 51% – 51% – 50% – 50%

3. Sim

Aula 56

1. 6,2

2. 1,856 m, ou seja, arredondando, 1,86 m.

3.
0 1 2
$\frac{1}{2}$ $\frac{17}{20}$ $\frac{6}{5}$

4. 28

5. 60 km/h

Aula 57

1. a) 3^3

b) 3^{13}

c) 3

d) 3^{-2}

2. $5^{-\frac{3}{2}}$

3. a) 5

b) 2

c) $5^{\frac{5}{6}}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{10}}$

4. a) $\sqrt[5]{12^2}$

b) $\sqrt{6}$

5. a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{10}$

Aula 58

1. $x = 6$
2. $x = \frac{1}{2}$
3. $x = 9$
4. $x = 0$
5. $x = -2$
6. $x = 8$
7. $x = \frac{1}{9}$
8. $x = 3$
9. $x = 5$
10. $x = -8$

Aula 59

1. a) $10^{0,778}$

b) 0,778

2. $10^{1,322}$

3. 1,602

4.

0,000	1,041	1,477
0,301	1,079	1,602
0,477	1,114	1,699
0,602	1,146	1,778
0,699	1,176	1,845
0,778	1,204	1,903
0,845	1,230	1,954
0,903	1,255	2,000
0,954	1,279	3,000
1,000	1,301	4,000

5. 3,868

6. $10^{2,748}$

7. 2,623

8. –0,921

Aula 60

1. log 42 = 1,623

2. 3,7559

3. –0,4202

4. a) 2,1523

b) 2,8376

c) 1,5105

5. 5,9656

6. 0,5340

7. a) 415

b) 41,5

c) 4,15

8. 12,9777

9. a) 0,5966

b) 3,95

Aula 61

1. a) 543

   b) 54,3

   c) 5,43

2. a) 2,2833

   b) 1,8351

3. 15

4. 3,42 m

5. 12%

6. a) 4

   b) 15

   c) 8

   d) 9,5

7. 47,6 ºC

Aula 62

1. 192.000 ℓ

2. 1096 caixas

3. 7 cm

4. Há várias respostas para esse problema.

5. Resposta aberta.

6. a) mℓ

   b) ℓ ou mℓ

   c) ℓ

   d) mℓ

7. 750 mℓ

8. 480

9. Aproximadamente 22,5 latas.

Aula 63

1. Aproximadamente 8 galões.

2. 34,6 cm^3

3. Resposta aberta

4. 1 436 m

5. $16\sqrt{3}$ (unidade de volume)

6. a) 1, 8 e 27

   b) fica multiplicado por 8;
   fica multiplicado por 27.

7. 30,6 m^3

8. 72 cm^3

Aula 64

1. Sim.

2. O primeiro pedaço.

3. C

4. 60

5. 27 cm

6. 5 m

7. 1.060 cm

8. 15 cm

9. 3 centavos.

Aula 65

1. 75 cm

2. 314 cm

3. Aproximadamente 5 233 cm .

4. a) 12,56 cm

b) 50,24 cm

5. $1.097.509{,}546 \times 10^6$

6. $17.148{,}58666 \times 10^6$

7. 267,94 cm e 401,92 cm

8. 2 metros

Aula 66

1. 4 cm

2. 72,8%

3. 2,4 m^2

4. 78 kg

5. 24 caixas.

6. 153,6 mℓ

7. 100 m

8. a) 1,3

b) 69%

9. a) $V_E \cong 52\%\ V_C$

b) $A_E \cong 52\%\ A_C$

Aula 67

1. 9,18 cm^3

2. **a)** 2.953,7 cm^3

b) 2.747 g

3. 3.658 cm^3

4. Não. Ela pesa 490 g.

5. 1,48 m

6. Aproximadamente 620 cm^3

7. 87,92 cm^3